Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 4, С. 40–51

УДК **517.956**

ФОРМУЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ТИПА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И. Г. Мамедов

В данной статье обоснована формула интегрирования по частям неклассического типа при исследовании задачи Гурса для псевдопараболического уравнения с негладкими коэффициентами и с доминирующей производной четвертого порядка.

Ключевые слова: Задача Гурса, дифференциальные уравнения с негладкими коэффициентами, обобщенная функция Римана, интегральное представление решения.

1. Введение

В данной статье, при некоторых условиях типа p-интегрируемости и ограниченности на коэффициенты, дано понятие обобщенной функции Римана на случай уравнений четвертого порядка и найдено интегральное представление решения задачи Гурса. Исследованы условия, при которых оператор этой задачи, вместе с оператором соответствующей сопряженной задачи нетрадиционного вида, осуществляют гомеоморфизмы между определенными парами банаховых пространств. Найдены также некоторые достаточные условия, при которых обобщенная функция Римана существует и единственна.

Многочисленные теоретические и прикладные проблемы приводят к необходимости разработки псевдопараболических уравнений, встречающихся в ряде исследований, в частности, в задачах теории фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвогрунтах, распространения импульсных лучевых волн, моделировании различных биологических процессов явлений, в теории оптимальных процессов и т. д. [1–8].

В работах [9, 10] функция Римана определяется как решение интегрального уравнения. Это более естественно, чем классический способ введения функции Римана. Дело в том, что в этом случае для определения функции Римана или для определения фундаментального решения не требуется налагать жесткие условия гладкости на коэффициенты уравнения [11, 12].

В работе изучены вопросы представления решения задачи Гурса для псевдопараболического уравнения с L_p-коэффициентами. Рассматриваемое уравнение имеет, вообще говоря, негладкие коэффициенты, и поэтому не обладает некоторым формально-сопряженным дифференциальным уравнением, имеющим определенный смысл. По этим причинам этот вопрос не может быть исследован посредством известных методов, использующие классические формулы интегрирования по частям и функций Римана или фундаментальных решений классического типа.

Поэтому в данной статье этот вопрос исследован путем нахождения одной неклассической формулы для интегрирования по частям и введении функции Римана неклассического типа.

2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$(V_{3,1}u)(x) \equiv \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{1} a_{ij}(x)D_1^i D_2^j u(x) = \varphi_{3,1}(x) \in L_p(G), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \tag{2.1}$$

при следующих начально-краевых условиях

$$\begin{cases} V_{0,0}u \equiv u(0,0) = \varphi_{0,0} \in \mathbb{R}; \\ V_{1,0}u \equiv D_1 u(0,0) = \varphi_{1,0} \in \mathbb{R}; \\ V_{2,0}u \equiv D_1^2 u(0,0) = \varphi_{2,0} \in \mathbb{R}; \\ (V_{3,0}u)(x_1) \equiv D_1^3 u(x_1, 0) = \varphi_{3,0}(x_1) \in L_p(G_1); \\ (V_{0,1}u)(x_2) \equiv D_2 u(0, x_2) = \varphi_{0,1}(x_2) \in L_p(G_2); \\ (V_{1,1}u)(x_2) \equiv D_1 D_2 u(0, x_2) = \varphi_{1,1}(x_2) \in L_p(G_2); \\ (V_{2,1}u)(x_2) \equiv D_1^2 D_2 u(0, x_2) = \varphi_{2,1}(x_2) \in L_p(G_2), \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\varphi_{i,0}$, $i = 0, 1, 2,$ — заданные постоянные, а остальные $\varphi_{i,j}$ являются заданными измеримыми функциями; $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2)$ — оператор обобщенного дифференцирования в смысле С. Л. Соболева. Кроме того, $a_{i,j}(\cdot)$ — измеримые функции на $G = G_1 \times G_2$, $G_1 = (0, h_1)$, $G_2 = (0, h_2)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$a_{i,0}(x) \in L_p(G), \quad a_{i,1}(x) \in L_{p,\infty}^{x_1,x_2}(G), \quad i = 0, 1, 2,$$
$$a_{3,0}(x) \in L_{\infty,p}^{x_1,x_2}(G), \quad a_{3,1}(x) \equiv 1.$$

При наложенных условиях решение $u(x)$ задачи (2.1)–(2.2) естественно искать в пространстве С. Л. Соболева: $W_p^{(3,1)}(G) \equiv \{u(x) : D_1^i D_2^j u(x) \in L_p(G),\ i = 0, 1, 2, 3,\ j = 0, 1\}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Норму в пространстве $W_p^{(3,1)}(G)$ будем определять равенством:

$$\|u(x)\|_{W_p(3,1)_{(G)}} = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{1} \|D_1^i D_2^j u(x)\|_{L_p(G)}.$$

3. Эквивалентное интегральное уравнение и теоремы о гомеоморфизмах

В современной теории дифференциальных уравнений особое значение имеет вопрос о выявлении классов задач, операторы которых осуществляют гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств. Такие гомеоморфизмы выявлены в работах Ю. М. Березанского и Я. А. Ройтберга [13], Ж.-Л. Лионса и Э. Мадженеса [14], В. И. Корзюка [15], С. С. Ахиева [16], Н. В. Житарашу [17], И. Г. Мамедова [18] и др. для некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными. С этой точки зрения, эта работа посвящена актуальным проблемам математической физики.

В работе [19] для общего случая показано, что условие (2.2) можно рассматривать как условие Гурса неклассического типа. По своим начально-краевым условиям задача (2.1)–(2.2) более естественна, так как в этом случае не требуется никаких дополнительных условий типа условия согласования. Поэтому задачу (2.1)–(2.2) можно рассматривать как задачу Гурса неклассического типа. Такая постановка задачи обладает рядом преимуществ:

1) она порождает гомеоморфизм между двумя банаховыми пространствами $W_p^{(3,1)}(G)$ и $E_p^{(3,1)}$;

2) ее можно рассматривать как задачу сформулированную по следам в пространстве С. Л. Соболева $W_p^{(3,1)}(G)$;

3) в этой постановке рассматриваемое уравнение является обобщением многих модельных уравнений некоторых процессов (например, обобщенного уравнения влагопереноса, телеграфного уравнения, уравнения колебания струны и т. д.).

В текущем параграфе выявлены гомеоморфизмы между определенными парами банаховых пространств при исследовании задачи Гурса для псевдопараболического уравнения с доминирующей производной четвертого порядка $D_1^3 D_2 u\,(x)$ с негладкими коэффициентами (L_p-коэффициентами) на основе сведения этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению.

Задачу (2.1), (2.2) будем исследовать при помощи интегральных представлений специального вида для функций $u\,(x) \in W_p^{(3,1)}(G)$. Для функций $u(x) \in W_p^{(3,1)}(G)$ можно найти различные интегральные представления, например, имеет место представление

$$\begin{aligned} u(x) = u(0,0) + x_1 D_1 u(0,0) + \frac{x_1^2}{2} D_1^2 u(0,0) + \frac{1}{2}\int_0^{x_1} (x_1-\tau_1)^2 D_1^3 u(\tau_1,0)\,d\tau_1 \\ + \int_0^{x_2} D_2 u(0,\tau_2)\,d\tau_2 + x_1 \int_0^{x_2} D_1 D_2 u(0,\tau_2)\,d\tau_2 + \frac{x_1^2}{2}\int_0^{x_2} D_1^2 D_2 u(0,\tau_2)\,d\tau_2 \\ + \frac{1}{2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} (x_1-\tau_1)^2 D_1^3 D_2 u(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

посредством следов $u(0,0)$, $D_1 u(0,0)$, $D_1^2 u(0,0)$, $D_1^3 u(x_1,0)$, $D_2 u(0,x_2)$, $D_1 D_2 u(0,x_2)$, $D_1^2 D_2 u(0,x_2)$ и доминирующей производной $D_1^3 D_2 u(x)$.

Формула (3.1) показывает, что функция $u \in W_p^{(3,1)}(G)$, удовлетворяющая условиям (2.2), имеет вид:

$$u(x) = g_0(x) + \iint_G R_0(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2) D_1^3 D_2 u(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2,$$

где

$$\begin{aligned} g_0\,(x) = \varphi_{0,0} + x_1\varphi_{1,0} + \frac{x_1^2}{2}\varphi_{2,0} + \frac{1}{2}\int_0^{x_1} (x_1-\tau_1)^2\,\varphi_{3,0}\,(\tau_1)\,d\tau_1 \\ + \int_0^{x_2} \varphi_{0,1}\,(\tau_2)\,d\tau_2 + x_1\int_0^{x_2} \varphi_{1,1}\,(\tau_2)\,d\tau_2 + \frac{x_1^2}{2}\int_0^{x_2} \varphi_{2,1}\,(\tau_2)\,d\tau_2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$R_0\left(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2\right)=\frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}\theta(x_1-\tau_1)\theta(x_2-\tau_2), \tag{3.3}$$

причем $\theta(z)$ — функция Хевисайда на $\mathbb{R}$, т. е.

$$\theta(z)=\begin{cases}1, & z>0;\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

Тогда после замены $u=g_0+\hat{u}$, где

$$\hat{u}(x)=\iint\limits_G R_0(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2)D_1^3D_2u(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2,$$

уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\left(V_{3,1}\hat{u}\right)(x)=\hat{T}\left(x\right), \tag{3.4}$$

где $\hat{T}=\varphi_{3,1}-V_{3,1}g_0$. Производные функции $\hat{u}$ можно записать посредством равенств

$$D_1\hat{u}(x)=\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}(x_1-\tau_1)D_1^3D_2u(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2,$$

$$D_1^2\hat{u}(x)=\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}D_1^3D_2u(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2,\quad D_1^3\hat{u}(x)=\int\limits_0^{x_2}D_1^3D_2u(x_1,\tau_2)\,d\tau_2,$$

$$D_2\hat{u}(x)=\int\limits_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}D_1^3D_2u(\tau_1,x_2)\,d\tau_1,\quad D_1D_2\hat{u}(x)=\int\limits_0^{x_1}(x_1-\tau_1)D_1^3D_2u(\tau_1,x_2)\,d\tau_1,$$

$$D_1^2D_2\hat{u}(x)=\int\limits_0^{x_1}D_1^3D_2u(\tau_1,x_2)\,d\tau_1,\quad D_1^3D_2\hat{u}(x)=D_1^3D_2u(x).$$

Теперь доминирующую производную рассмотрим как неизвестную функцию, т. е. произведем замену $D_1^3D_2u(x)=b(x)$. Тогда уравнение (3.4) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}(V_{3,1}\hat{u})(x)=(Nb)(x)\equiv b(x_1,x_2)+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}a_{0,0}(x_1,x_2)R_0(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2)b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2\\ +\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}(x_1-\tau_1)a_{1,0}(x_1,x_2)b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2\\ +\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}a_{2,0}(x_1,x_2)b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2+\int\limits_0^{x_2}a_{3,0}(x_1,x_2)b(x_1,\tau_2)\,d\tau_2\\ +\int\limits_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}a_{0,1}(x_1,x_2)b(\tau_1,x_2)\,d\tau_1+\int\limits_0^{x_1}(x_1-\tau_1)a_{1,1}(x_1,x_2)b(\tau_1,x_2)\,d\tau_1\\ +\int\limits_0^{x_1}a_{2,1}(x_1,x_2)b(\tau_1,x_2)\,d\tau_1=\hat{T}(x),\quad x=(x_1,x_2)\in G.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Оператор N уравнения (3.5) линеен. Используя условия, наложенные на коэффициенты $a_{i,j}$, можно доказать, что этот оператор является ограниченным оператором из $L_p(G)$ в $L_p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Определение 3.1. Если задача (2.1), (2.2) для любого

$$\varphi = \big(\varphi_{0,0}, \varphi_{1,0}, \varphi_{2,0}, \varphi_{3,0}, \varphi_{0,1}, \varphi_{1,1}, \varphi_{2,1}, \varphi_{3,1}\big) \in E_p^{(3,1)}$$
$$\equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times L_p(G_1) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times L_p(G)$$

имеет единственное решение $u \in W_p^{(3,1)}(G)$ такое, что

$$\|u\|_{W_p^{(3,1)}(G)} \leqslant M_1 \|\varphi\|_{E_p^{(3,1)}},$$

то будем говорить, что оператор $V = (V_{0,0}, V_{1,0}, V_{2,0}, V_{3,0}, V_{0,1}, V_{1,1}, V_{2,1}, V_{3,1})$ задачи (2.1), (2.2) задает гомеоморфизм из $W_p^{(3,1)}(G)$ на $E_p^{(3,1)}$ или задача (2.1), (2.2) везде корректно разрешима. Здесь M_1 — постоянная, не зависящая от φ.

Очевидно, что если оператор V задачи (2.1), (2.2) задает гомеоморфизм из $W_p^{(3,1)}(G)$ на $E_p^{(3,1)}$, то существует ограниченный обратный оператор

$$V^{-1} : E_p^{(3,1)} \to W_p^{(3,1)}(G).$$

Оператор N является вольтерровым оператором относительно точки $(0,0)$. Это означает, что если функции $b_1, b_2 \in L_p(G)$ в области $G_{(x_1,x_2)} = (0,x_1) \times (0,x_2)$ удовлетворяют условию $b_1(\tau_1,\tau_2) = b_2(\tau_1,\tau_2)$, то выполняется также условие

$$(Nb_1)(\tau_1,\tau_2) = (Nb_2)(\tau_1,\tau_2)$$

почти для всех $(\tau_1,\tau_2) \in G_{(x_1,x_2)}$, где $(x_1,x_2) \in G$ произвольная точка.

Используя вольтерровость оператора N, при помощи, например, метода последовательных приближений можно доказать, что уравнение (3.5) для любой правой части $\hat{T}(x) \in L_p(G)$ имеет единственное решение $b \in L_p(G)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и это решение удовлетворяет условию

$$\|b\|_{L_{p(G)}} \leqslant M_2 \|\hat{T}\|_{L_{p(G)}},$$

где M_2 — постоянная, не зависящая от $\hat{T}$. Далее, очевидно, что если $\varphi_{3,1} \in L_p(G)$, то $\hat{T} \in L_p(G)$. Кроме того, если $b \in L_p(G)$ есть решение уравнения (3.5), то решение задачи (2.1), (2.2) можно найти при помощи равенства

$$u(x) = g_0(x) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} b(\tau_1,\tau_2) R_0(\tau_1,, \tau_2; x_1, x_2)\, d\tau_1 d\tau_2.$$

Поэтому справедлива

Теорема 3.1. *Оператор V задачи* (2.1), (2.2) *задает гомеоморфизм из* $W_p^{(3,1)}(G)$ *на* $E_p^{(3,1)}$.

Теперь рассмотрим вопрос о построении сопряженного оператора N^* для оператора N, определяемого равенством (3.5). Оператор N действует в пространстве $L_p(G)$ и ограничен. Поэтому N имеет сопряженный оператор N^*, который действует в пространстве $L_p^*(G)$ и ограничен. Для нахождения явного вида оператора N^*, возьмем произвольную функцию $f \in L_q(G)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и рассмотрим выражение

$$f(Nb) = \iint_G \big((Nb)(x), f(x)\big)\, dx,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}$. Используя выражения (3.5) оператора N, имеем

$$
\begin{gathered}
f(Nb)=\iint\limits_{G}\Big(b(x_1,x_2)+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}a_{0,0}(x_1,x_2)R_0(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2)b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2\\
+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}(x_1-\tau_1)a_{1,0}(x_1,x_2)b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}a_{2,0}(x_1,x_2)b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2\\
+\int\limits_0^{x_2}a_{3,0}(x_1,x_2)b(x_1,\tau_2)\,d\tau_2+\int\limits_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}a_{0,1}(x_1,x_2)b(\tau_1,x_2)\,d\tau_1\\
+\int\limits_0^{x_1}(x_1-\tau_1)a_{1,1}(x_1,x_2)b(\tau_1,x_2)\,d\tau_1+\int\limits_0^{x_1}a_{2,1}(x_1,x_2)b(\tau_1,x_2)\,d\tau_1,f(x)\Big)\,dx.
\end{gathered}
$$

Меняя порядок интегрирования в нужных местах, получим

$$
\begin{gathered}
f(Nb)=\iint\limits_{G}\Bigg(b(\tau_1,\tau_2),f(\tau_1,\tau_2)+\int\limits_{\tau_1}^{h_1}\int\limits_{\tau_2}^{h_2}\frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}\,a_{0,0}(x_1,x_2)f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\
+\int\limits_{\tau_1}^{h_1}\int\limits_{\tau_2}^{h_2}(x_1-\tau_1)a_{1,0}(x_1,x_2)f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2+\int\limits_{\tau_1}^{h_1}\int\limits_{\tau_2}^{h_2}a_{2,0}(x_1,x_2)f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\
+\int\limits_{\tau_2}^{h_2}a_{3,0}(\tau_1,x_2)f(\tau_1,x_2)\,dx_2+\int\limits_{\tau_1}^{h_1}\frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}\,a_{0,1}(x_1,\tau_2)f(x_1,\tau_2)dx_1\\
+\int\limits_{\tau_1}^{h_1}(x_1-\tau_1)a_{1,1}(x_1,\tau_2)f(x_1,\tau_2)\,dx_1+\int\limits_{\tau_1}^{h_1}a_{2,1}(x_1,\tau_2)f(x_1,\tau_2)dx_1\Bigg)\,d\tau_1d\tau_2
\end{gathered}
$$

или

$$
f(Nb)=\iint\limits_{G}\Big(b(\tau_1,\tau_2),(N^*f)(\tau_1,\tau_2)\Big)\,d\tau_1d\tau_2,
$$

где

$$
\begin{gathered}
(N^*f)(\tau_1,\tau_2)=f(\tau_1,\tau_2)+\int\limits_{\tau_1}^{h_1}\int\limits_{\tau_2}^{h_2}\frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}\,a_{0,0}(x_1,x_2)f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\
+\int\limits_{\tau_1}^{h_1}\int\limits_{\tau_2}^{h_2}(x_1-\tau_1)a_{1,0}(x_1,x_2)f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2+\int\limits_{\tau_1}^{h_1}\int\limits_{\tau_2}^{h_2}a_{2,0}(x_1,x_2)f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\
+\int\limits_{\tau_2}^{h_2}a_{3,0}(\tau_1,x_2)f(\tau_1,x_2t)\,dx_2+\int\limits_{\tau_1}^{h_1}\frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}\,a_{0,1}(x_1,\tau_2)f(x_1,\tau_2)\,dx_1\\
+\int\limits_{\tau_1}^{h_1}(x_1-\tau_1)a_{1,1}(x_1,\tau_2)f(x_1,\tau_2)\,dx_1+\int\limits_{\tau_1}^{h_1}a_{2,1}(x_1,\tau_2)f(x_1,\tau_2)\,dx_1.
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$N^*f = \Psi, \tag{3.7}$$

где $\Psi \in L_q(G)$ — заданная, а $f \in L_q(G)$ — искомая функция. В дальнейшем уравнение (3.7) мы будем рассматривать в качестве сопряженного уравнения для задачи (2.1), (2.2). Очевидно, что N^* является двумерным интегральным оператором, который является вольтерровым относительно точки (h_1, h_2). Иначе говоря, если функции $f_1 \in L_q(G)$ и $f_2 \in L_q(G)$ удовлетворяют условию

$$f_1(x) = f_2(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G^{(\alpha_1,\alpha_2)} = (\alpha_1, h_1) \times (\alpha_2, h_2),$$

то для этих функций верно равенство

$$(N^*f_1)(x_1, x_2) = (N^*f_2)(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G^{(\alpha_1,\alpha_2)},$$

где точка $(\alpha_1, \alpha_2) \in G$ рассматривается как параметриальная точка. Используя это свойство оператора N^*, можно доказать, что оператор N^* имеет ограниченную обратную $K = (N^*)^{-1}$, действующую в $L_q(G)$. Этот факт можно получить также непосредственно из существования ограниченного обратного оператора $B = N^{-1}$, действующего в $L_p(G)$. Очевидно, что при этом имеет место $K = B^*$.

Заметим также, что при вышеналоженных условиях сопряженное интегральное уравнение (3.7) для любого $\Psi \in L_q(G)$ обладает единственным решением $f \in L_q(G)$. Кроме того, при этом можно найти постоянное $C > 0$ такое, что $\|f\|_{L_q(G)} \leqslant C \cdot \|\Psi\|_{L_q(G)}$, где f — решение уравнения (3.7) с правой частью Ψ.

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 3.2. *Оператор $N^* : L_q(G) \to L_q(G)$ задает гомеоморфизм.*

4. Формула интегрирования по частям неклассического типа и ее применение для нахождения интегрального представления решения задачи Гурса

Теперь рассмотрим задачу (2.1), (2.2) и поставим вопрос о нахождении формулы интегрирования по частям, посредством которого можно было бы найти интегральное представление для решения этой задачи.

До сих пор для получения интегральных представлений решений начально-краевых задач использовались формулы интегрирования по частям классического вида, связывающие дифференциальный оператор $V_{3,1}$ с его формально сопряженным дифференциальным оператором, определяемым равенством

$$\begin{aligned}(V_{3,1}^*\rho)(x) = \frac{\partial^4 \rho(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\big(a_{3,0}(x)\rho(x)\big) \\ + \sum_{i=0}^{2}(-1)^i \left[\frac{\partial^i}{\partial x_1^i}\big(a_{i,0}(x)\rho(x)\big) - \frac{\partial^{i+1}}{\partial x_1^i \partial x_2}\big(a_{i,1}(x)\rho(x)\big)\right],\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\rho(x) \in W_p^{(3,1)}(G)$.

Однако, для того чтобы оператор (4.1) имел смысл необходимо, чтобы коэффициенты $a_{i,j}(x)$ $(i + j < 4,\ i = 0, 1, 2, 3,\ j = 0, 1)$ оказались достаточно гладкими. Поэтому интегральное представление решения уравнения (2.1) до сих пор в литературе изучено только при жестких условиях на коэффициенты. Иначе говоря, если рассматриваемая задача связана с уравнением, имеющим негладкие коэффициенты, то вопрос о построении его формально сопряженной дифференциальной задачи является, вообще говоря, неразрешимой проблемой.

В данной статье вопрос об интегральном представлении решения начально-краевой задачи (2.1), (2.2) изучен в общем случае, когда коэффициенты $a_{i,j}(x)$ $(i+j<4,$ $i=0,1,2,3,$ $j=0,1)$ являются, вообще говоря, негладкими функциями. При этом мы будем использовать одну формулу интегрирования по частям неклассического типа. Для вывода этой формулы будем использовать интегральное представление (3.1) функции $u\in W_p^{(3,1)}(G)$, которое выражено посредством «начально-краевых операторов» $V_{0,0}$, $V_{1,0}$, $V_{2,0}$, $V_{3,0}$, $V_{0,1}$, $V_{1,1}$, $V_{2,1}$, а также доминирующей производной $D_1^3D_2$. Формулу (3.1) запишем в виде

$$u(x_1,x_2)=(P_1u)(x_1,x_2)+(P_2u)(x_1,x_2), \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned}(P_1u)(x_1,x_2)&=V_{0,0}u+x_1V_{1,0}u+\frac{x_1^2}{2!}V_{2,0}u+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}(x_1-\tau_1)^2(V_{3,0}u)(\tau_1)\,d\tau_1\\&+\int\limits_0^{x_2}(V_{0,1}u)(\tau_2)\,d\tau_2+x_1\int\limits_0^{x_2}(V_{1,1}u)(\tau_2)\,d\tau_2+\frac{x_1^2}{2!}\int\limits_0^{x_2}(V_{2,1}u)(\tau_2)\,d\tau_2\end{aligned} \tag{4.3}$$

и

$$(P_2u)(x_1,x_2)=\iint\limits_G R_0(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2)D_1^3D_2u(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2. \tag{4.4}$$

Операторы $P_1:W_p^{(3,1)}(G)\to W_p^{(3,1)}(G)$ и $P_2:W_p^{(3,1)}(G)\to W_p^{(3,1)}(G)$ являются линейными ограниченными операторами. Кроме того, очевидно, что

$$\operatorname{Ker}P_2=\left\{u(x)\in W_p^{(3,1)}(G)/D_1^3D_2u(x)=0\right\}.$$

Поэтому $\operatorname{Ker}P_2=\operatorname{Im}P_1$, где

$$\operatorname{Im}P_1=\Bigg\{u(x)\in W_p^{(3,1)}(G)/u(x)=\varphi_{0,0}+x_1\varphi_{1,0}+\frac{x_1^2}{2!}\varphi_{2,0}$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}(x_1-\tau_1)^2\varphi_{3,0}(\tau_1)\,d\tau_1+\int\limits_0^{x_2}\varphi_{0,1}(\tau_2)\,d\tau_2+x_1\int\limits_0^{x_2}\varphi_{1,1}(\tau_2)\,d\tau_2+\frac{x_1^2}{2}\int\limits_0^{x_2}\varphi_{2,1}(\tau_2)\,d\tau_2\Bigg\}.$$

Теперь рассмотрим выражение

$$\iint\limits_G\big((V_{3,1}u)(x),f(x)\big)\,dx,$$

где $u(x)\in W_p^{(3,1)}(G)$ и $f\in L_q(G)$.

Очевидно, что по формуле (4.2) имеет место

$$\begin{aligned}&\iint\limits_G\big((V_{3,1}u)(x),f(x)\big)\,dx\\&=\iint\limits_G\big((V_{3,1}P_1u)(x),f(x)\big)\,dx+\iint\limits_G\big((V_{3,1}P_2u)(x),f(x)\big)\,dx.\end{aligned} \tag{4.5}$$

С другой стороны, как это очевидно из (3.4), имеет место $\hat{u}(x) = (P_2 u)(x)$. Поэтому из (4.5) получим

$$\iint\limits_G \big((V_{3,1}u)(x), f(x)\big)\,dx = \iint\limits_G \big((V_{3,1}P_1 u)(x), f(x)\big)\,dx + \iint\limits_G \big((Nb)(x), f(x)\big)\,dx, \tag{4.6}$$

где N — оператор, определяемый равенством (3.5), и $b(x) = D_1^3 D_2 u(x)$. Оператор $N : L_p(G) \to L_p(G)$ имеет сопряженный оператор $N^* : L_q(G) \to L_q(G)$, который определяется равенством (3.6). Поэтому из (4.6) выводим

$$\iint\limits_G \big((V_{3,1}u)(x), f(x)\big)\,dx = \iint\limits_G \big((V_{3,1}P_1 u)(x), f(x)\big)\,dx + \iint\limits_G \big(b(x), (N^* f)(x)\big)\,dx. \tag{4.7}$$

Таким образом, из (4.7) имеем

$$\begin{gathered}\iint\limits_G ((V_{3,1}u)(x), f(x))\,dx = \iint\limits_G ((V_{3,1}P_1 u)(x), f(x))\,dx \\ + \iint\limits_G (D_1^3 D_2 u(x), (N^* f)(x))\,dx \quad (\forall\, u(x) \in W_p^{(3,1)}(G),\ f(x) \in L_q(G)).\end{gathered} \tag{4.8}$$

Итак, доказана следующая

Теорема 4.1. *Пусть $u \in W_p^{(3,1)}(G)$ и $f \in L_q(G)$ — произвольные функции. Тогда справедлива формула* (4.8).

Формула (4.8) связывает дифференциальный оператор $V_{3,1}$ с интегральным оператором N^*. Первое слагаемое в правой части этой формулы связано лишь некоторыми краевыми значениями функции u, которые определяются однозначно со значениями операторов $V_{0,0}$, $V_{1,0}$, $V_{2,0}$, $V_{3,0}$, $V_{0,1}$, $V_{1,1}$ и $V_{2,1}$ на функции $u(x)$. Если известно, что

$$\begin{gathered}V_{0,0}u = \varphi_{0,0}, \quad V_{1,0}u = \varphi_{1,0}, \quad V_{2,0}u = \varphi_{2,0}, \quad (V_{3,0}u)(x_1) = \varphi_{3,0}(x_1), \\ (V_{0,1}u)(x_2) = \varphi_{0,1}(x_2), \quad (V_{1,1}u)(x_2) = \varphi_{1,1}(x_2), \quad (V_{2,1}u)(x_2) = \varphi_{2,1}(x_2),\end{gathered}$$

то имеет место

$$\begin{gathered}(P_1 u)(x) \equiv g_0(x) = \varphi_{0,0} + x_1\varphi_{1,0} + \frac{x_1^2}{2!}\varphi_{2,0} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1} (x_1 - \tau_1)^2 \varphi_{3,0}(\tau_1)\,d\tau_1 \\ + \int\limits_0^{x_2} \varphi_{0,1}(\tau_2) d\tau_2 + x_1 \int\limits_0^{x_2} \varphi_{1,1}(\tau_2)\,d\tau_2 + \frac{x_1^2}{2!}\int\limits_0^{x_2} \varphi_{2,1}(\tau_2)\,d\tau_2.\end{gathered}$$

Формулы (4.8) можно рассматривать как неклассическую формулу интегрирования по частям. В этой формуле, в отличие от классических формул интегрирования по частям, второе слагаемое в правой части сгруппировано относительно старшей доминирующей производной.

Для нахождения интегрального представления решения задачи Гурса (2.1), (2.2) будем использовать формулы интегрирования по частям неклассического типа (4.8).

Предположим, что $u\,(x) \in W_p^{(3,1)}\,(G)$ является решением задачи (2.1), (2.2). Тогда, используя формулу (4.8), имеем

$$\iint\limits_G \big(\varphi_{3,1}(x), f(x)\big)\,dx = \iint\limits_G \big((V_{3,1}P_1 u)(x), f(x)\big)\,dx + \iint\limits_G \big(D_1^3 D_2 u(x), (N^* f)(x)\big)\,dx. \tag{4.9}$$

Для каждой фиксированной точки $(x_1, x_2) \in \bar{G}$ рассмотрим уравнение

$$(N^* f)(\tau_1, \tau_2) = R_0(\tau_1, \tau_2; x_1, x_2), \quad (\tau_1, \tau_2) \in G, \tag{4.10}$$

где функция $R_0(\tau_1, \tau_2; x_1, x_2)$ определяется равенством (3.3). Уравнение (4.10) можно рассматривать как частный случай сопряженного уравнения (3.7). Поэтому уравнение (4.10) имеет следующий раскрытый вид:

$$\begin{gathered} f(\tau_1, \tau_2) + \int\limits_{\tau_1}^{h_1}\int\limits_{\tau_2}^{h_2} \frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}\, a_{0,0}(x_1,x_2) f(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 \\ + \int\limits_{\tau_1}^{h_1}\int\limits_{\tau_2}^{h_2} (x_1-\tau_1) a_{1,0}(x_1,x_2) f(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 + \int\limits_{\tau_1}^{h_1}\int\limits_{\tau_2}^{h_2} a_{2,0}(x_1,x_2) f(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 \\ + \int\limits_{\tau_2}^{h_2} a_{3,0}(\tau_1,x_2) f(\tau_1,x_2)\, dx_2 + \int\limits_{\tau_1}^{h_1} \frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}\, a_{0,1}(x_1,\tau_2) f(x_1,\tau_2)\, dx_1 \\ + \int\limits_{\tau_1}^{h_1} (x_1-\tau_1) a_{1,1}(x_1,\tau_2) f(x_1,\tau_2)\, dx_1 + \int\limits_{\tau_1}^{h_1} a_{2,1}(x_1,\tau_2) f(x_1,\tau_2)\, dx_1 \\ = \frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}\, \theta(x_1-\tau_1)\theta(x_2-\tau_2), \quad (\tau_1,\tau_2) \in G. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Определение 4.1. Если уравнение (4.11) для любой заданной точки $(x_1, x_2) \in \bar{G}$ имеет хотя бы одно решение $f(x_1, x_2) = f(\tau_1, \tau_2; x_1, x_2) \in L_q(G)$, то это решение назовем обобщенной функцией Римана задачи Гурса (2.1), (2.2).

Теорема 4.2. *Пусть функция $f(\tau_1, \tau_2; x_1, x_2)$ является обобщенной функцией Римана задачи Гурса* (2.1), (2.2). *Тогда любое решение этой задачи имеет следующий вид*

$$\begin{gathered} u(x) = g_0(x) + \iint\limits_G \big(\varphi_{3,1}(\tau_1,\tau_2) - (V_{3,1}g_0)(\tau_1,\tau_2), f(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2)\big)\, d\tau_1 d\tau_2, \\ (x_1,x_2) \in G, \end{gathered} \tag{4.12}$$

где функция $g_0(x)$ определяется равенством (3.2).

$\lhd$ Пусть функция $u(x) \in W_p^{(3,1)}(G)$ есть решение задачи Гурса (2.1), (2.2). Тогда равенство (4.9) имеет вид

$$\begin{gathered} \iint\limits_G \big(\varphi_{3,1}(\tau_1,\tau_2), f(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2)\big)\, d\tau_1 d\tau_2 \\ = \iint\limits_G \big((V_{3,1}g_0)(\tau_1,\tau_2), f(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2)\big)\, d\tau_1 d\tau_2 \\ + \iint\limits_G \big(D_1^3 D_2 u(\tau_1,\tau_2), R_0(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2)\big)\, d\tau_1 d\tau_2, \end{gathered} \tag{4.13}$$

где $(x_1, x_2) \in \bar{G}$ рассматривается как параметриальная точка.

Используя интегральное представление (3.1) функций $u(x) \in W_p^{(3,1)}(G)$, имеем из (4.13) следующую формулу

$$\iint\limits_G \big(\varphi_{3,1}(\tau_1,\tau_2), f(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2)\big)\,d\tau_1 d\tau_2$$
$$= \iint\limits_G \big((V_{3,1}g_0)(\tau_1,\tau_2), f(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2)\big)\,d\tau_1 d\tau_2 + u(x) - g_0(x),$$

что и показывает справедливость формулы (4.12). $\triangleright$

Отметим, что из теоремы 3.2 следует, что сопряженное уравнение (3.7) для любого заданного $\psi \in L_q(G)$ имеет единственное решение $f \in L_q(G)$. Это, в частности, означает, что уравнение (4.11) для любой точки $(x_1,x_2) \in \bar{G}$ имеет единственное решение $f(\tau_1,\tau_2) = f(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2) \in L_q(G)$.

Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема 4.3. *Задача Гурса* (2.1), (2.2) *имеет единственную обобщенную функцию Римана* $f(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2)$. *При этом единственное решение* $u(x) \in W_p^{(3,1)}(G)$ *этой задачи можно найти посредством обобщенной функции Римана по формуле* (4.12).

Литература

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.
2. *Солдатов А. П., Шхануков М. Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР.—1987.—Т. 297, № 3.—С. 547–552.
3. *Водахова В. А.* Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 2.—С. 280–285.
4. *Rundell W., Stecher M.* The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equation // Proc. Amer. Math. Soc.—1979.—Vol. 76, № 2.—P. 253–257.
5. *Карсанова Ж. Т., Нахушева Ф. М.* Об одной нелокальной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Владикавк. мат. журн.—2002.—Т. 4, вып. 2.—С. 31–37.
6. *Напсо А. Ф.* Задача с внутренными условиями для псевдопараболического уравнения // Владикавк. мат. журн.—2001.—Т. 3, вып. 4.—С. 36–39.
7. *Напсо А. Ф., Канчукоев В. З.* Нелокальная задача с внутренним условием для нагруженного псевдопараболического уравнения // Владикавк. мат. журн.—2002.—Т. 4, вып. 2.—С. 44–49.
8. *Мамедов И. Г.* Условия оптимальности некоторых процессов, описываемых псевдопараболическим уравнением при нелокальных краевых условиях // Математическое и компьютерное моделирование. Сер. физ.-мат. науки.—Каменец-Подольск: Каменец-Подольский нац. ун-т.—2008.—С. 133–141.
9. *Жегалов В. И.* Трехмерный аналог задачи Гурса // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 1990.—С. 94–98.
10. *Жегалов В. И., Уткина Е. А.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика.—1999.—№ 10.—С. 73–76.
11. *Мамедов И. Г.* Фундаментальное решение задачи Коши, связанной с псевдопараболическим уравнением четвертого порядка // Журн. вычислительной математики и математической физики.—2009.—Т. 49, № 1.—С. 99–110.
12. *Мамедов И. Г.* Фундаментальное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения четвертого порядка с негладкими коэффициентами // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 1.—С. 17–32.
13. *Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач // Украинский мат. журн.—1967.—Т. 19, № 5.—С. 3–32.
14. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.—М.: Мир, 1971.—372 с.
15. *Корзюк В. И.* Граничная задача для уравнения Манжерона третьего порядка // Диф. уравнения.—1997.—Т. 33, № 12.—С. 1683–1690.

16. *Ахиев С. С.* Фундаментальные решения некоторых локальных и нелокальных краевых задач и их представления // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 271, № 2.—С. 265–269.
17. *Житарашу Н. В.* Теорема о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории модельных начальных параболических краевых задач // Мат. исследования.—Кишинев, 1986.—№ 88.—С. 40–59.
18. *Mamedov I. G.* The local boundary value problem for an integro-differential equation // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan.—2002.—Vol. 17.—P. 96–101.
19. *Мамедов И. Г.* Задача Гурса нового типа для нагруженных вольтерро-гиперболических интегро-дифференциальных векторных уравнений четвертого порядка с негладкими матричными коэффициентами // Изв. НАН Азербайджана.—2006.—Т. 26, № 2.—С. 74–79.

Статья поступила 18 февраля 2011 г.

Ильгар Гурбат оглы Мамедов
Институт Кибернетики НАН Азербайджана,
ведущий научный сотрудник
АЗЕРБАЙДЖАН, AZ 1141, Баку, ул. Ф. Агаева, 9
E-mail: ilgar-mammadov@rambler.ru

A NON-CLASSICAL FORMULA FOR INTEGRATION BY PARTS RELATED TO GOURSAT PROBLEM FOR A PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Mamedov I. G.

A formula for integration by parts of non-classical type is derived and an application to Goursat problem for the pseudoparabolic equation with non-smooth coefficients and with dominated derivatives of fourth order is find.

Key words: Goursat problem, differential equations with non-smooth coefficients, generalized Riemann function, integral representation of solution.