Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 1, С. 71–77

УДК **516.642.7**

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ НУЛЕЙ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

Ш. С. Хубежты

Посвящается памяти
Глеба Павловича Акилова

Исследуется вопрос о возможности построения приближенных схем с заданным порядком точности для численного решения интегральных уравнений теории рассеяния. Указанная точность достигается с применением нулей присоединенной функции Лежандра второго рода.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, нуклон-нуклонное рассеяние, вычислительная схема, оценка погрешности.

1. Общая постановка задачи и ее актуальность

Данная работа представляет собой дальнейшее развитие и уточнение изложенных в заметках [1, 2] результатов, относящихся к численному решению известных в современной физике (см., например, [3, 4]) уравнений с фиксированной особенностью

$$T(x;x_0)+\lambda\int\limits_0^\infty \frac{K(x,y)\,T(y;x_0)}{y^2-x_0^2}\,dy = K(x,x_0) \quad (0 \leqslant x<\infty;\ 0<x_0<\infty), \tag{1.1}$$

где сингулярный интеграл рассматривается в смысле главного значения, $K(x,y)$ — заданная функция, определяемая потенциалом взаимодействия частиц. Это уравнение описывает задачу рассеяния в квантовой теории поля и называется *уравнением Липпмана — Швингера* [3]. Через решение $T(x;x_0)$ известным образом определяется искомая физическая фаза нуклон-нуклонного рассеяния. Ее вычисляют по формуле

$$\theta_0 = -\operatorname{arctg}\frac{T(x_0;x_0)}{x_0}. \tag{1.2}$$

В частности, определенный интерес представляет случай, когда

$$K(x,y)=\ln\frac{(x+y)^2+\eta^2}{(x-y)^2+\eta^2}, \tag{1.3}$$

$\lambda=\frac{2}{\pi}$ и $\eta=0{,}7$. Этот случай соответствует однопионно-обменному потенциалу Юкавы [3].

Благодаря практическому значению таких уравнений, вопрос о построении и обосновании возможно более эффективных по точности вычислительных схем для их численного решения представляет значительный интерес. Тем не менее, решение этого вопроса затрудняется, главным образом, из-за ряда характерных структурных свойств ядер (потенциалов) $K(x,y)$, обычно используемых в уравнениях вида (1.1).

К таким можно отнести, например, и сравнительно простые на первый взгляд потенциалы с выражениями вида (1.3) (потенциал Юкавы), и также потенциал Рида [3, 4]. Хотя квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности для входящих в (1.1) сингулярных интегралов могут быть построены (см. [1, 2]), обычно не приходится утверждать достаточную гладкость соответствующих подынтегральных выражений после сведения исходного интеграла к интегралу с конечными пределами.

2. Аппроксимация уравнения

Можно назвать ряд работ (см. [5–7]), относящихся к численному решению уравнений вида (1.1). В частности, в работе [5], представляя уравнение (1.1) в эквивалентной ему форме

$$T(x;x_0)+\lambda\int\limits_0^\infty \frac{K(x,y)\,T(y;x_0)-K(x,x_0)\,T(x_0;x_0)}{y^2-x_0^2}\,dy=K(x,x_0), \tag{2.1}$$

используется подстановка $y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t$, после чего к соответствующему интегралу с конечными пределами применяется квадратурная формула Гаусса. Суждение в [5] о точности полученной схемы основывается на сравнении результатов вычислений при различных числах узлов n ($n=16$, $n=24$). На основе несколько иного преобразования уравнения (2.1) в заметке [6] изложена определенная вычислительная схема Гауссовой степени точности, с определенной оценкой при этом порядка точности аппроксимации на примере потенциалов указанного вида. Там же приводятся и результаты вычислений. Далее, в [7] изложены некоторые результаты, относящиеся к вопросу обоснования схем аналогичного вида. Однако следует отметить, что если говорить о самой оценке погрешности аппроксимации, то и в [6], и в [1] получение оценки более высокого чем $O(\ln n/n)$ $(n\to\infty)$ порядка (при рассмотрении потенциалов указанной выше структуры) не оказалось возможным.

В связи с этим вопросом мы в данном разделе остановимся на определенной модификации изложенной в [1] вычислительной схемы, позволяющей получить приближение с более высоким порядком точности. Прежде чем остановиться непосредственно на самой схеме, для пояснения сути вопроса мы отметим еще раз, что окончательной целью решения уравнений вида (1.1) является вычисление так называемой фазы нуклон-нуклонного взаимодействия в точках x_0 по формуле (1.2), где $T(x_0;x_0)$ — решение уравнения (1.1). Если в рассматриваемом уравнении подразумевать $x=-1+\frac{1}{\tau^2}$ $(0<\tau\leqslant 1)$, то указанное в выражении (1.2) отношение можно представить как $\tau_0^2T(x_0;x_0)/(1-\tau_0^2)$ $(\tau_0\neq 1)$, где τ_0 — значение параметра τ, отвечающее $x=x_0$. Исходя из ряда преобразований, мы можем утверждать, что окончательное решение исходной задачи определяется через функцию $\tau^2T(x_0;x_0)$, где $T(x;x_0)$ — решение уравнения (1.1).

Действительно, после подстановки $y=c\big(-1+\frac{1}{t^2}\big)$ (c — произвольная положительная постоянная) уравнение (1.1) примет вид

$$T(x;x_0)+2\lambda c\int\limits_0^1 \frac{K(x,y)\,T(y;x_0)}{c^2(-1+\frac{1}{t^2})^2-x_0^2}\,\frac{dt}{t^3}=K(x,x_0),$$

откуда следует

$$T(x;x_0)+2\lambda c\int\limits_0^1 \frac{tK(x,y)\,T(y;x_0)}{c^2(1-t^2)^2-x_0^2t^4}\,dt=K(x,x_0).$$

Для интеграла, используя очевидное тождество

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 f(|x|)\,dx,$$

получаем

$$T(x;x_0)+\lambda c\int\limits_{-1}^1 \frac{|t|K(x,y)\,T(y;x_0)}{c^2(1-t^2)^2-x_0^2t^4}\,dt=K(x,x_0).$$

Окончательно, после нескольких элементарных преобразований получаем

$$\begin{gathered}T(x;x_0)+\frac{\lambda}{c}\Bigg(\int\limits_{-1}^1 \frac{t|t|K(x,y(t))\,T(y(t);x_0)\,dt}{\Big(t-\sqrt{\frac{c}{c+x_0}}\Big)\Big(t^2\Big(1-\frac{x_0}{c}\Big)-1\Big)}\\ -\int\limits_{-1}^1 \frac{|t|K(x,y(t))\,T(y(t);x_0)\,dt}{t^2(1-\frac{x_0}{c})-1}\Bigg)=K(x,x_0).\end{gathered}\tag{2.2}$$

Из теории квадратурных формул для сингулярных интегралов [9] известно, что квадратурные формулы

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt\approx\sum_{k=1}^n A_k\frac{\varphi(t_k)}{t_k-x},\tag{2.3}$$

когда узлы t_k $(k=1,2,\ldots,n)$ представляют собой нули многочлена Лежандра, а A_k $(k=1,2,\ldots,n)$ соответствующие коэффициенты, которые имеют наивысшую алгебраическую степень точности $2n$, если x является нулем присоединенной функции Лежандра второго рода. Используя этот факт, выберем параметр c таким образом, чтобы $\sqrt{\frac{c}{c+x_0}}$ был нулем функции Лежандра второго рода [8, § 4.6] и [6, 9], т. е. $\sqrt{\frac{c_{k_0}}{c_{k_0}+x_0}}=t_{k_0}$ $(k_0=\overline{\frac{n}{2}+1,n}$, n — четное), где $\{t_{k_0}\}$ — указанные нули. Тогда, при заданном $x_0\in(0,\infty)$ и подобранном надлежащим образом (см. ниже) k_0, выражение

$$Q_{nk_0}(T;x,x_0)=\frac{\lambda}{c_{k_0}}\sum_{\nu=1}^n A_\nu\left[\frac{1}{t_\nu-t_{k_0}}-\frac{1}{t_\nu}\right]\times\frac{K(x,y(t_\nu))t_\nu|t_\nu|T(y(t_\nu);x_0)}{t_\nu^2\Big(1-\frac{x_0}{c_{k_0}}\Big)-1}$$

будем рассматривать в качестве аппроксимирующего сингулярный интеграл в (1.1). Сообразно с этим соответствующее интегральное уравнение мы заменим приближенно функциональным уравнением вида

$$\tilde{T}(x;x_0)+Q_{nk_0}(\tilde{T};x,x_0)=K(x,x_0)\tag{2.4}$$

относительно функции $\tilde{T}(x;x_0)$.

3. Порядок функционирования приближенной схемы

Примем при данном k_0 в (2.4) $x = c_{k_0}\left(-1+\frac{1}{\tau^2}\right)$ $(0 < \tau \leqslant 1)$. Учитывая, далее, что оператор Q_{nk_0} содержит значения $\tilde{T}(y(t_\nu); x_0)$ при множителях $\tau_\nu|\tau_\nu|$ и умножая уравнение (2.4) на τ^2, с учетом $y(-t_\nu) = y(t_\nu)$ мы на основе построенного таким образом уравнения получаем систему линейных алгебраических уравнений порядка $(n/2 \times n/2)$ относительно значений функции $\tau^2\tilde{T}(c_{k_0}(-1+1/\tau^2); x_0)$. При условии, что значения $\tau^2\tilde{T}$ в узлах этой системы уже найдены, из упомянутого уравнения могут быть при любом $x = -1+\frac{1}{\tau^2}$ $(0 < \tau \leqslant 1)$ найдены функция $\tau^2\tilde{T}\left(\left(-1+\frac{1}{\tau^2}\right); x_0\right)$ и, рассматривающееся в (2.2), соответствующее значение $\tau_0^2\tilde{T}(x_0; x_0)$ $(x_0 = -1+1/\tau_0)$.

Заметим, что подобно отмеченному в [1], в качестве значений x_0 в применяемых системах уравнений целесообразно рассматривать значения $x_0 = x_{0k} = -1+1/\xi_k^2$, где $\{\xi_k\}_{k=1}^{n/2}$ — (положительные) нули полинома Чебышева степени n. При $k = k_0$ для c_{k_0} $(k_0 = n/2+1,\ldots,n)$ в [1] указана единая формула. Для вычисления же соответствующих искомых (приближенных) величин при произвольно заданных x_0 используется чебышевская интерполяция. С точки зрения получения в определенном смысле более эффективных оценок в качестве x_{0k} могут быть рассмотрены некоторые другие значения параметра x_0, также известным образом связанные с узлами Чебышева.

Отметим также, что $t_\nu \neq t_{k_0}$, так как нули функции Лежандра второго рода расположены на интервалах $(-1,t_1),(t_1,t_2),\ldots,(t_n,1)$ [8].

4. Об оценке порядка точности схемы

Выше упоминалось, что, рассматривая ряд известных вычислительных схем для уравнений (1.1), оказывается затруднительным получение оценки погрешности вообще, или, в допускающих такую возможность случаях (см. п. 2) не удается гарантировать более высокий, чем $O(\ln n/n)$ $(n \to \infty)$ порядок оценки аппроксимации. Причиной этого обычно является несостоятельность в таких схемах доказательства ограниченности производных более высокого чем первый порядок от подынтегральных выражений (плотностей сингулярных интегралов, получаемых при сведении (1.1) к уравнениям на конечном промежутке). По отношению к изложенной здесь схеме, решение этого вопроса (при использовании упомянутых выше модельных потенциалов) осуществляется в виде доказательства ограниченности выражения $\tau^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big\{K(x(\tau),y(t))t|t|\,T(y(t);x_0)\Big\}$ на множестве значений t,τ, соответствующих $x,y \in [0,+\infty)$. В доказательстве используются, в частности, асимптотические оценки $T(x;x_0) = O(1/x)$, $T'(x;x_0) = O(1/x^2)$ [6], и получаемая аналогичным же образом оценка $T''(x;x_0) = O(1/x^2)$ при $x \to +\infty$. Докажем последнее представление. Дифференцируя два раза уравнение (1.1), вопрос сводится к изучению интеграла

$$\int_0^\infty \frac{K''_{x^2}(x,y)}{y^2-x_0^2}T(y;x_0)\,dy, \tag{4.1}$$

(вторая производная правой части (1.1) $K''_{x^2}(x,x_0)$ изучается простым образом), где для потенциала Юкавы имеем

$$K'_x = 2\left(\frac{x+y}{(x+y)^2+\eta^2}+\frac{y-x}{(y-x)^2+\eta^2}\right),$$

$$K''_{x^2} = 2\left\{\frac{1}{(x+y)^2+\eta^2} - \frac{1}{(y-x)^2+\eta^2} - \frac{2(y+x)^2}{[(y+x)^2+\eta^2]^2} + \frac{2(y-x)^2}{[(y-x)^2+\eta^2]^2}\right\}. \tag{4.2}$$

Интеграл (4.1) можно представить так:

$$\left(\int\limits_0^{2x_0} + \int\limits_{2x_0}^{x/2} + \int\limits_{x/2}^{+\infty}\right) \frac{K''_{x^2}(x,y)}{y^2-x_0^2}\, T(y;x_0)\, dy \quad (x \to +\infty).$$

Оценим второй и третий интегралы. Так как для второго интеграла $x_0 < 2x_0 < y < \frac{x}{2}$, то $2 < \frac{y}{x_0}$ или $\frac{1}{2} > \frac{x_0}{y}$ и $\frac{1}{4} > \frac{x_0^2}{y^2}$. Тем самым справедливо

$$\left|\int\limits_{2x_0}^{x/2} \frac{K''_{x^2}(x,y)\, T(y;x_0)}{y^2-x_0^2}\, dy\right| = \left|\int\limits_{2x_0}^{x/2} \frac{K''_{x^2}(x,y)\, T(y;x_0)}{y^2\left(1-\frac{x_0^2}{y^2}\right)}\right| \leqslant \frac{4}{3} M_0(T) \int\limits_{2x_0}^{x/2} \frac{|K''_{x^2}(x,y)|\, dy}{y^2},$$

где $M_0(T) = \max\limits_{y\in[2x_0,x/2]} |T(x;y)|$.

С учетом выражения (4.2), на отрезке $[2x_0, x/2]$ получаем

$$\int\limits_{2x_0}^{x/2} \frac{K''_{x^2}(x,y)\, T(y;x_0)}{y^2-x_0^2}\, dy = O\Big(\frac{1}{x^2}\Big) \quad (x \to +\infty).$$

Перейдем к интегралу на отрезке $[x/2, +\infty)$. В отличие от предыдущего случая здесь мы будем пользоваться ограниченностью $K''_{x^2}(x,y)$. В данном случае соответствующий интеграл не превосходит $C_1 \int_{x/2}^{\infty} \frac{|T(y;x_0)|\, dy}{y^2(1-x_0^2/y^2)}$, $C_1 = \mathrm{const}$, который в свою очередь не превосходит $C_2 \int_{x/2}^{\infty} \frac{|T(y;x_0)|\, dy}{y^2(1-4x_0^2/x^2)}$, $C_2 = \mathrm{const}$.

Далее, используя оценку $T(y;x_0) = O\Big(\frac{1}{y}\Big)$, $y \to +\infty$ [6], окончательно придем к интегралу $\int_{x/2}^{\infty} \frac{dy}{y^2}$, который дает $O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$.

Теперь переходим к интегралу на отрезке $[0, 2x_0]$. Справедливо тождество

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2x_0} \frac{K''_{x^2}(x,y)\, T(y;x_0)}{y^2-x_0^2} dy &= K''_{x^2}(x,x_0)\, T(x_0;x_0) \int\limits_0^{2x_0} \frac{dy}{y^2-x_0^2} \\ &+ \int\limits_0^{2x_0} \frac{K''_{x^2}(x,y)\, T(y;x_0) - K''_{x^2}(x,x_0)\, T(x_0;x_0)}{y^2-x_0^2}\, dy.\end{aligned} \tag{4.3}$$

С учетом равенств

$$\frac{1}{y^2-x_0^2} = \frac{1}{2x_0}\Big(\frac{1}{y-x_0} - \frac{1}{y+x_0}\Big), \quad \int\limits_0^{2x_0} \frac{dy}{y-x_0} = 0,$$

получаем

$$\left|\int_0^{2x_0} \frac{K''_{x^2}(x,y)\,T(y;x_0) - K''_{x^2}(x,x_0)\,T(x_0;x_0)}{y^2-x_0^2}\,dy\right|$$

$$\leqslant \int_0^{2x_0} \frac{|K''_{x^2}(x,y)|\,|T(y;x_0)-T(x_0;x_0)|}{|y-x_0|(y+x_0)}\,dy$$

$$+|T(x_0;x_0)|\int_0^{2x_0} \frac{|K''_{x^2}(x,y)-K''_{x^2}(x,x_0)|\,dy}{|y-x_0|(y+x_0)} \tag{4.4}$$

$$\leqslant \Big\{C_0 \max_{0\leqslant y\leqslant 2x_0}|K''_{x^2}(x,y)| + 2x_0C_0' \max_{0\leqslant y\leqslant 2x_0}|K'''_{x^2y}(x,y)|\Big\}\,M(T),$$

где

$$M(T) = \sup|T(x,x_0)| + \sup_{x_1,x_2\in[0,2x_0]} \frac{|T(x_1;x_0)-T(x_2;x_0)|}{|x_1-x_2|^{\beta}}$$

$(0<\beta\leqslant 1,\ x_1\neq x_2)$, где C_0, C_0' — постоянные, не зависящие от x. Очевидна оценка $O(1/x^2)$ $(x\to+\infty)$ с учетом (4.2). Таким образом, окончательно получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{K''_{x^2}(x,y)T(y;x_0)}{y^2-x_0^2}\,dy = O\Big(\frac{1}{x^2}\Big) \quad (x\to+\infty).$$

Отсюда с учетом уравнения (1.1) имеем $T''(x;x_0) = O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$ $(x\to+\infty)$.

Таким образом, используя полученные оценки, можно убедиться, что выражение

$$\tau^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}(K(x(\tau),y(t))t|t|T(y(t),x_0))$$

ограничено. Тем самым, имея ввиду известные оценки точности квадратурных формул Гаусса для сингулярных интегралов, относительно погрешности изложенной схемы получаем оценку $O(\ln n/n^2)$ $(n\to\infty)$.

Литература

1. *Саникидзе Д. Г.* Применение приближенных формул для интегралов с ядром Коши для численного решения задач рассеяния // Тр. XIII междунар. симпозиума. МДОЗМФ.—Харьков–Херсон, 2007.—С. 254–257.
2. *Сеникидзе Д. Г., Хубежты Ш. С.* О вычислительной схеме повышенной точности для решения одного класса сингулярных интегральных уравнений // Тр. XIV междунар. симпозиума (МДОЗМФ-2009).—Харьков–Херсон, 2009.—Ч. 1.—С. 164–167.
3. *Браун Дж. Е., Джексон Э. Д.* Нуклон-нуклонные взаимодействия.—М.: Атомиздат, 1979.—248 с.
4. *Тейлор Дж.* Теория рассеяния.—М.: Мир, 1975.—566 с.
5. *Hartel M. I., Tabakin F.* Nuclear saturation and smoothness of nucleon-nucleon potentials // Nuclear Physics, A158.—Amsterdam, 1970.—P. 1–42.
6. *Sanikidze J.* On the Problem of quadrature approximation of one singular integral operator // Comput. Methods in Appl. Math.—2001.—Vol. 1, № 2.—P. 199–210.
7. *Саникидзе Д. Г.* О численном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений на бесконечном интервале // Диф. уравнения.—2005.—Т. 41, № 9.—С. 1280–1285.
8. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.
9. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО «Янус», 1995.—520 с.
10. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа.—М.–Л.: Физматгиз, 1962.—708 с.

Статья поступила 2 мая 2010 г.

Хубежты Шалва Соломонович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
заведующий лаб. математического моделирования
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `shalva57@rambler.ru`

THE NUMERICAL DECISION OF ONE PROBLEM OF DISPERSION WITH APPLICATION OF ZERO FUNCTIONS OF LEZHANDRA

Khubezhty Sh. S.

A question of possibility of construction of approximate schemes with the given accuracy order for numerical solution of integral equations of dispersion theory is considered.

Key words: singular integral, nucleon-nucleon dispersion, computational scheme, error estimate.