Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 1, С. 64–66

УДК **517.537**

ЗАМЕЧАНИЯ О НУЛЯХ ОДНОГО КЛАССА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю. Ф. Коробейник

В работе показывается, что метод статьи [1] можно распространить и на один не исследованный в этой статье случай, если на гладкость функции наложить дополнительные ограничения.

Ключевые слова: нули гармонических функций.

Настоящая заметка продолжает исследование, проведенное в [1], и использует ее обозначения и результаты. Напомним некоторые из них. Пусть $s \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ и M_s — класс всех отображений $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, непрерывных на $[1, +\infty)$ вместе со своими производными до порядка s включительно и таких, что $\overline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{\ln|f^{(j)}(x)|}{\ln x} < -\frac{1}{2}$ при $j = 0, 1, \dots, s$.

Если $f \in M_0$, то функция

$$F_f(z) := \frac{1}{z^2 - 1/4} + \int\limits_1^{\infty} f(x)x^{-3/4} \operatorname{ch}\left(\frac{z}{2}\ln x\right) dx$$

аналитична в полосе $\Pi := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}\}$; кроме того, она имеет простые полюсы в точках $z = \pm\frac{1}{2}$ и регулярна в достаточно малой окрестности любой из остальных точек границы Π. Пусть еще Π_0 — полуполоса $0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$, $0 < \operatorname{Im} z < +\infty$ и $\operatorname{Im} F_f$ — мнимая часть F_f.

Справедлива

Теорема 1 [1][1]**.** *Если $f \in M_0$, то функция F_f не имеет нулей в Π_0 тогда и только тогда, когда*

$$\nu(\lambda) := \lambda(1 + \lambda^2) \int\limits_0^{\infty} h(t) \sin \lambda t \, dt \leqslant 1, \quad \lambda \in [0, +\infty), \tag{1}$$

где $h(t) := f(e^{2t})(e^t - 1)$.

Проверка выполнения условия (1) проведена в [1] при дополнительном предположении о том, что $f \in M_3$. Именно, если $h''(0) < -1$, то согласно [1] условие (1) не выполняется, и потому $\operatorname{Im} F_f$ имеет нули в Π_0; при этом множество всех ее нулей в Π_0 бесконечно и, более того, имеет мощность континуума. Если же $h''(0) > -1$, то

$$(\exists\, q \in (0, 1))\, (\exists\, \lambda_1 = \lambda_1(q) \in (0, +\infty)) \quad \nu(\lambda) < q \quad (\forall\, \lambda > \lambda_1). \tag{2}$$

[1] Заметим, что определение $\nu(\lambda)$ в [1, с. 54, третья строка сверху] набрано неверно, а именно, пропущен множитель $\sin \lambda t$ под знаком интеграла. Кроме того, начиная с формулировки теоремы 1 на с. 52 статьи [1] и до конца этой статьи вместо Π всюду должно быть Π_0.

Пусть, как в [1], λ_0 — единственный положительный корень (неполного) кубического уравнения $x(1+x^2)\int_0^\infty |h(t)|\,dt = 1$. Значение λ_0 можно определить по известной формуле Кардано или же вычислить приближенно с любой степенью точности. Ясно, что $\nu(\lambda) < 1$ при любых $\lambda \in [0, \lambda_0)$. Если $\lambda_0 \geqslant \lambda_1$, то условие (1) имеет место при всех λ из $[0, +\infty)$, и по теореме 1 $\operatorname{Im} F_f$ не имеет нулей в Π_0. Если же $\lambda_0 < \lambda_1(q)$, то согласно [1] можно привлечь к рассмотрению величину $\gamma := \max\{\nu(\lambda) : \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]\}$, которая определяется обычными методами математического анализа. Если при этом окажется, что $\gamma \leqslant 1$, то условие (1) выполнено, и в этом случае функция F_f не имеет нулей в Π_0 по теореме 1. В случае же, когда $\gamma > 1$, условие (1) не выполняется и тогда множество нулей $\operatorname{Im} F_f$ в Π_0 непусто, бесконечно, и, более того, имеет континуальную мощность.

Последний возможный случай, когда $h''(0) = -1$, в работе [1] не исследован. Далее показано, что при дополнительных ограничениях на функцию f теорему 1 можно применить и в этом оставшемся открытым случае.

Предположим вначале, что $f \in M_5$. Тогда с помощью стандартного интегрирования по частям найдем (учитывая, что $h(0) = 0$ и $h''(0) = -1$):

$$\nu(\lambda) = 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)h^{(4)}(0) + \frac{1}{\lambda^4}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\int\limits_0^\infty h^{(5)}(t)\cos\lambda t\,dt$$
$$= 1 + \frac{1}{\lambda^2}\big[1 + h^{(4)}(0)\big] + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right).$$

Отсюда, рассуждая как в [1] заключаем, что если $h^{(4)}(0) > -1$, то условие (1) нарушено, и по теореме 1 множество всех нулей $\operatorname{Im} F_f$ в Π_0 непусто (более того, оно бесконечно и имеет мощность континуума). Если же $h^{(4)}(0) < -1$, то выполняется соотношение (2). Точно так же, как раньше, находим, что в случае, когда $\lambda_0 \geqslant \lambda_1$, $\operatorname{Im} F_f$ не имеет нулей в Π_0. Если же $\lambda_0 < \lambda_1$, то здесь решающую роль играет значение величины γ: если $\gamma < 1$, то функция $\operatorname{Im} F_f$ не имеет нулей в Π_0, а если $\gamma > 1$, то множество всех нулей $\operatorname{Im} F_f$ в Π_0 непусто (более того, оно бесконечно и имеет мощность континуума). Наконец, если $h^{(4)}(0) = -1$, то приходится накладывать новые ограничения на гладкость функции f.

В общем случае, если $l \geqslant 1$, $f \in M_{2l+1}$ и хотя бы при одном $s \leqslant l$ $h^{(2s)}(0) \neq -1$, то можно использовать вышеприведенные соображения, которые ничего не дают лишь, когда $h^{(2s)}(0) = -1$, $s = 0, 1, \dots l$.

В частности, если M_∞ — класс всех вещественнозначных бесконечно дифференцируемых в промежутке $[1, +\infty)$ функций f таких, что

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\ln|f^{(m)}(x)|}{\ln x} < -\frac{1}{2}$$

при любых $m \geqslant 0$, то метод статьи [1] применим ко всем функциям этого класса, у которых $h_f^\gamma = [f(e^{2t})(e^t - 1)]_{t=0}^{(2\gamma)} \neq -1$ хотя бы при одном $\gamma_0 \geqslant 1$. Например, если $f \in M_\infty$ и $h_f^{\gamma_0} > -1$, то множество всех нулей $\operatorname{Im} F_f$ в Π_0 бесконечно. Таким образом, теорема 1 неприменима лишь к весьма узкому подклассу M_∞^0 класса M_∞, а именно, к тем функциям f, у которых $h_f^{(s)} = -1$ для любого $s \in \mathbb{N}_0$.

К сожалению, есть некоторые основания полагать, что в этот исключительный класс M_∞^0 входит хорошо известная в теории дзета-функций Римана (см., например, [2, гл. 2]) функция $\omega_0(x) := \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}$. Приходится с горечью констатировать в очередной раз, что, как правило, действительность оказывается сложнее и хуже наших представлений о ней и наших ожиданий.

Литература

1. *Коробейник Ю. Ф.* О нулях одного класса гармонических функций // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, вып. 1.—С. 48–55.
2. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана.—М.: Изд-во иностр. лит., 1953.—406 с.

Статья поступила 1 декабря 2011 г.

Коробейник Юрий Федорович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
главный научный сотрудник лаб. комплексного анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
профессор каф. математического анализа
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: kor@math.rsu.ru

SOME REMARKS ON ZEROS OF ONE CLASS OF HARMONIC FUNCTIONS

Korobeinik Yu. F.

It is shown that under some additional restrictions the method of the paper [1] is applicable to a case that was left open.

Key words: zeros of harmonic functions.