Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 3, С. 64–69

УДК **517.98**

МАГАРАМОВО РАСШИРЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОРТОСИММЕТРИЧНОГО БИЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Б. Б. Тасоев

В работе построено магарамово расширение положительного ортосимметричного билинейного оператора в векторных решетках.

Ключевые слова: векторная решетка, ортосимметричность, положительный билинейный оператор.

1. Введение

Настоящая работа посвящена распространению на случай ортосимметричных билинейных операторов одной конструкции, которая возникла в работах Д. Магарам начала 1950-х гг. по теории положительных операторов, см. обзор [1], а также [4, гл. 4 и 6].

Для произвольного линейного положительного оператора в векторных решетках магарамово расширение впервые было осуществлено в [2, 3] (см. также [4]), а затем было повторено в [5]. Для положительного билинейного оператора магарамово расширение можно построить по аналогичной схеме, используя линеаризацию посредством тензорного произведения $E \bar{\otimes} F$ архимедовых векторных решеток E и F [6]. Однако при этом возникает трудно обозримое расширение решетки $E \bar{\otimes} F$. Поэтому ограничимся более простым случаем положительного ортосимметричного билинейного оператора, определенного на декартовом квадрате векторной решетки. В этом случае для линеаризации можно вместо фремлиновского тензорного произведения $E \bar{\otimes} F$ использовать конструкцию квадрата векторной решетки $E^{\odot}$, введенную в [7, 9]. Желательность и возможность такого построения были указаны в [10, п. 5.5].

2. Предварительные сведения

В этом параграфе мы зафиксируем терминологию и обозначения и приведем необходимые сведения из теории ортосимметричных билинейных операторов. Более подробно этот материал изложен в [6, 8, 9]. Все векторные решетки считаются архимедовыми.

Пусть E, F и G — векторные решетки. Билинейный оператор $B : E \times F \to G$ называют: *положительным*, если $B(x, y) \geqslant 0$ для всех $0 \leqslant x \in E$ и $0 \leqslant y \in F$; *регулярным*, если его можно представить как разность двух положительных билинейных операторов; *ограниченным*, если он порядково ограниченные множества переводит в порядково ограниченные множества.

Билинейный оператор B называют *ортосимметричным,* если $|x| \wedge |y| = 0$ влечет справедливость равенства $B(x,y) = 0$ для всех $x, y \in E$. Разность двух положительных ортосимметричных билинейных операторов называют *орторегулярным.* Символами $BL^{\sim}_{or}(E;G)$ и $BL^{\sim}_{o}(E;G)$ будем обозначать пространство всех орторегулярных билинейных операторов из $E \times E$ в G и пространство порядково ограниченных ортосимметричных билинейных операторов из $E \times E$ в G соответственно, упорядоченные конусом положительных операторов. Если G — K-пространство, то $BL^{\sim}_{or}(E,F;G) = BL^{\sim}_{o}(E,F;G)$ также K-пространство.

Билинейный оператор $B : E \times F \to G$ называют *решеточным биморфизмом*, если отображения $B_e : y \mapsto B(e,y)$ $(y \in F)$ и $B_f : x \mapsto B(x,f)$ являются решеточными гомоморфизмами для каждого $e \in E_+$ и $f \in F_+$.

Также напомним, что B называют *симметричным*, если $B(x,y) = B(y,x)$ для всех $x, y \in E$.

Теорема 2.1 [8]**.** *Любой положительный ортосимметричный билинейный оператор симметричен.*

Для любой векторной решетки E существует векторная решетка $E^{\odot}$ и решеточный биморфизм $\odot : (x,y) \mapsto x \odot y$ из $E \times E$ в $E^{\odot}$, для которых выполняется следующее универсальное свойство: для любого симметричного биморфизма B из $E \times E$ в произвольную векторную решетку F существует единственный решеточный гомоморфизм $\Phi_B : E^{\odot} \to F$ такой, что $B = \Phi_B \odot$. Пара $(E^{\odot}, \odot)$ определяется единственным образом с точностью до решеточного изоморфизма, т. е. если для некоторой векторной решетки $E^{\circledcirc}$ и симметричного решеточного биморфизма $\circledcirc : E \times E \to E^{\circledcirc}$ пара $(E^{\circledcirc}, \circledcirc)$ удовлетворяет упомянутому универсальному свойству, то существует решеточный изоморфизм ι из $E^{\odot}$ в $E^{\circledcirc}$ такой, что $\iota\odot = \circledcirc$ (и, конечно, $\iota^{-1}\circledcirc = \odot$). Векторную решетку $E^{\odot}$ или пару $(E^{\odot}, \odot)$ единственным (с точностью до изоморфизма) способом определяемую векторной решеткой E называют *квадратом* векторной решетки E. Решеточный биморфизм $\odot : E \times E \to E^{\odot}$ называют *каноническим биморфизмом.*

Теорема 2.2 [9]**.** *Пусть E — равномерно полная векторная решетка. Отображение $\iota : x \mapsto x \odot |x|$ $(x \in E)$ устанавливает ортогонально аддитивный сохраняющий модуль порядковый изоморфизм из E на $E^{\odot}$. Более того, для любого порядково ограниченного ортосимметричного билинейного оператора B из $E \times E$ со значениями в произвольной векторной решетке F формула*

$$(\Phi_B \circ \iota)(x) := B(x, |x|) \quad (x \in E)$$

определяет единственный порядково ограниченный линейный оператор Φ_B из $E^{\odot}$ в F такой, что $B = \Phi_B \circ \odot$.

Следствие 2.3 [7]**.** *Векторная решетка E равномерно полна (порядково полна, расширенное K-пространство) в том и только в том случае, если такой же является ее квадрат $E^{\odot}$.*

Пусть E, G — векторные решетки и B — положительный билинейный оператор из $E \times E$ в G. Говорят, что B *сохраняет интервалы* или *обладает свойством Магарам*, если для любых $x, y \in E_+$ и $0 \leqslant g \leqslant B(x,y) \in G_+$ существуют $0 \leqslant u \leqslant x$ и $0 \leqslant v \leqslant y$ такие, что $g = B(u,v)$, или, короче, $B([0,x] \times [0,y]) = [0, B(x,y)]$ для всех $x, y \in E_+$. Положительный порядково непрерывный билинейный оператор, обладающий свойством Магарам, называется *билинейным оператором Магарам.* Пусть ϕ — положительный билинейный оператор из $E \times E$ в G. Тогда ϕ — называется *абсолютно непрерывным относительно* B, если $B(x,y) \in \phi(x,y)^{\perp\perp}$ для всех $0 \leqslant x, y \in E$.

Рассмотрим равномерно полную векторную решетку E и порядково полную векторную решетку G. Положительный оператор $B : E \times E \to G$ называют *существенно положительным*, если $\mathscr{N}_B := \{x \in E : |B|(|x|, |x|) = 0\} = \{0\}$.

3. Основной результат

В этом параграфе построим магарамово расширение существенно положительного ортосимметричного билинейного оператора и рассмотрим некоторые его свойства.

Теорема 3.1. *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, а F — произвольное K-пространство. Для любого существенно положительного ортосимметричного билинейного оператора $B \in BL_o^{\sim}(E; F)$ существуют K-пространство $\overline{E}$, инъективный решеточный гомоморфизм j из E в $\overline{E}$ и положительный билинейный оператор Магарам $\overline{B} \in BL_o^{\sim}(\overline{E}; F)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(1) $B(x, y) = \overline{B}(jx, jy)$ $(x, y \in E)$;

(2) *порядковый идеал в $\overline{E}$, порожденный множеством $j(E)$, совпадает с $\overline{E}$;*

(3) *существует изоморфизм f-алгебр $h : \mathrm{Orth}(F) \to \mathrm{Orth}(\overline{E})$ такой, что*

$$\pi B(x, y) = \overline{B}(h(\pi)jx, h(\pi)jy) = \overline{B}(h(\pi)jx, jy) = \overline{B}(jx, h(\pi)jy)$$
$$(x, y \in E,\ \pi \in \mathrm{Orth}(F)_+);$$

(4) *E плотна в $\overline{E}$ в том смысле, что для любых $z \in \overline{E}$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существуют $z_\varepsilon \in \overline{E}$, разбиение $(\pi_\xi) \subset \mathfrak{P}(F)$ проектора $[\overline{B}(z, z)] \in \mathfrak{P}(F)$ и семейство $(x_\xi) \subset E$ такие, что*

$$\overline{B}(z_\varepsilon, |z_\varepsilon|) = o\text{-}\sum \pi_\xi \overline{B}(jx_\xi, |jx_\xi|),$$
$$|\overline{B}(z_\varepsilon, |z_\varepsilon|) - \overline{B}(z, |z|)| \leqslant \varepsilon \overline{B}(|z|, |z|).$$

$\lhd$ Пусть оператор $B \in BL_o^{\sim}(E; F)$ существенно положителен. Согласно теореме 2.2 существует единственный оператор $\Phi \in L^{\sim}(E^{\odot}, F)$ такой, что

$$B(x, y) = \Phi(x \odot y) \quad (x, y \in E). \tag{3.1}$$

В силу [11, предложение 4.4] оператор Φ существенно положителен. Применим процедуру магарамова расширения к оператору Φ (см. [4, § 3.5]): существуют K-пространство $\overline{E^{\odot}}$, инъективный решеточный гомоморфизм $\iota : E^{\odot} \to \overline{E^{\odot}}$ и оператор Магарам $\overline{\Phi} : \overline{E^{\odot}} \to F$, удовлетворяющие равенству

$$\Phi(x \odot y) = \overline{\Phi}(\iota(x \odot y)) \quad (x, y \in E). \tag{3.2}$$

Согласно [11, теорема 3.3] существует векторная решетка $\overline{E} := (\overline{E^{\odot}})^{\circ}$, квадрат которой совпадает с $\overline{E^{\odot}}$; символически, $(\overline{E})^{\odot} = \overline{E^{\odot}}$. Поэтому можем считать, что оператор $\overline{\Phi}$ определен на $(\overline{E})^{\odot}$. Как уже отмечалось в следствии 2.3, векторная решетка и ее квадрат порядково полны или нет одновременно, следовательно, $\overline{E}$ — K-пространство. Положим по определению

$$\overline{B}(x, y) := \overline{\Phi}(x \odot y) \quad (x, y \in \overline{E}), \tag{3.3}$$

где $\odot : \overline{E} \times \overline{E} \to (\overline{E})^{\odot}$ — канонический биморфизм квадрата $(\overline{E})^{\odot}$. Из [11, предложение 4.4 (4)] видно, что оператор $\overline{B} : \overline{E} \times \overline{E} \to F$ является билинейным оператором Магарам.

Доказательство упомянутой выше теоремы [11, теорема 3.3] содержит следующую дополнительную информацию: если G — равномерно полная решетка и $\iota : G \to \overline{E^{\odot}}$ —

вложение, то существует и притом единственное вложение $j : G^\circ \to \overline{E}$, удовлетворяющее условию

$$\iota(x \odot y) = j(x) \odot j(y) \quad (x, y \in G^\circ). \tag{3.4}$$

Применив это утверждение к $G := E^{\odot}$ и учитывая единственность G° с точностью до изоморфизма ($G^\circ \simeq E$), получим вложение $j : E \to \overline{E}$, удовлетворяющее (3.4) для всех $x, y \in E$. Принимая во внимание (3.1)–(3.4), для $x, y \in E$ выводим

$$\overline{B}(j(x), j(y)) = \overline{\Phi}(j(x) \odot j(y))) = \overline{\Phi}(\iota(x \odot y)) = \Phi(x \odot y) = B(x, y).$$

Ввиду того, что $\overline{E^{\odot}}$ есть идеал, порожденный множеством $\iota(E^{\odot})$, утверждение (2) следует из [11, теорема 3.4 (1)] с учетом (3.4). Для доказательства утверждения (3) воспользуемся следующим свойством оператора Магарам: существует изоморфизм η : $\mathrm{Orth}(F) \to \mathrm{Orth}((\overline{E})^{\odot})$, для которого $\pi\overline{\Phi}(x \odot y) = \overline{\Phi}(\eta(\pi)x \odot y)$ для всех $x, y \in \overline{E}$, см. [4, теорема 3.5.3]. Кроме того, в силу [11, теорема 3.4 (6)] существует изоморфизм λ из $\mathrm{Orth}((\overline{E})^{\odot})$ на $\mathrm{Orth}(\overline{E})$ такой, что $\pi(x \odot y) = (\lambda(\pi)x) \odot y = x \odot (\lambda(\pi)y)$.

Очевидно, что $h := \lambda \circ \eta$ — изоморфизм из $\mathrm{Orth}(F)$ в $\mathrm{Orth}(\overline{E})$, и в силу (3.4) для всех $\pi \in \mathrm{Orth}(F)_+$ и $x \in E_+$ получим

$$\begin{aligned} \pi B(x, x) &= \pi\Phi(x \odot x) = \overline{\Phi}(\eta(\pi)\iota(x \odot x)) \\ &= \overline{\Phi}(\eta(\pi)j(x) \odot j(x)) = \overline{\Phi}((h(\pi)jx) \odot jx) = \overline{B}(h(\pi)jx), jx). \end{aligned}$$

Требуемое в (3) вытекает теперь из представления $B(x, y) = \frac{1}{2}(B(x+y, x+y) - B(x, x) - B(y, y))$. Плотность E в указанном в (4) смысле вытекает из свойства [4, § 3.5.2 (3)], теоремы 2.2 и формулы (3.4). $\rhd$

Теорема 3.2. *Пусть E, $\overline{E}$, F, B, $\overline{B}$ и j — те же, что и в теореме* 3.1. *Для каждого оператора $D \in \{B\}^{\perp\perp} \subset BL_o^{\sim}(E; F)$ существует единственный оператор $\overline{D} \in \{\overline{B}\}^{\perp\perp} \subset BL_o^{\sim}(\overline{E}; F)$ такой, что $D(x, y) = \overline{D}(jx, jy)$ для всех $x, y \in E$.*

Соответствие $D \mapsto \overline{D}$ осуществляет изоморфизм K-пространств $\{B\}^{\perp\perp}$ и $\{\overline{B}\}^{\perp\perp}$.

$\lhd$ Пусть $D \in \{B\}^{\perp\perp}$. Согласно [11, теорема 3.2 (2)] существует единственный $\Phi_D \in L^{\sim}(E^{\odot}, F)$ такой, что $D = \Phi_D\odot$. В силу [4, теорема 3.5.4] найдется единственный $\overline{\Phi}_D \in \{\overline{\Phi}_B\}^{\perp\perp} \subset L^{\sim}(\overline{E^{\odot}}, F)$ такой, что $\Phi_D = \overline{\Phi}_D \circ \iota$. Согласно [11, теорема 3.2 (2)] формула $\overline{D} := \overline{\Phi}_D\odot$ определяет единственный оператор из $\{\overline{B}\}^{\perp\perp}$. Ввиду формулы (3.4) для всех $x, y \in E$ получим $D(x, y) = \overline{\Phi}_D(\iota(x \odot y)) = \overline{\Phi}_D((jx) \odot (jy)) = \overline{D}(jx, jy)$. Отсюда также следует требуемый изоморфизм. $\rhd$

Теорема 3.3. *Пусть E, $\overline{E}$, F, B, $\overline{B}$ и j — те же, что и в теореме* 3.1. *Для каждого оператора $D \in \{B\}^{\perp\perp} \subset BL_o^{\sim}(E; F)$ существует единственный ортоморфизм $\rho \in \mathrm{Orth}^{\infty}(\overline{E})$ такой, что*

$$D(x, y) = \overline{B}(\rho(jx), jy) = \overline{B}(jx, \rho(jy)) \quad (x, y \in j^{-1}(\mathscr{D}(\rho))). \tag{3.5}$$

$\lhd$ Доказательство следует из теоремы 3.2 и [11, теорема 4.6]. $\rhd$

4. Функциональное представление

Всюду далее A — непустое множество, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств и $\mathscr{N}$ — σ-идеал в $\mathscr{A}$. Пусть $M(A, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ обозначает пространство классов эквивалентности измеримых функций на A. Будем предполагать, что измеримое пространство $(A, \mathscr{A})$ имеет *счетный тип*, т. е. произвольное семейство $(A_\alpha) \subset \mathscr{A} \setminus \mathscr{N}$, удовлетворяющее условию $A_\alpha \cap A_\beta \in \mathscr{N}$ $(\alpha \neq \beta)$, не более чем счетно. В этом случае $M(A, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ — порядково полная векторная решетка. Пусть F — фундамент в $M(A, \mathscr{A}, \mathscr{N})$.

Пусть P — компактное пространство, μ — регулярная борелевская мера на P, а $L^0(P, \mu)$ — векторная решетка классов эквивалентности вещественных μ-измеримых функций на P, E — фундамент в $L^0(P, \mu)$, содержащий тождественную единицу 1_P. Для удобства обозначений элемент $e \in E$ будем отождествлять с классом эквивалентности функции $(s, t) \mapsto e(t)$ $((s, t) \in A \times P)$.

Обозначим символом $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ σ-алгебру, порожденную прямоугольниками $C \times B$, где $B \subset P$ — произвольное бэровское множество и $C \in \mathscr{A}$. Пусть $\varphi : \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to F$ — счетно аддитивная положительная мера, $L^0(A \times P, \varphi)$ — пространство классов φ-эквивалентных почти всюду конечных функций измеримых относительно σ-алгебры $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, $L^1(A \times P, \varphi)$ — подпространство φ-интегрируемых функций.

Если π — порядковый проектор в F, то для некоторого $C \in \mathscr{A}$ будет $\pi \tilde{f} = \widetilde{\chi_C f}$ $(\tilde{f} \in F)$, где $\tilde{f}$ обозначает класс эквивалентности измеримой функции f. Определим порядковый проектор $h(\pi)$ в $L^1(\varphi)$ следующим образом: если $g \in \mathscr{L}^1(\varphi)$, то $h(\pi)\tilde{g}$ — класс эквивалентности функции $(s, t) \mapsto \chi_C(s) g(s, t)$. Тогда h — булев гомоморфизм из $\mathfrak{P}(F)$ в $\mathfrak{P}(L^1(\varphi))$. Более того, мера φ насыщенна относительно h, см. определения [4, 6.1.9] и утверждения [4, 6.3.9].

Теорема 4.1. *Для произвольного порядково непрерывного положительного ортосимметричного билинейного оператора $B : E \times E \to F$ существует единственная счетно аддитивная положительная h-насыщенная мера $\varphi : \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to F$ такая, что*

$$B(x, y) = \int\limits_{A \times P} x(t) y(t)\, d\varphi(s, t) \quad (x, y \in E).$$

При этом для любого порядково ограниченного ортосимметричного билинейного оператора $D : E \times E \to F$ существует единственная (с точностью до φ-эквивалентности) φ-измеримая функция $\mathscr{K}_D$ такая, что

$$D(x, y) = \int\limits_{A \times P} \mathscr{K}_D(s, t) x(t) y(t)\, d\varphi(s, t) \quad (x, y \in E).$$

Соответствие $D \mapsto \mathscr{K}_D$ представляет собой линейный и решеточный изоморфизм из $\{B\}^{\perp\perp} \subset BL_o^\sim(E; F)$ на фундамент $L_\varphi := \{g \in L^0(A \times P, \varphi) : g \cdot \jmath(E) \subset L^1(A \times P, \varphi)\}$ в $L^0(A \times P, \varphi)$.

$\lhd$ Доказательство следует из теоремы 3.3 с учетом [11, теорема 4.4] и [4, теорема 6.3.11]. $\rhd$

Литература

1. *Maharam D.* On positive operators // Contemporary Math.—1984.—Vol. 26.—P. 263–277.
2. *Акилов Г. П., Колесников Е. В., Кусраев А. Г.* Лебегово расширение положительного оператора // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 298, № 3.—С. 521–524.
3. *Акилов Г. П., Колесников Е. В., Кусраев А. Г.* Порядково непрерывное расширение положительного оператора // Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 5.—С. 24–55.
4. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
5. *Luxemburg W. A. J., de Pagter B.* Maharam extension of positive operators and f-algebras // Positivity.—2002.—Vol. 6, № 2.—P. 147–190.
6. *Fremlin D. H* Tensor product of Archimedean vector lattices // Amer. J. Math.—1972.—Vol. 94.—P. 777–798.

7. *Buskes G., van Rooij A.* Squares of Riesz spaces // Rocky Mountain J. Math.—2001.—Vol. 31, № 1.—P. 45—56.
8. *Buskes G., van Rooij A.* Almost f-algebras: commutativity and the Cauchy–Schwarz inequality // Positivity.—2000.—Vol. 4.—P. 227—231.
9. *Buskes G., Kusraev A. G.* Representation and extension of orthoregular bilinear operators // Vladikavkaz Math. J.—2007.—Vol. 9, issue 1.—P. 16–29.
10. *Kusraev A. G.* Orthosymmetric bilinear operators.—Vladikavkaz, 2007.—34 p.—(Preprint / IAMI VSC RAS; № 1).
11. *Kusraev A. G.* A Radon–Nikodým type theorem for orthosymmetric bilinear operators // Positivity.—2010.—Vol. 14, № 2.—P. 225–238.

Статья поступила 28 марта 2011 г.

Тасоев Батрадз Ботазович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
стажер-исследователь лаб. теории операторов
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru

MAHARAM EXTENSION OF A POSITIVE ORTHOSYMMETRIC BILINEAR OPERATOR

Tasoev B. B.

Maharam extension of a positive orthosymmetric bilinear operator in vector lattices is constructed.

Key words: vector lattice, orthosymmetry, positive bilinear operator, Maharam extension.