Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 2, С. 57–66

УДК **517.968.22+517.968.4**

О НЕТРИВИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА — ВОЛЬТЕРРА

Х. А. Хачатрян, С. А. Григорян

В настоящей заметке исследуется вопрос о существовании однопараметрического семейства положительных и ограниченных решений для одного класса нелинейных однородных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Вольтерра. Указанный класс уравнений имеет важное применение в кинетической теории газов.

Ключевые слова: уравнение типа Гаммерштейна — Вольтерра, факторизация, последовательные приближения, ядро.

1. Введение и основная теорема

Введем в рассмотрение следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$f(x) = \int_x^\infty V(x,t)G(t,f(t))\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv [0,+\infty), \tag{1}$$

относительно искомой вещественной и измеримой функции $f(x)$.

В уравнении (1) $V(x,t)$ — определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ измеримая функция, которая имеет следующую структуру:

$$V(x,t) = \int_a^b \alpha(t,s)e^{-\alpha(t,s)(t-x)}\,d\sigma(s)\theta(t-x), \tag{2}$$

где $\alpha(t,s)$ — определенная на множестве $\mathbb{R}^+ \times [a,b)$ $(0 \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ измеримая функция, причем

$$\operatorname*{ess\,inf}_{(t,s)\in\mathbb{R}^+\times[a,b)} \alpha(t,s) \equiv \beta > 0, \tag{3}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}^+} \alpha(t,s) \equiv \alpha_0(s) < +\infty, \quad s \in [a,b), \quad \int_a^b \alpha_0(s)\,d\sigma(s) < 2\beta. \tag{4}$$

В (2) $\sigma(s)$ — монотонно неубывающая функция на $[a,b)$, причем

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \int_a^b d\sigma(s) = 1, \tag{5}$$

а $\theta(\tau)$ — функция Хевисайда, т. е.

$$\theta(\tau)=\begin{cases}1, & \tau\geqslant 0,\\ 0, & \tau<0.\end{cases} \tag{6}$$

В уравнении (1) $G(t,\tau)$ — определенная на $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ измеримая функция, имеющая следующую структуру:

$$G(t,\tau)=\tau-\omega(t,\tau), \tag{7}$$

где $\omega(t,\tau)$ — определенная на $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ измеримая функция, причем

(a) существует число $A>0$ такое, что $\omega(t,\tau)\geqslant 0$, когда $(t,\tau)\in\mathbb{R}^+\times[A,+\infty)$ и $\omega(t,\tau)\downarrow$ по τ на $[A,+\infty)$ при каждом фиксированном $t\in\mathbb{R}^+$;

(b) $\omega(t,\tau)$ удовлетворяет условию Каратеодори на множестве $\mathbb{R}^+\times[A,+\infty)$, т. е. при каждом фиксированном $\tau\in[A,+\infty)$ $\omega(t,\tau)$ измерима по $t\in\mathbb{R}^+$, и при почти всех $t\in\mathbb{R}^+$ она непрерывна по τ на $[A,+\infty)$. Это условие коротко запишем в следующем виде: $\omega\in\mathrm{Carat}_\tau(\mathbb{R}^+\times[A,+\infty))$;

(c) существует неотрицательная функция $\overset{\circ}{\omega}\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap C^0(\mathbb{R}^+)$, $\overset{\circ}{\omega}\downarrow$ по z на $[A,+\infty)$, $m_1(\overset{\circ}{\omega})\equiv\int_0^\infty x\,\overset{\circ}{\omega}(x)\,dx<+\infty$ такая, что $\omega(t,z)\leqslant\overset{\circ}{\omega}(t+z)$, $(t,z)\in\mathbb{R}^+\times[A,+\infty)$.

Изучение уравнения (1) (с условиями (2)–(7) и (a)–(c)), кроме самостоятельного теоретического интереса, представляет собой также известный интерес в физической кинетике, а именно, в кинетической теории газов. Уравнением (1) описывается задача о течении газа со скольжением вдоль плоской твердой стенки, где роль функции $f(x)$ играет среднемассовая скорость газа (см. [1–3]).

Когда $G(t,\tau)\equiv\tau$, а функция $\alpha(t,s)$ удовлетворяет $\operatorname{ess\,sup}_{(t,s)\in\mathbb{R}^+\times[a,b)}\alpha(t,s)<2\beta$ и (3), уравнение (1) было исследовано в работе автора [4].

В настоящей заметке доказывается следующая

Теорема 1. *При выполнении условий* (2)–(5), (7) *и* (a)–(c), *уравнение* (1) *обладает однопараметричесим семейством положительных и ограниченных решений* $\{f_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Delta}$, *где множество параметров* Δ *задается согласно следующей формуле:*

$$\Delta=[\max(\delta,\gamma_0),+\infty), \tag{8}$$

$\delta\equiv\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^+}\psi(x)$, *а* $\psi(x)$ — *положительное и ограниченное решение уравнения*

$$\psi(x)=2\,\overset{\circ}{\omega}(x+A)+\int\limits_x^\infty V(x,t)\psi(t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{9}$$

Через $\gamma_0\geqslant A$ *обозначено некоторое фиксированное число, для которого*

$$\overset{\circ}{\omega}(\gamma_0)<\gamma_0. \tag{10}$$

Более того, если $\gamma_1,\gamma_2\in\Delta$, $\gamma_1>\gamma_2$, — *произвольные числа, то*

$$f_{\gamma_1}(x)-f_{\gamma_2}(x)\geqslant 2(\gamma_1-\gamma_2),\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{11}$$

Примечание. Существование числа γ_0 сразу вытекает из основных свойств функции $\overset{\circ}{\omega}$.

Замечание. Отметим, что в теореме существования положительность и ограниченность решения $\psi(x)$ уравнения (9) не предполагаются, а осуществляются в ходе доказательства. Более того, устанавливается, что $\psi\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap C^0(\mathbb{R}^+)$.

2. Доказательство теоремы

2.1. Соответствующее линейное однородное уравнение и класс определенных интегральных операторов типа Вольтерра. Рассмотрим следующее линейное однородное интегральное уравнение типа Вольтерра:

$$\varphi(x) = \int_x^\infty V(x,t)\varphi(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{12}$$

относительно искомой функции $\varphi(x)$, где ядро $V(x,t)$ задается согласно формуле (2). Из условий (3) и (5) сразу следует, что ядро $V(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, удовлетворяет условию субстохастичности

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}^+} \int_0^\infty V(x,t)\,dx = 1. \tag{13}$$

Обозначим через Ω класс следующих интегральных операторов типа Вольтерра: $\hat{V}_0 \in \Omega$, если

$$(\hat{V}_0 f)(x) = \int_x^\infty \overset{\circ}{V}(x,t) f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,\ f \in L_1(\mathbb{R}^+), \tag{14}$$

причем

$$\overset{\circ}{V}(x,t) \geqslant 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \mu(\overset{\circ}{V}) \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}^+} \int_0^\infty \overset{\circ}{V}(x,t)\,dx < +\infty. \tag{15}$$

Уравнение (12) запишем в операторном виде

$$(I - \hat{V})\varphi = 0, \tag{16}$$

где I — единичный оператор, а $\hat{V}$ — интегральный оператор Вольтерра с ядром (2). Из (13) и (2) непосредственно следует, что $\hat{V} \in \Omega$.

Рассмотрим следующую задачу факторизации: для заданного оператора $\hat{V} \in \Omega$ (с ядром (2)) найти такой интегральный оператор $\hat{W} \in \Omega$, чтобы

$$I - \hat{V} = (I - \hat{U})(I - \hat{W}), \tag{17}$$

где $\hat{U} \in \Omega$, который имеет следующую простую структуру:

$$(\hat{U} f)(x) = \beta \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,\ f \in E. \tag{18}$$

Здесь E — одно из пространств $L_1(\mathbb{R}^+)$ или $L_\infty(\mathbb{R}^+)$.

Факторизация (17) понимается, как равенство операторов, действующих в E.

2.2. Изучение факторизации (17)**.** Раскрывая скобки в (17), получим

$$\hat{W} = \hat{V} - \hat{U} + \hat{U}\hat{W}, \tag{19}$$

где, переходя от операторных равенств к равенству соответствующих ядер, будем иметь

$$W(x,\tau)=V(x,\tau)-U(x,\tau)+\int_x^\tau U(x,t)W(t,\tau)\,dt,\quad (x,\tau)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+. \tag{20}$$

Здесь

$$U(x,\tau)=\beta e^{-\beta(\tau-x)}\theta(\tau-x),\quad (x,\tau)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+, \tag{21}$$

а $W(x,\tau)$ — ядро искомого оператора $\hat{W}\in\Omega$.

Прямой проверкой можно убедиться, что уравнению (20) удовлетворяет следующая функция:

$$W(x,\tau)=\int_a^b(\alpha(\tau,s)-\beta)e^{-\alpha(\tau,s)(\tau-x)}\,d\sigma(s)\theta(\tau-x). \tag{22}$$

Учитывая условие (3), будем иметь:

$$W(x,\tau)\geqslant 0,\quad (x,\tau)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+. \tag{23}$$

С другой стороны, из (3) и (4) следует, что для ядра $W(x,\tau)$ выполняется (15). Следовательно, $\hat{W}\in\Omega$. Теперь докажем, что уравнение (20) имеет единственное решение в следующем классе функций:

$$Q\equiv\big\{W(x,\tau)\geqslant 0,\ (x,\tau)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\ \mu(W)<+\infty\big\}. \tag{24}$$

Определение числа μ в (15). Пусть $W_1,W_2\in Q$ — два разных решения уравнения (20). Тогда в силу линейности (20) их разность $\Delta W=W_1-W_2$ будет удовлетворять соответствующему однородному уравнению:

$$\Delta W(x,\tau)=\int_x^\tau U(x,t)\,\Delta W(t,\tau)\,dt. \tag{25}$$

Так как $\mu(\Delta W)<+\infty$, то из (25) будем иметь

$$\int_0^\tau|\Delta W(x,\tau)|\,dx\leqslant\int_0^\tau\int_x^\tau U(x,t)|\Delta W(t,\tau)|\,dt\,dx,$$

изменяя порядок интегрирования (с учетом теоремы Фубини [5]), получим

$$\int_0^\tau|\Delta W(x,\tau)|\,dx\leqslant\int_0^\tau|\Delta W(t,\tau)|\,dt-\int_0^\tau e^{-\beta t}|\Delta W(t,\tau)|\,dt,$$

откуда сразу следует, что $\Delta W(t,\tau)=0$ почти всюду в $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. Тем самым доказана единственность решения уравнения (20) в классе Q. Следовательно, факторизация (17) единственна в классе интегральных операторов из Ω, причем ядро оператора $\hat{W}\in\Omega$ задается согласно (22).

2.3. Применение факторизации (17) **к решению уравнения** (12). С учетом факторизации (17) уравнение (12) можно записать в следующем виде:

$$(I-\hat{U})(I-\hat{W})\varphi=0. \tag{26}$$

Рассмотрим следующую связанную систему уравнений:

$$(I - \hat{U})F = 0, \tag{27}$$

$$(I - \hat{W})\varphi = F. \tag{28}$$

Уравнение (27) принимает следующий вид:

$$F(x) = \beta \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)} F(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{29}$$

Заметим, что $F(x) \equiv 1$ удовлетворяет уравнению (29). Подставляя это значение в уравнение (28), приходим к следующему неоднородному интегральному уравнению Вольтерра:

$$\varphi(x) = 1 + \int_x^\infty W(x,t)\varphi(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{30}$$

Ниже докажем, что

$$\rho \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^+} \int_0^\infty W(x,t)\, dt < 1. \tag{31}$$

Действительно из (22) непосредственно следует, что

$$\int_0^\infty W(x,t)\, dt \leqslant \frac{1}{\beta} \int_a^b \alpha_0(s)\, d\sigma(s) - 1 \equiv \rho_0. \tag{32}$$

Учитывая (3), получим, что $\rho_0 \in [0,1)$. Следовательно, $\rho \leqslant \rho_0 < 1$.

Итак, (31) доказано. Таким образом из классической теории интегральных уравнений следует, что уравнение (30) имеет единственное и ограниченное решение $\varphi(x)$, причем

$$1 \leqslant \varphi(x) \leqslant (1-\rho)^{-1} \leqslant (1-\rho_0)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{33}$$

Из оценки (31) сразу следует, что оператор $\hat{W}$ действует в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^+)$. С другой стороны, таким свойством обладает также оператор $\hat{U}$. Следовательно, учитывая (17), можем утверждать, что оператор $\hat{V}$ также действует в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^+)$. Таким образом, решение уравнения (30) является также решением уравнения (16).

2.4. Решение соответствующего неоднородного уравнения. Рассмотрим следующее уравнение типа Вольтерра:

$$\psi(x) = 2\,\overset{\circ}{\omega}(x+A) + \int_x^\infty V(x,t)\psi(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{34}$$

относительно искомой функции $\psi(x)$. С использованием факторизации (17) решение уравнения (34) сводится к последовательному решению следующих двух связанных уравнений:

$$\psi_0(x) = 2\,\overset{\circ}{\omega}(x+A) + \beta \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)} \psi_0(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{35}$$

$$\psi(x)=\psi_0(x)+\int\limits_x^\infty W(x,t)\psi(t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{36}$$

Общее решение уравнения (35) записывается в виде

$$\psi_0(x)=2\,\overset{\circ}{\omega}(x+A)+2\beta\int\limits_{x+A}^\infty \overset{\circ}{\omega}(t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{37}$$

Заметим, что из свойств $\overset{\circ}{\omega}$ следует ограниченность функции $\psi_0(x)$, более того,

$$0\leqslant\psi_0\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap C^0(\mathbb{R}^+), \tag{38}$$

поскольку $m_1(\overset{\circ}{\omega})<+\infty$, $\overset{\circ}{\omega}\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap C^0(\mathbb{R}^+)$. Теперь займемся решением уравнения (36). Так как $\rho<1$, то уравнение (36) имеет единственное и ограниченное решение $\psi(x)\geqslant\psi_0(x)$, причем так как $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^+}\psi_0(x)<+\infty$, то

$$\psi(x)\leqslant\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^+}\psi_0(x)\right)\Big/(1-\rho)\equiv\varkappa,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{39}$$

Убедимся, что при произвольном $\gamma\in\Delta$ функция $\varphi_\gamma(x)\equiv\gamma\varphi(x)$ (где $\varphi(x)$ — решение уравнения (12), а Δ задается согласно (8)) удовлетворяет неравенству

$$\varphi_\gamma(x)\geqslant\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{40}$$

Действительно, поскольку $\varphi(x)\geqslant1$ (см. формулу (33)), то, учитывая (8) и тот факт, что $\delta=\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^+}\psi(x)$, будем иметь

$$\varphi_\gamma(x)\geqslant\gamma\geqslant\max(\delta,\gamma_0)\geqslant\delta\geqslant\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{41}$$

2.5. Некоторые обобщения однородных и неоднородных уравнений (12) **и** (34)**.** Рассмотрим функцию

$$\lambda_\gamma(x)=1-\frac{\overset{\circ}{\omega}(x+\varphi_\gamma(x))}{\varphi_\gamma(x)},\quad x\in\mathbb{R}^+,\ \gamma\in\Delta. \tag{42}$$

Из определения множества Δ вытекают следующие легко проверяемые свойства функции $\lambda_\gamma(x)$:

$$0<1-\frac{\overset{\circ}{\omega}(\gamma_0)}{\gamma_0}\leqslant\lambda_\gamma(x)\leqslant1,\quad x\in\mathbb{R}^+,\ \gamma\in\Delta, \tag{43}$$

$$\lim_{x\to\infty}\lambda_\gamma(x)=1,\ \text{причем равномерно по }\gamma. \tag{44}$$

Теперь рассмотрим следующее интегральное уравнение Вольтерра:

$$\tilde{\psi}^\gamma(x)=2\,\overset{\circ}{\omega}(x+\varphi_\gamma(x))+\lambda_\gamma(x)\int\limits_x^\infty V(x,t)\tilde{\psi}^\gamma(t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{45}$$

относительно искомой функции $\tilde{\psi}^\gamma(x)$. Поскольку

$$\overset{\circ}{\omega}(x+\varphi_\gamma(x))\leqslant\overset{\circ}{\omega}(x+\gamma)\leqslant\overset{\circ}{\omega}(x+\gamma_0)\leqslant\overset{\circ}{\omega}(x+A), \tag{46}$$

то для уравнения (45), рассматривая простые итерации

$$\tilde{\psi}_{n+1}^{\gamma}(x) = 2\overset{\circ}{\omega}(x+\varphi_\gamma(x)) + \lambda_\gamma(x)\int\limits_x^\infty V(x,t)\tilde{\psi}_n^{\gamma}(t)\,dt, \quad \tilde{\psi}_0^{\gamma}(x)\equiv 0,\ n=0,1,2,\dots, \tag{47}$$

и учитывая (43), (46), легко можно убедиться, что существует

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\psi}_n^{\gamma}(x) = \tilde{\psi}^{\gamma}(x) \leqslant \psi(x), \quad \gamma\in\Delta,\ x\in\mathbb{R}^+, \tag{48}$$

причем предельная функция $\tilde{\psi}^{\gamma}(x)$ по теореме Б. Леви [5] будет удовлетворять уравнению (45). Заметим, что

$$\overset{\circ}{Y}_\gamma(x) \equiv 2\varphi_\gamma(x) - \tilde{\psi}^{\gamma}(x), \quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{49}$$

удовлетворяет однородному уравнению

$$Y_\gamma(x) = \lambda_\gamma(x)\int\limits_x^\infty V(x,t)Y_\gamma(t)\,dt, \quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{50}$$

Кроме того, так как $\varphi_\gamma(x)\geqslant\psi(x)$, то с учетом (48) имеем

$$\overset{\circ}{Y}_\gamma(x) \geqslant \varphi_\gamma(x), \quad \gamma\in\Delta,\ x\in\mathbb{R}^+. \tag{51}$$

С помощью последовательных приближений

$$Y_{n+1}^{\gamma}(x) = \lambda_\gamma(x)\int\limits_x^\infty V(x,t)Y_n^{\gamma}(t)\,dt, \quad Y_0^{\gamma}(x)\equiv 2\varphi_\gamma(x),\ n=0,1,2,\dots,\ x\in\mathbb{R}^+, \tag{52}$$

можно убедиться, что

$$Y_n^{\gamma}(x)\downarrow \text{ по } n, \quad Y_n^{\gamma}(x)\geqslant \overset{\circ}{Y}_\gamma(x), \quad n=0,1,2,\dots, \tag{53}$$

$$Y_n^{\gamma}(x) \leqslant 2\lambda_\gamma(x)\varphi_\gamma(x), \quad n=1,2,3,\dots \tag{54}$$

Следовательно, существует предел последовательности $\{Y_n^{\gamma}(x)\}_0^\infty$ почти всюду на $(0,+\infty)$:

$$\lim_{n\to\infty}Y_n^{\gamma}(x)\equiv Y_\gamma(x),$$

и этот предел удовлетворяет уравнению (50). Более того,

$$\varphi_\gamma(x)\leqslant \overset{\circ}{Y}_\gamma(x)\leqslant Y_\gamma(x)\leqslant 2\lambda_\gamma(x)\varphi_\gamma(x), \quad x\in\mathbb{R}^+,\ \gamma\in\Delta. \tag{55}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что тогда функция

$$\mathscr{L}^{\gamma}(x) = \frac{Y_\gamma(x)}{\lambda_\gamma(x)} > 0 \tag{56}$$

удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{L}^{\gamma}(x) = \int\limits_x^\infty V(x,t)\lambda_\gamma(t)\mathscr{L}^{\gamma}(t)\,dt, \quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{57}$$

и цепочке неравенств:

$$A \leqslant \gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant \varphi_\gamma(x) \leqslant \overset{\circ}{Y}_\gamma(x) \leqslant Y_\gamma(x) \leqslant \mathscr{L}^\gamma(x) \leqslant 2\varphi_\gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \ \gamma \in \Delta. \tag{58}$$

2.6. Решение основного уравнения (1)**.** Введем в рассмотрение следующие последовательные приближения:

$$\begin{gathered} f_{n+1}^\gamma(x) = \int\limits_x^\infty V(x,t)\big(f_n^\gamma(t) - \omega(t, f_n^\gamma(t))\big)\,dt, \\ f_0^\gamma(x) = 2\varphi_\gamma(x), \quad n = 0,1,2,\ldots, \ \gamma \in \Delta, \ x \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{59}$$

Индукцией по n доказываются следующие факты:

$$f_n^\gamma(x) \downarrow \ \text{по}\, n, \ \gamma \in \Delta, \tag{60}$$

$$\text{если} \ \ \gamma_1, \gamma_2 \in \Delta, \ \gamma_1 > \gamma_2, \ \text{то} \ \ f_n^{\gamma_1} - f_n^{\gamma_2} \geqslant 2(\gamma_1 - \gamma_2)\varphi, \tag{61}$$

$$f_n^\gamma(x) \geqslant \mathscr{L}^\gamma(x), \quad n = 0,1,2,\ldots, \ \gamma \in \Delta, \ x \in \mathbb{R}^+. \tag{62}$$

Сперва докажем (62). В случае $n = 0$ неравенство (62) очевидно, ибо справедлива формула (58). Пусть $f_\gamma^n(x) \geqslant \mathscr{L}^\gamma(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая (a), (c), (58) и (59), будем иметь

$$\begin{gathered} f_{n+1}^\gamma(x) \geqslant \int\limits_x^\infty V(x,t)\big(\mathscr{L}^\gamma(t) - \omega(t, \mathscr{L}^\gamma(t))\big)\,dt \geqslant \int\limits_x^\infty V(x,t)\big(\mathscr{L}^\gamma(t) - \overset{\circ}{\omega}(t + \mathscr{L}^\gamma(t))\big)\,dt \\ \geqslant \int\limits_x^\infty V(x,t)\big(\mathscr{L}^\gamma(t) - \overset{\circ}{\omega}(t + \varphi_\gamma(t))\big)\,dt = \int\limits_x^\infty V(x,t)\big(\mathscr{L}^\gamma(t) - (1 - \lambda_\gamma(t))\varphi_\gamma(t)\big)\,dt \\ \geqslant \int\limits_x^\infty V(x,t)\big(\mathscr{L}^\gamma(t) - (1 - \lambda_\gamma(t))\mathscr{L}^\gamma(t)\big)\,dt = \mathscr{L}^\gamma(x). \end{gathered}$$

Теперь докажем (60). Так как $\omega(t, \varphi_\gamma(t)) \geqslant \omega(t, A) \geqslant 0$, то из (59) получим

$$f_1^\gamma(x) = \int\limits_x^\infty V(x,t)\big(2\varphi_\gamma(t) - \omega(t, \varphi_\gamma(t))\big)\,dt \leqslant 2\varphi_\gamma(x) = f_0^\gamma(x).$$

Предполагая, что $f_n^\gamma(x) \leqslant f_{n-1}^\gamma(x)$, с учетом ($a$), (62) и $f_n^\gamma(x) \geqslant \mathscr{L}_\gamma(x) \geqslant A$ в (59) будем иметь

$$f_{n+1}^\gamma(x) \leqslant \int\limits_x^\infty V(x,t)\big(f_{n-1}^\gamma(t) - \omega(t, f_{n-1}^\gamma(t))\big)\,dt = f_n^\gamma(x).$$

Индукцией по n убедимся в достоверности (61). При $n = 0$ это неравенство обращается в равенство. Предположим, что (61) верно в случае $n = p$ и докажем его для $n = p + 1$.

Имеем

$$\begin{gathered} f_{p+1}^{\gamma_1}(x) - f_{p+1}^{\gamma_2}(x) = \int\limits_x^\infty V(x,t)\big(f_p^{\gamma_1}(t) - f_p^{\gamma_2}(t)\big)\,dt \\ + \int\limits_x^\infty V(x,t)\big(\omega(t, f_p^{\gamma_2}(t)) - \omega(t, f_p^{\gamma_1}(t))\big)\,dt \geqslant 2(\gamma_1 - \gamma_2)\varphi(x). \end{gathered}$$

Таким образом, последовательность $\{f_n^\gamma(x)\}_0^\infty$ имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n^\gamma(x) \equiv f^\gamma(x) \leqslant 2\varphi_\gamma(x), \tag{63}$$

почти всюду в $(0,+\infty)$, причем

$$f^\gamma(x) \geqslant \overset{\circ}{Y}_\gamma(x) \geqslant \varphi_\gamma(x), \quad x\in\mathbb{R}^+,\ \gamma\in\Delta. \tag{64}$$

Используя (b) и теорему Б. Леви, нетрудно убедиться, что $f^\gamma(x)$ — удовлетворяет уравнению (1). В (61), переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$f^{\gamma_1}(x) - f^{\gamma_2}(x) \geqslant 2(\gamma_1-\gamma_2)\varphi(x) \geqslant 2(\gamma_1-\gamma_2),$$

ибо $\varphi(x)\geqslant 1$. Поскольку $f^\gamma(x)\geqslant 2\varphi_\gamma(x)-\tilde{\psi}^\gamma(x)\geqslant 2\varphi_\gamma(x)-\psi(x)$, то для каждой функции $f^\gamma(x)$ получаем следующую двойную оценку:

$$2\gamma-\varkappa \leqslant f^\gamma(x) \leqslant \frac{2\gamma}{1-\rho},$$

где $\varkappa$ — задается посредством (39). Теорема доказана.

В конце работы приведем примеры функций $\alpha(t,s)$ и $\omega(t,\tau)$, $t\in\mathbb{R}^+$, $s\in[a,b)$, $\tau\in\mathbb{R}^+$.

a) В качестве функции $\alpha(t,s)$ можно рассматривать следующий класс функций: $\alpha(t,s)=\beta+q(t,s)$, $(t,s)\in\mathbb{R}^+\times[a,b)$, где $0\leqslant q(t,s)$ — некоторая измеримая функция, для которой

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(t,s)\in\mathbb{R}^+\times[a,b)} q(t,s) < \beta.$$

b) Рассмотрим следующий класс функций: $\omega(t,\tau)=\eta(\tau)\,\overset{\circ}{\omega}(t+\tau)$, $(t,\tau)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$, где $\eta(\tau)$ — определенная на $\mathbb{R}$ измеримая функция, причем $\eta(0)=0$, $0\leqslant\eta(\tau)\leqslant 1$, $\tau\in[A,+\infty)$, $\eta\in C[A,+\infty)$ и $\eta(\tau)\downarrow$ по τ на $[A,+\infty)$.

Авторы выражают благодарность Н. Б. Енгибаряну за обсуждения, а также рецензенту за полезные замечания.

Литература

1. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана.—М.: Мир, 1978.—495 с.
2. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа.—М.: Наука, 1967.—440 с.
3. *Енгибарян Н. Б., Хачатрян А. Х.* Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа // Мат. моделирование.—2004.—Т. 16, № 1.—С. 67–74.
4. *Хачатрян Х. А.* Оценки решения одного интегрального уравнения типа Вольтерра // Ученые Записки ЕрГу. Математика.—2003.—№ 1.—С. 21–26.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин В. С.* Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1981.—544 с.

Статья поступила 20 января 2011 г.

Хачатрян Хачатур Агавардович
Институт математики НАН Армении,
старший научный сотрудник отдела методов математической физики
АРМЕНИЯ, 375019, Ереван, пр-т Маршала Баграмяна, 24Б
E-mail: Khach82@rambler.ru

Григорян Сурен Аршавирович
Государственный аграрный университет Армении,
ассистент кафедры высшей математики и теоретической механики
АРМЕНИЯ, 375009, Ереван, ул. Теряна, 74
E-mail: sagrigoryan@rambler.ru

ON NONTRIVIAL SOLVABILITY OF A NONLINEAR HAMMERSTEIN–VOLTERRA TYPE INTEGRAL EQUATION

Khachatryan Kh. A., Grigoryan S. A.

The existence is studied of one parametric family of positive bounded solutions for a class of Hammerstein–Volterra type nonlinear homogeneous integral equations. This class of equations has important applications in the kinetic theory of gases.

Key words: Hammerstein–Volterra type equation, factorization, iterative approximation, kernel.