Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 4, С. 49–59

УДК **519.17+512.54**

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ $(243, 66, 9, 21)$[1]

А. А. Махнев, А. А. Токбаева

В работе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(243, 66, 9, 21)$. Эти результаты будут полезны для изучения автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(640, 243, 66, 108)$ (в таком графе окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(243, 66, 9, 21)$).

Ключевые слова: регулярный граф, группа автоморфизмов.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a. Для подмножества вершин S графа Γ через $\Gamma(S)$ обозначим $\cap_{a\in S}\big([a] - S\big)$.

Через k_a обозначим *степень вершины* a, т. е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b верно равенство $\big|[a] \cap [b]\big| = \mu$.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(640, 243, 66, 108)$, a — вершина графа Γ. Тогда Γ имеет собственные значения $k = 243$, $r = 3$, $s = -45$ и достигается равенство во втором условии Крейна

$$(s + 1)(k + s + 2rs) \leqslant (k + s)(r + 1)^2.$$

Поэтому $[a]$ является сильно регулярным графом с параметрами $(243, 66, 9, 21)$ и $\Gamma_2(a)$ является сильно регулярным графом с параметрами $(396, 135, 30, 54)$ (см. [2, теорема 8.15]). Таким образом, для исследования автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(640, 243, 66, 108)$ необходимо изучить автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(243, 66, 9, 21)$ и $(396, 135, 30, 54)$.

В работе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(243, 66, 9, 21)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-00009.

Теорема. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(243, 66, 9, 21)$, g — автоморфизм простого порядка p графа Γ, $\Omega = \mathrm{Fix}\,(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, $p = 3$ и $\alpha_1(g)$ сравнимо с 27 по модулю 54;*

(2) *Ω является одновершинным графом, $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 66$;*

(3) *Ω является m-кокликой, $m = 3t \geqslant 2$, $1 \leqslant t \leqslant 14$, $p = 3$ и $\alpha_1(g) - 9t$ сравнимо с 27 по модулю 54;*

(4) *Ω — объединение трех клик порядка 4, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 63$;*

(5) *$p = 5$ и либо*

(*i*) *Ω является $K_{4\times 2}$-подграфом, $\alpha_1(g) \in \{15, 105\}$, либо*

(*ii*) *$|\Omega| = 28$ и $\alpha_1(g) = 75$, либо*

(*iii*) *$|\Omega| = 33$ и $\alpha_1(g) = 0$, либо*

(*iv*) *$|\Omega| = 38$ и $\alpha_1(g) = 15$;*

(6) *$p = 3$, $|\Omega| = 3t$, $\alpha_1(g)/18 - (t + 3)/2$ делится на 3 и $2 \leqslant t \leqslant 24$ или $t \in \{27, 33\}$;*

(7) *$p = 2$ и либо*

(*i*) *$\alpha_1(g) = 0$, $|\Omega|$ делится на 3 и $|\Omega| \leqslant 93$, либо*

(*ii*) *$\alpha_1(g) \neq 0$, $|\Omega| \leqslant 75$ и $3 - 3t + \alpha_1(g)$ делится на 36 или $|\Omega| = 107$ и $\alpha_1(g) = 24$.*

1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ), Δ — индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин $d_1, \ldots, d_N$. Тогда $(v - N) - (kN - 2M) + \lambda M + \mu\big(\binom{N}{2} - M\big) - \sum \binom{d_i}{2} = x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i$ и $\big(\sum i x_i\big)^2 \leqslant \sum x_i \sum i^2 x_i$, где x_i — число вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.*

$\lhd$ Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma - \Delta$, получим равенства $v - N = \sum x_i$, $kN - 2M = \sum i x_i$ и $\lambda M + \mu\big(\binom{N}{2} - M\big) - \sum_{i=1}^{N} \binom{d_i}{2} = \sum \binom{i}{2} x_i$.

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим равенство из заключения леммы.

Квадратный трехчлен $\sum (i - x)^2 x_i = \sum i^2 x_i - 2x \sum i x_i + x^2 \sum x_i$ неотрицателен. Поэтому дискриминант квадратного трехчлена $\big(\sum i x_i\big)^2 - \sum x_i \sum i^2 x_i$ неположителен. $\rhd$

Покажем, что сильно регулярный граф Γ с параметрами $(243, 66, 9, 21)$ не содержит 5-клик. Пусть Δ является 5-кликой из Γ, X_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, и $x_i = |X_i|$. По лемме 1 имеем $\sum x_i = 238$, $\sum i x_i = 310$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 60$. Противоречие с тем, что $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = -12$.

Лемма 1.2. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с целыми собственными значениями, g — автоморфизм графа Γ простого порядка p и χ — характер проекции мономиального представления на подпространство размерности m собственных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого l, не кратного p и $m - \chi(g)$ делится на p.*

$\lhd$ Эта лемма следует из леммы 3 и предложения 2 [4], примененного к циклической группе $\langle g \rangle$. $\rhd$

Лемма 1.3. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(243, 66, 9, 21)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *порядок коклики в Γ не больше 44;*

(2) *если* Γ *содержит регулярный подграф* Δ *степени* d *на* w *вершинах, то* $-15 \leqslant d-(66-d)w/(243-w) \leqslant 3$, *причем в случае равенства каждая вершина из* $\Gamma-\Delta$ *смежна точно с* $(66-d)w/(243-w)$ *вершинами из* Δ;

(3) *значение характера, полученного при проектировании мономиального представления на подпространство размерности* 44, *на элементе* $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *равно* $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g)-\alpha_1(g))/18+7/2$, *и* $44-\chi_2(g)$ *делится на* p.

$\lhd$ Ввиду границы Цветковича [3] порядок коклики в Γ не больше 44.

Если Γ содержит регулярный подграф Δ степени w на w вершинах, то по лемме 1.2 из [1] имеем $-15 \leqslant d-(66-d)w/(243-w) \leqslant 3$.

По лемме 2.6 из [1] значение характера, полученного при проектировании мономиального представления на подпространство размерности 44, на элементе $g \in \mathrm{Aut}\,(\Gamma)$ равно $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g)-\alpha_1(g))/18+7/2$. По лемме 1.2 число $44-\chi_2(g)$ делится на p. $\rhd$

Лемма 1.4. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(243, 66, 9, 21)$, U — *трехвершинный подграф из* Γ, Y_i — *множество вершин из* $\Gamma-U$, *смежных точно с* i *вершинами из* U, $y_i = |Y_i|$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *для двух вершин* u, w *подграф* $\Gamma_2(u)\cap\Gamma_2(w)$ *содержит* 130 *вершин, если* u, w *не смежны,* 120 *вершин, если* u, w *смежны;*

(2) *число* y_0+y_3 *равно* 105, *если* U *является кокликой, равно* 72, *если* U *является кликой;*

(3) *число* y_0+y_3 *равно* 84, *если* U *является* 2-*путем, равно* 95, *если* U — *объединение изолированной вершины и ребра.*

$\lhd$ Для двух несмежных вершин u, w граф Γ содержит 21 вершин из $[u]\cap[w]$, по 45 вершин из $[u]-[w]$, $[w]-[u]$ и 130 вершин из $\Gamma_2(u)\cap\Gamma_2(u^g)$. Для смежных вершин u, w граф Γ содержит 9 вершин из $[u]\cap[w]$, по 56 вершин из $[u]-w^\perp$, $[w]-u^\perp$ и 120 вершин из $\Gamma_2(u)\cap\Gamma_2(u^g)$.

Если U является 3-кокликой, то Γ содержит $3(21-y_3)$ вершин из Y_2, $3(24+y_3)$ вершин из Y_1 и $105-y_3$ вершин из Y_0, поэтому $y_0+y_3 = 105$. Аналогично доказывается, что $y_0+y_3 = 72$, если U является кликой; $y_0+y_3 = 84$, если U является геодезическим 2-путем; $y_0+y_3 = 95$, если U объединение изолированной вершины и ребра. $\rhd$

2. Автоморфизмы графа с параметрами $(243, 66, 9, 21)$

До конца работы будем предполагать, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(243, 66, 9, 21)$. Пусть g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}\,(g)$.

Лемма 2.1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω — *пустой граф, то* $p=3$ *и* $\alpha_1(g) \in \{27, 81, 135, 189, 243\}$;

(2) *если* Ω *является* n-*кликой, то* $n=1$, $p=11$ *или* $p=2$ *и* $\alpha_1(g)=66$;

(3) *если* Ω *является* m-*кокликой,* $m \geqslant 2$, *то* $p=3$, $m=3t$, $3 \leqslant t \leqslant 14$ *и* $\alpha_1(g)-9t$ *сравнимо с* 27 *по модулю* 54;

(4) *если* Ω — *объединение* $l \geqslant 2$ *изолированных клик, но* Ω *не является кокликой, то* Ω — *объединение трех клик порядка* 4, $p=7$ *и* $\alpha_1(g)=63$.

$\lhd$ Пусть Ω — пустой граф. Тогда $p=3$ и по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)$ нечетно и делится на 9. Далее, $\alpha_1(g) = 9(2t+1)$ и $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/18+7/2 = -t+3$. Из леммы 1.2 следует, что t сравнимо с 1 по модулю 3.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma-\Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω, $x_i = |X_i|$.

Пусть Ω является n-кликой. Тогда $n \leqslant 4$. Если $n = 1$, то p делит 66 и 176, поэтому $p = 11$ или $p = 2$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 3$ нечетно и делится на 9, поэтому либо $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 66$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) + 6$ делится на 36. Но в случае $p = 2$ каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с вершиной из Ω, противоречие.

Если $n \geqslant 2$, то p делит 56 и 120, поэтому $p = 2$ и n нечетное число. Поэтому $n = 3$, $x_1 + x_3 = 240$ и $x_1 + 3x_3 = 3 \cdot 64 = 192$, противоречие.

Пусть Ω является m-кокликой, $m \geqslant 2$. Тогда p делит 21 и 45, поэтому $p = 3$ и $m = 3t$. Так как λ и μ делятся на 3, то для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$ число $\big|[u] \cap \Omega\big|$ делится на 3. Как и выше, получим, что $\alpha_1(g) - 9t$ сравнимо с 27 по модулю 54.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением l изолированных клик, $l \geqslant 2$. Тогда p делит 21. Если a, b — смежные вершины из Ω, то g действует без неподвижных точек на $[a] - b^{\perp}$, поэтому p делит 56. Отсюда $p = 7$ и $\big|\Omega(a) \cap [b]\big| = 2$. Если Ω содержит изолированную вершину c, то p делит 45, противоречие. Итак, Ω является объединением изолированных 4-клик и 7 делит $243 - 4l$, поэтому $2l + 1$ делится на 7.

Пусть Δ является 4-кликой из Γ, $y_i = x_i(\Delta)$. По лемме 1 имеем $\sum x_i = 239$, $\sum ix_i = 252$, $\sum \binom{i}{2}x_i = 42$ и $x_0 + \sum \binom{i-1}{2}x_i = 29$. Отсюда $l = 3$, $\chi_2(g) = (99 - \alpha_1(g))/18$ и в случае $\alpha_1(g) = 189$ число $44 - \chi_2(g)$ не делится на 7. $\rhd$

В леммах 2.2–2.4 предполагается, что Ω содержит геодезический 2-путь abc.

Лемма 2.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с* $\lambda = 9$, $\mu = 21$ *и* $|\Omega|$ *не больше* 151 (*не больше* 129, *если* $\alpha_1(g) \neq 0$)*;*

(2) *если* $p > 2$ *и* $|\Omega| > 84$, *то* $\alpha_1(g) = 0$*;*

(3) *если* $\alpha_1(g) = 0$, *то* $|\Omega|$ — *нечетное число, кратное* 3, *и* $(\alpha_0(g)/3 - 95)/2$ *делится на* p*;*

(4) *для любой вершины* $a \in \Omega$ *подграф* $[a]$ *не содержится в* Ω.

$\lhd$ Пусть Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v', k', 9, 21)$. Тогда $4(k' - 21) + 12^2 = n^2$ для некоторого натурального числа n. Отсюда $n = 14, 16$ и $k' = 34, 49$ соответственно. Но в первом случае 21 не делит $k'(k' - 10)$, а во втором Δ имеет собственные значения 2, -14 и кратность 2 равна $13 \cdot 49 \cdot 63/(21 \cdot 16)$, противоречие. Теперь утверждение (1) следует из леммы 1.4.

Пусть U — трехвершинный подграф из $u^{\langle g\rangle}$, Y_i — множество вершин из $\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i = |Y_i|$. Из леммы 1.4 следует, что $|\Omega| \leqslant 84$, если $u^{\langle g\rangle}$ содержит геодезический 2-путь, и $|\Omega| \leqslant 72$, если $u^{\langle g\rangle}$ содержит 3-клику. В случае $|\Omega| \geqslant 85$ подграф $u^{\langle g\rangle}$ не содержит геодезических 2-путей и является кокликой.

Пусть $\alpha_1(g) = 0$. Тогда по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_0(g)$ нечетно и делится на 3, а по лемме 1.3 число $(\alpha_0(g)/3 - 95)/2$ делится на p.

Пусть для некоторой вершины $a \in \Omega$ имеем $[a] \subset \Omega$. Тогда для $u \in \Gamma - \Omega$ получим $|[u] \cap \Omega| = 21$ и $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой, поэтому $\alpha_1(g) = 0$ и по утверждению (3) имеем $|\Omega| \geqslant 69$. Теперь для $b \in \Omega - a^{\perp}$ подграф $[b]$ не пересекает $\Gamma - \Omega$, поэтому $[u] \cap [b]$ содержится в Ω и совпадает с $[a] \cap [u] = [a] \cap [b]$. Противоречие с тем, что любые две вершины из $[u] \cap (\Gamma - \Omega)$ смежны с u и с 21 вершинами из $[a] \cap [b]$. $\rhd$

Лемма 2.3. *Если* $p \geqslant 3$, *то* $|\Omega| \leqslant \max\{84, 108 - p\}$. *Далее,* $p \leqslant 7$.

$\lhd$ Если $p > 21$, то Ω — сильно регулярный подграф с параметрами $(v', k', 9, 21)$, противоречие с леммой 2.2. Если $p > 7$, то Ω — подграф с $\lambda_\Omega = 9$.

Пусть $p \geqslant 3$. Если $|\Omega| > 84$, то по лемме 2.2 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой. Поэтому для любой 3-коклики U из $u^{\langle g\rangle}$ подграф $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит Ω и $p - 3$ вершин из $u^{\langle g\rangle} - U$. Значит, $|\Omega| \leqslant 105 - (p - 3)$.

Пусть $p = 19$. Тогда степень вершины в графе Ω равна 28 или 47. Если степень вершины a в графе Ω равна 47, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 9 на 47 вершинах, противоречие. Итак, Ω — реберно регулярный граф с параметрами $(v', 28, 9)$.

Пусть $|\Omega| = 53$. Если Ω содержит две несмежные вершины точно с двумя общими соседями, то $|\Omega| \geqslant 2 + 26 + 2 + 26$, противоречие. Значит, Ω — сильно регулярный граф с $\lambda' = 9$ и $\mu' = 21$, противоречие.

Если $|\Omega| = 72$, то по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)$ нечетно и делится на 9. Поэтому $\alpha_1(g) = 171$, противоречие с тем, что тогда каждая $\langle g\rangle$-орбита длины 19 является кликой. Значит, $|\Omega| = 91$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 3$ нечетно и делится на 9. Поэтому $\alpha_1(g) = 228$, противоречие.

Аналогично рассматриваются случаи $p \in \{17, 13, 11\}$. $\rhd$

Лемма 2.4. *Верно неравенство $p \neq 7$.*

$\lhd$ Пусть $p = 7$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 7t$, $20 \leqslant t \leqslant 34$. Далее, степень вершины в графе Ω равна 3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52 или 59, любое ребро графа Ω лежит в 2 или 9 треугольниках из Ω, а для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Ω имеем $\bigl|\Omega(a) \cap [b]\bigr| \in \{7, 14, 21\}$. Если Ω содержит вершину степени 3, то эта вершина лежит в изолированной 4-клике из Ω. Если $|\Omega| > 72$, то каждая $\langle g\rangle$-орбита длины 7 является кокликой или семиугольником. Ввиду леммы 2.3 имеем $|\Omega| \leqslant 96$. Пусть $U = u^{\langle g\rangle}$ — орбита длины 7, Y_i — множество вершин из $\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i = |Y_i|$, z — число $\langle g\rangle$-орбит степени 4 и z' — число семиугольных орбит.

Если $t = 34$, то Ω является 5-кликой, противоречие. Если $t = 33$, то $|\Omega| = 12$, противоречие с тем, что $|\Omega| \geqslant 2 + 7 + 2 \cdot 3$.

Пусть $t = 32$. Тогда $|\Omega| = 19$ и степень вершины в графе Ω равна 3 или 10. Если a, b — смежные вершины из Ω и $\bigl|\Omega(a) \cap [b]\bigr| = 9$, то $\Omega(a)$ содержит 2 вершины b, c степени 9 и 8-коклику E, причем любая вершина из E смежна с 7 вершинами из $\Omega - a^{\perp}$. В этом случае для различных вершин $e, e' \in E$ подграф $\Omega(e) \cap [e']$ содержит a, b, c и 6 или 7 вершин из $\Omega - a^{\perp}$, противоречие. Значит, Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(19 - 4l, 10, 2, 7)$, противоречие с тем, что тогда $|\Omega| \geqslant 21$.

Случаи $t \in \{21, \ldots, 31\}$ рассматриваются аналогично. $\rhd$

3. Автоморфизмы малых порядков

В этом параграфе предполагается, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(243, 66, 9, 21)$, g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и подграф $\Omega = \mathrm{Fix}\,(g)$ содержит геодезический 2-путь.

В леммах 3.1–3.5 предполагается, что $p = 5$.

Лемма 3.1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если некоторая орбита $u^{\langle g\rangle}$ является пятиугольником, то $|\Omega| \leqslant 84$;*

(2) *если $|\Omega| > 8$, то Ω не содержит вершин степени $|\Omega| - 2$;*

(3) *если $|\Omega| \leqslant 23$, то Ω является полным многодольным графом $K_{4\times 2}$ и $\alpha_1(g) \in \{15, 105\}$.*

$\lhd$ Пусть $|\Gamma - \Omega| = 5t$. Тогда $19 \leqslant t \leqslant 47$. Далее, степень вершины в графе Ω равна 6, 11, …, 61, любое ребро графа Ω лежит в 4 или 9 треугольниках из Ω, а для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Ω имеем $\bigl|\Omega(a) \cap [b]\bigr| \in \{1, 6, \ldots, 21\}$. Если $|\Omega| > 105$, то каждая $\langle g\rangle$-орбита длины 5 является пятиугольником. Пусть $U = u^{\langle g\rangle}$ — орбита длины 5, Y_i — множество вершин из $\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i = |Y_i|$.

Пусть $u^{\langle g\rangle}$ содержит 3-вершинный подграф U, Y_i' — множество вершин из $\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i' = |Y_i'|$. Если U является геодезическим 2-путем $u_1u_2u_3$, то по лемме 1.4 имеем $|\Omega| \leqslant 84$. Аналогично доказывается, что $|\Omega| \leqslant 95$, если U — объединение изолированной вершины и ребра. Таким образом, $|\Omega| \leqslant 84$, если некоторая орбита $u^{\langle g\rangle}$ является пятиугольником. Утверждение (1) доказано.

Если Ω содержит вершину a степени 6, то $\Omega(a)$ — октаэдр.

Если $t = 47$, то Ω является полным многодольным графом $K_{4\times 2}$, $\alpha_1(g) - 6$ нечетно и делится на 9. Поэтому $\alpha_1(g) = 15, 105$.

Если $t = 46$, то $|\Omega| = 13$ и либо Ω — регулярный граф степени 6, либо Ω содержит две вершины a, b степени 11. В первом случае окрестности вершин в Ω являются октаэдрами, противоречие. Во втором случае $\Omega(a) = \Omega(b)$ — регулярный граф степени 4 с $\mu' = 4$, противоречие.

Допустим, что Ω содержит вершину a степени $|\Omega| - 2$. Тогда каждая вершина из $\Omega(a)$ смежна с вершиной b из $\Omega - a^{\perp}$. Далее, $\Omega(b) = \Omega(a)$ — граф без 4-клик. Если $\Omega(a)$ содержит вершину c степени 4, то каждая вершина из $\Omega(a) - c^{\perp}$ смежна со всеми вершинами из $\Omega(a) \cap [c]$, поэтому $|\Omega| \leqslant 13$. Допустим, что $\Phi = \Omega(a)$ — регулярный граф степени 9. Тогда $|\Omega|$ четно. Если $\big|\Phi(c) \cap \Phi(d)\big| = 7$ для смежных вершин c, d, то $\Phi(c) \cap \Phi(d)$ является кокликой, $\Phi(c) - d^{\perp} = \{c'\}$ и $\Phi(d) - c^{\perp} = \{d'\}$. В случае $\big|[c'] \cap \Phi(c) \cap \Phi(d)\big| > 2$ подграф $\Phi(c')$ содержит d' и $\Phi(c) \cap \Phi(d)$. Далее, вершина из $\Phi(c) \cap \Phi(d)$ смежна с 5 вершинами из $\Phi - ([c] \cup [d])$, а вершина из $\Phi - \big([c] \cup [d]\big)$ смежна с 4 вершинами из $\Phi(c) \cap \Phi(d)$. Противоречие с тем, что число ребер между $\Phi - \big([c] \cup [d]\big)$ и $\Phi(c) \cap \Phi(d)$ равно 35 и кратно 4.

Значит, $[c']$ содержит 2 вершины из $\Phi(c) \cap \Phi(d)$, вершину d' и 5 вершин из $\Phi - \big([c] \cup [d]\big)$. Симметрично, $[d']$ содержит 2 вершины из $\Phi(c) \cap \Phi(d)$ и 5 вершин из $\Phi - \big([c] \cup [d]\big)$. Теперь степень вершины e в графе $\Phi(c) \cap \Phi(d)$ равна 1, если e не смежна с c', противоречие. Итак, Φ — реберно регулярный граф с $\lambda_{\Phi} = 2$ и окрестность любой вершины в Φ — девятиугольник или объединение четырехугольника и пятиугольника.

Если Φ — сильно регулярный граф с параметрами $(v', 9, 2, 4)$, то $(2-4)^2 + 4(9-4)$ не является квадратом целого числа, противоречие. Поэтому $\Phi(c) = \Phi(e)$ для различных вершин c, e из Φ. Теперь для любой вершины $d \in \Phi(c)$ подграф $\Phi(d)$ — объединение четырехугольника, содержащего c, e, и пятиугольника. Противоречие с тем, что число ребер между $\Phi - (c^{\perp} \cup e^{\perp})$ и $\Phi(c)$ равно 45 и кратно 4. Итак, в случае $|\Omega| > 8$ подграф Ω не содержит вершин степени $|\Omega| - 2$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $t = 45$. Тогда $|\Omega| = 18$ и степень любой вершины в Ω равна 6 или 11. Если Ω — регулярный граф степени 6, то он является локально полным многодольным, противоречие. Допустим, что Ω содержит смежные вершины a, c степени 11. Если $\big|\Omega(a) \cap [c]\big| = 9$, то $\Omega(a) - c^{\perp}$ содержит единственную вершину a', $\Omega(c) - a^{\perp}$ содержит единственную вершину c', и $\Omega(a') \cap [c]$ содержит a, 4 или 9 вершин из $[a]$ и вершину c'. Далее, смежная с a' вершина из $\Omega(a) \cap [c]$ смежна с c', 2 вершинами из $\Omega(a) \cap [c]$ и 5 вершинами из $\Omega - (a^{\perp} \cup c^{\perp})$. Противоречие с тем, что вершина из $\Omega - (a^{\perp} \cup c^{\perp})$ смежна с 4 или 9 вершинами из $\Omega(a)$. Значит, $\big|\Omega(a) \cap [c]\big| = 4$ и $\Omega(a) \subset a^{\perp} \cup c^{\perp}$. Для вершины e из $\Omega(a) \cap [c]$ подграф $\Omega(e)$ содержит a, c, β вершин из $\Omega(a) \cap [c]$ и $3 - \beta$ или $6 - \beta$ вершин из $\Omega(a) - c^{\perp}$, $\Omega(c) - a^{\perp}$. Отсюда $\beta = 2$ и $\Omega(a) \cap [c]$ — четырехугольник, вершины которого имеют степень 6 в Ω. Отсюда $\Omega(a) \cap [c]$ попадает в окрестность единственной вершины c^* из $\Omega(a) - c^{\perp}$ и единственной вершины a^* из $\Omega(c) - a^{\perp}$. Противоречие с тем, что подграф $\Omega(a) - \big(\{c^*\} \cup c^{\perp}\big)$ является 5-кликой.

Итак, вершины степени 11 в Ω образуют $2l$-коклику Φ. Так как вершина из $\Omega - \Phi$ смежна не более чем с 2 вершинами из Φ, то $22l \leqslant 2(18 - 2l)$ и $l = 1$. Положим $\Phi =$

$\{a, b\}$. Тогда окрестность каждой вершины из $\Omega(a) \cap [b]$ содержится в $\{a, b\} \cup \big(\Omega(a) \cap [b]\big)$, $\Omega(a) \cap [b]$ — октаэдр и $\Omega(a) - [b]$ является 5-кликой, противоречие.

Случай $t = 44$ рассматривается аналогично. $\rhd$

Лемма 3.2. *Если* $|\Omega| > 8$, *то выполняется одно из утверждений:*

(1) $|\Omega| = 28$ *и* $\alpha_1(g) = 75$*;*

(2) $|\Omega| = 33$ *и* $\alpha_1(g) = 0$*;*

(3) $|\Omega| = 38$ *и* $\alpha_1(g) = 15$*;*

(4) $|\Omega| = 43$ *и* $\alpha_1(g) = 30$.

$\lhd$ Пусть $|\Omega| > 8$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 5t$ и ввиду леммы 3.1 имеем $19 \leqslant t \leqslant 43$.

Пусть $t = 43$. Тогда $|\Omega| = 28$ и по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 3$ четно и делится на 9. Поэтому $\alpha_1(g) = 75$ и имеются 13 кокликовых $\langle g\rangle$-орбит длины 5. Если U — пятиугольник, то $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 63$. Так как $y_0 \geqslant 24$, то $y_5 \leqslant 6$. Если U — коклика, то $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 108$. Так как $y_0 \geqslant 12$, то $y_5 \leqslant 16$. Если $y_5 = 16$, то $y_0 \geqslant 17$, противоречие. Итак, $y_5 \leqslant 15$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 5, не больше $6 \cdot 30 + 15 \cdot 13 = 345$.

Случаи $t \in \{42, 41\}$ рассматриваются аналогично.

Допустим, что $t \leqslant 31$. Тогда $|\Omega| > 84$ и по лемме 2.2 в Γ нет пятиугольных $\langle g\rangle$-орбит. Отсюда $\alpha_1(g) = 0$ и $|\Omega|$ — нечетное число, кратное 3, и либо $t = 24$, $|\Omega| = 123$, либо $t = 30$, $|\Omega| = 93$.

Пусть $t = 24$ и $|\Omega| = 123$. Тогда имеются 24 кокликовых $\langle g\rangle$-орбит длины 5. Если U — коклика, то $\sum y_i = 238$, $\sum i y_i = 330$, $\sum \binom{i}{2} y_i = 10 \cdot 20 = 200$ и $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 108$. Так как $y_0 \geqslant 102$, то $y_5 \leqslant 1$. Противоречие с тем, что $y_0 \geqslant 122$.

Пусть $t = 30$ и $|\Omega| = 93$. Тогда имеются 30 кокликовых $\langle g\rangle$-орбит длины 5. Если U — коклика, то $\sum y_i = 238$, $\sum i y_i = 330$, $\sum \binom{i}{2} y_i = 10 \cdot 20 = 200$ и $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 108$. Так как $y_0 \geqslant 74$, то $6y_5 \leqslant 34$ и $y_5 \leqslant 5$. Теперь $y_0 \geqslant 88$, $6y_5 \leqslant 20$ и $y_5 \leqslant 3$. В случае $y_5 = 3$ имеем $y_0 = 90$, $y_1 + y_2 = 145$, $y_1 + 2y_2 = 315$, противоречие. Значит, число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 5, не больше $30 \cdot 2$, но не меньше 93, противоречие.

Случаи $t \in \{31, \ldots, 39\}$ рассматриваются аналогично.

Пусть $t = 40$. Тогда $|\Omega| = 43$ и по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 3$ нечетно и делится на 9. Поэтому $\alpha_1(g) = 30$ и имеются 28 кокликовых $\langle g\rangle$-орбит длины 5. $\rhd$

В леммах 3.3–3.5 предполагается, что $p = 5$, $|\Omega| = 43$ и Ψ — множество вершин степени 26 в Ω.

Лемма 3.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *число ребер между* Ω *и* $\Gamma - \Omega$, *деленное на* 5, *не больше* 384*;*

(2) Ω *не содержит вершин степеней* 36 *и* 31*;*

(3) Ψ *является* 7*-кокликой, и число вершин степени* 21 *в* Ω *не меньше* 32*;*

(4) *в* Ψ *нет таких коклик* $C = \{a, b, e\}$, *что* $\big|\Omega(a) \cap [b]\big| + \big|\Omega(b) \cap [e]\big| + \big|\Omega(a) \cap [e]\big| = 58$.

$\lhd$ Если U — пятиугольник, то $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 63$. Так как $y_0 \geqslant 34$, то $y_5 \leqslant 4$. В случае $y_5 = 4$ имеем $y_0 = 39$, $y_1 + 2y_2 = 300$, поэтому $y_1 = 90$, $y_2 = 105$.

Если U — коклика, то $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 108$. Так как $y_0 \geqslant 22$, то $y_5 \leqslant 14$, поэтому $y_0 \geqslant 29$ и $y_5 \leqslant 13$. В случае $y_5 = 13$ имеем $y_0 = 30$, $y_1 + y_2 = 195$, $y_1 + 2y_2 = 265$, $y_1 = 125$, $y_2 = 70$. Противоречие с тем, что $y_2 = 10 \cdot 8$. Итак, число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 5, не больше $12 \cdot 4 + 28 \cdot 12 = 384$. Утверждение (1) доказано.

Если Ω содержит вершину a степени 36, то Ω содержит 36 вершин степени, не большей 16, и 6 вершин степени, не большей 26. Поэтому указанное число ребер не меньше $6 + 36 \cdot 10 + 6 \cdot 8$, противоречие.

Допустим, что Ω содержит вершину a степени 31. Тогда подграф из $\Omega(a)$, состоящий из вершин, смежных с 11 вершинами из $\Omega - a^{\perp}$, является m-кокликой. Если $m \geqslant 10$, то $\Omega - a^{\perp}$ является 11-кокликой, и указанное число ребер не меньше $7 + 42 \cdot 9$, противоречие. Если же $m \leqslant 9$, то указанное число ребер не меньше $12 \cdot 7 + 22 \cdot 10 + 9 \cdot 9$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Так как $43 \cdot 9 = 387$, то Ω содержит не менее 3 вершин степени 26. Ввиду утверждения (1) число вершин степени 21 в Ω не меньше $46 - 2|\Psi|$.

Если вершины a, c из Ψ смежны, то $\Omega \subset a^{\perp} \cup c^{\perp}$ и $\Omega(a) \cap [c]$ состоит из вершин степени, не большей 16 в Ω. В этом случае Ψ содержит не менее 12 вершин. Пусть $b \in \Psi(c) - a^{\perp}$. Тогда $\Omega(b)$ содержит c, β_i вершин из $\Omega(a) \cap [c]$, $9 - \beta$ вершин из $[c] - a^{\perp}$ и 16 вершин из $[a] - c^{\perp}$, причем $\beta_i \in \{4, 9\}$. Если $e \in \Psi(a) - c^{\perp}$, то можно считать, что $[e]$ содержит $\Omega(a) \cap [c]$. В этом случае для другой вершины $e' \in \Psi(a) - c^{\perp}$ подграф $\Omega(e) \cap [e']$ содержит a, 16 вершин из $\Psi(c) - a^{\perp}$ и 4 вершины из $\Omega(a) \cap [c]$. Поэтому $\Psi(c) - a^{\perp} = \{b\}$, $\beta = 9$ и $|\Psi(a) - c^{\perp}| \geqslant 14$, противоречие с тем, что $\big|[e'] \cap (\Psi(a) - c^{\perp})\big| = 5$. Итак, можно считать, что $\Psi - \{a, c\} \subseteq \Omega(c) - [a]$. Как и выше доказывается, что $\Omega(a) \cap [c]$ содержится в окрестности не более чем одной вершины из $\Psi(c) - a^{\perp}$ и можно считать, что $\beta = 4$. Поэтому $|\Psi(c) - a^{\perp}| \geqslant 14$, противоречие с тем, что $\big|[b] \cap (\Psi(c) - a^{\perp})\big| = 5$.

Итак, подграф Ψ является кокликой. Для различных вершин $a, b \in \Psi$ подграф Ω содержит либо

а) 16 вершин из $[a] \cap [b]$, по 10 вершин из $[a] - b^{\perp}$, $[b] - a^{\perp}$ и 5 вершин вне $a^{\perp} \cup b^{\perp}$, либо

б) 21 вершин из $[a] \cap [b]$, по 5 вершин из $[a] - b^{\perp}$, $[b] - a^{\perp}$ и 10 вершин вне $a^{\perp} \cup b^{\perp}$.

Допустим, что $|\Psi| = 3$. Тогда Ψ содержит 40 вершин степени 21 и $M = 459$ ребер. Далее, число $\sum \binom{i}{2} x_i$ равно $60 \cdot 6 + 140 \cdot 66 = 9600$ и равно $\lambda M + \mu\left(\binom{N}{2} - M\right) - \sum \binom{d_i}{2} = 9 \cdot 459 + 21 \cdot 444 - 39 \cdot 25 - 40 \cdot 210 = 4131 + 9324 - 8400 - 975 = 4080$, противоречие.

Случаи $|\Psi| \in \{4, 5\}$ рассмаотриваются аналогично.

Допустим, что $|\Psi| = 6$. Тогда Ψ содержит либо 34 вершины степени 21 и 3 вершины степени 16, либо 35 вершин степени 21 и по 1 вершине степеней 11 и 16, либо 36 вершин степени 21 и 1 вершину степени 16. В первых двух случаях $M = 459$ и мы получим противоречие как и выше. Значит, $M = (36 \cdot 21 + 6 \cdot 26 + 16)/2 = 464$ и число $\sum \binom{i}{2} x_i$ равно $9 \cdot 464 + 21 \cdot 439 - 78 \cdot 25 - 36 \cdot 210 - 120 = 3765$. С другой стороны, $\Gamma - \Omega$ имеет либо пятиугольную орбиту, смежную с 2 вершинами из Ω, либо две пятиугольных орбиты, смежных с 3 вершинами из Ω, либо кокликовую орбиту, смежную с 10 вершинами из Ω, либо две кокликовых орбиты, смежных с 11 вершинами из Ω. Противоречие с тем, что $\sum \binom{i}{2} x_i$ равно 9600 минус 5, 6, 21, 22 соответственно. Итак $|\Psi| \geqslant 7$ и число ребер между Ψ и $\Gamma - \Omega$, деленное на 5 не меньше 56, поэтому некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с парой вершин $a, b \in \Psi$, $\big|\Omega(a) \cap [b]\big| = 16$, и $|\Psi| \leqslant 7$. Утверждение (3) доказано.

Для вершины $e \in \Psi - (a^{\perp} \cup b^{\perp})$ подграф $\Omega(e)$ содержит δ вершин из $\Omega(a) \cap [b]$ и $16 - \delta$ или $21 - \delta$ вершин из $[a] - b^{\perp}$, $[b] - a^{\perp}$. Если $\Omega(e)$ содержит $37 - 2\delta$ вершин из $([a] - b^{\perp}) \cup ([b] - a^{\perp})$, то $\Omega(e)$ содержит $\delta - 11$ вершин вне $a^{\perp} \cup b^{\perp}$ и в случае б) имеем $\delta = 16$.

Пусть $c \in \Omega(a) \cap [b]$ — вершина степени 21 в Ω. Тогда $\Omega(c)$ содержит γ вершин из $[a] \cap [b]$ и $4 - \gamma$ или $9 - \gamma$ вершин из $[a] - b^{\perp}$, $[b] - a^{\perp}$. Если $\Omega(c)$ содержит по $4 - \gamma$ вершин из $[a] - b^{\perp}$, $[b] - a^{\perp}$, то $|\Omega(c) - (a^{\perp} \cup b^{\perp})| = 11 + \gamma$, противоречие. Если $\Omega(c)$ содержит по $9 - \gamma$ вершин из $[a] - b^{\perp}$, $[b] - a^{\perp}$, то $|\Omega(c) - (a^{\perp} \cup b^{\perp})| = 1 + \gamma$. Если же $\Omega(c)$ содержит $13 - 2\gamma$ вершин из $([a] - b^{\perp}) \cup ([b] - a^{\perp})$, то $|\Omega(c) \cap (a^{\perp} \cup b^{\perp})| = 6 + \gamma$, выполняется случай б) и $\gamma = 4$, противоречие с тем, что $[c] \cap \Omega(e)$ содержит либо не менее 10 вершин, либо от 5 до 8 вершин. Итак, $\Omega(c)$ содержит по $9 - \gamma$ вершин из $[a] - b^{\perp}$, $[b] - a^{\perp}$.

Допустим, что Ω содержит 16 вершин из $[a] \cap [b]$ и по 21 вершин из $[a] \cap [e]$, $[b] \cap [e]$. Тогда Ω содержит по 16 вершин из $[a] \cap [b] \cap [e]$, по 5 вершин из $[a] \cap [e] - [b]$, $[b] \cap [e] - [a]$, $[a] - ([b] \cup [e])$, $[b] - ([a] \cup [e])$, и 4 вершины вне $a^\perp \cup b^\perp \cup e^\perp$. Пусть c — вершина из $\Omega(a) \cap [b] \cap [e]$, имеющая степень 12 в Ω. Тогда $\Omega(c)$ содержит γ вершин из $[a] \cap [b] \cap [e]$, φ вершин из $[a] \cap [e] - [b]$, ψ вершин из $[b] \cap [e] - [a]$, $9 - \varphi - \gamma$ вершин из $[a] - ([b] \cup [e])$, $9 - \psi - \gamma$ вершин из $[b] - ([a] \cup [e])$ и γ вершин вне $a^\perp \cup b^\perp \cup e^\perp$. Как показано выше, $\psi = 9 - \gamma - \varphi$. Более того, $|\Omega(c) \cap [a]| = \psi + \gamma$ и $|\Omega(c) \cap [b]| = 9 - \psi$ сравнимы с 4 по модулю 5, поэтому $\psi \in \{0, 5\}$ и $\gamma = 4$. Можно считать (переставив при необходимости a и b), что $\psi = 0$ и $\gamma = 4$.

Пусть c, c' — смежные вершины из $\Omega(a) \cap [b]$, имеющие степень 21 в Ω. Тогда $\Omega(c) \cap [c']$ содержит a, b, e, 4 вершины вне $a^\perp \cup b^\perp \cup e^\perp$ и 2 вершины из $\Omega(a) \cap [b]$. Поэтому $\Omega(c')$ содержит 0 вершин из $[a] \cap [e] - [b]$, по 5 вершин из $[b] \cap [e] - [a]$, $[a] - ([b] \cup [e])$ и 0 вершин из $[b] - ([a] \cup [e])$. Тогда $\Omega(c) \cap [a] \cap [b] - (c')^\perp$ содержит единственную вершину d и $\Omega(c') \cap [a] \cap [b] - c^\perp$ содержит единственную вершину d'. Далее, для любой вершины f из $\Omega(a) \cap [b]$ степени 21 в Ω подграф $\Omega(f)$ содержит не менее 17 вершин из $\Omega(c)$ или из $\Omega(c')$. Противоречие с тем, что $\Omega(a) \cap [b]$ содержит не менее 12 вершин степени 21 в Ω. $\rhd$

Лемма 3.4. *В* Ψ *нет таких коклик* $C = \{a, b, e\}$, *что* $|\Omega(a) \cap [b]| + |\Omega(b) \cap [e]| + |\Omega(a) \cap [e]| = 48$.

$\lhd$ Допустим, что Ω содержит δ вершин из $[a] \cap [b] \cap [e]$ и по $16 - \delta$ вершин из $[a] \cap [b] - [e]$, $[a] \cap [e] - [b]$, $[b] \cap [e] - [a]$. Тогда Ω содержит по $\delta - 6$ вершин из $[a] - ([b] \cup [e])$, $[b] - ([a] \cup [e])$, $[e] - ([a] \cup [b])$ и $10 - \delta$ вершин вне $a^\perp \cup b^\perp \cup e^\perp$. Ввиду леммы 3.3 имеем $\delta = 6$. Далее, $\Omega(e) \cap [a] \cap [b]$ содержит вершину c степени 21 в Ω и $\Omega(c)$ содержит γ вершин из $[a] \cap [b] \cap [e]$, по φ вершин из $[a] \cap [b] - [e]$, $[a] \cap [e] - [b]$, $[b] \cap [e] - [a]$, по $9 - \gamma - 2\varphi$ вершин из $[a] - ([b] \cup [e])$, $[b] - ([a] \cup [e])$, $[e] - ([a] \cup [b])$ и $2\gamma + 3\varphi - 9$ вершин вне $a^\perp \cup b^\perp \cup e^\perp$. Так как $\delta = 6$, то $\gamma + 2\varphi = 9$ и $\gamma + \varphi \leqslant 4$, противоречие. $\rhd$

Лемма 3.5. $|\Omega| \neq 43$.

$\lhd$ Пусть $|\Omega| = 43$ и Ψ_0 — максимальный по включению подграф из Ψ такой, что $|\Omega(z) \cap [z']| = 21$ для любых двух вершин $z, z' \in \Psi_0$. Если $|\Omega(z) \cap [f]| = 21$ для некоторых вершин $z \in \Psi_0, f \in \Psi - \Psi_0$, то ввиду леммы 3.3 имеем $|\Omega(f) \cap [z']| = 21$ для любой вершины $z' \in \Psi_0$, противоречие с максимальностью Ψ_0. Значит, $|\Omega(z) \cap [f]| = 16$ для любых вершин $z \in \Psi_0, f \in \Psi - \Psi_0$. Ввиду леммы 2.3 имеем $|\Omega(f) \cap [f']| = 21$ для любых двух вершин $f, f' \in \Psi - \Psi_0$. Далее, имеется не менее $8|\Psi| - 40 = 16$ орбит $u^{\langle g \rangle}$ длины 5, смежных с парами вершин из Ψ. С другой стороны, число таких орбит не больше $3(7-3) = 12$, противоречие. $\rhd$

Лемма 3.6. *Если* $p = 3$, *то* $|\Omega| = 3t$, $\alpha_1(g)/18 - (t+3)/2$ *делится на* 3 *и* $2 \leqslant t \leqslant 24$ *или* $t \in \{27, 33\}$.

$\lhd$ Пусть $p = 3$ и $|\Omega| = 3t$. Тогда степень вершины в графе Ω равна $3i$, любое ребро графа Ω лежит в $3j$ треугольниках из Ω, а для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Ω имеем $|\Omega(a) \cap [b]| = 3l$.

Пусть $U = u^{\langle g \rangle}$ — орбита длины 3, Y_i — множество вершин из $\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i = |Y_i|$. Если U — клика, то $y_2 = 24 - 3y_3$, $y_1 = 144 + 3y_3$, поэтому $y_3 \leqslant 8$. Если U — коклика, то $y_2 = 63 - 3y_3$, $y_1 = 72 + 3y_3$, поэтому $y_3 \leqslant 21$.

Пусть $t > 24$. Тогда $\alpha_1(g) = 0$, $\chi_2(g) = \alpha_0(g)/6 + 7/2$ и $\alpha_0(g)$ — нечетное число, кратное 9, поэтому $|\Omega| \in \{81, 99\}$.

Заметим, что $44 - (t+7)/2 + \alpha_1(g)/18$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g)/18 - (t+3)/2$ делится на 3. $\rhd$

Лемма 3.7. *Пусть* $p = 2$. *Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *если* $\alpha_1(g) = 0$, *то* $|\Omega|$ *делится на* 3 *и* $|\Omega| \leqslant 93$;

(2) *если* $\alpha_1(g) \neq 0$, *то либо* $|\Omega| \leqslant 75$ *и* $3 - 3t + \alpha_1(g)$ *делится на* 36, *либо* $|\Omega| = 107$ *и* $\alpha_1(g) = 24$.

$\lhd$ Пусть $p = 2$ и $|\Omega| = 2t+1$. Тогда степень вершины в графе Ω равна $2i$, любое ребро графа Ω лежит в $2j-1$ треугольниках из Ω, а для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Ω имеем $|\Omega(a) \cap [b]| = 2l - 1$.

Пусть вершины u, u^g не смежны. Если $w \in [u^g] - u^\perp$, то $[w]$ содержит γ вершин из $[u] \cap [u^g]$, $9 - \gamma$ вершин из $[u] - (u^g)^\perp$, $21 - \gamma$ вершин из $[u^g] - u^\perp$ и $35 + \gamma$ вершин вне $u^\perp \cup (u^g)^\perp$. Заметим, что $\gamma > 0$ для некоторой вершины $w \in [u^g] - u^\perp$.

Пусть $\alpha_1(g) = 0$. Тогда $\chi_2(g) = (2t+1)/6 + 7/2$ четно. Если $y \in [u] \cap [u^g] - \Omega$ и $[y]$ содержит δ вершин из $[u] \cap [u^g] \cap \Omega$, то $|[y] - (u^\perp \cup (u^g)^\perp)| \geqslant 46 + \delta$. Поэтому $([y] - (y^g)^\perp) \cup ([y^g] - y^\perp)$ содержит не менее $54 + 4\delta$ вершин вне $u^\perp \cup (u^g)^\perp)$ и $|\Omega| \leqslant 19 + (76 - 4\delta)$. В этом случае $|\Omega| \leqslant 93$. Если же $\Gamma - \Omega$ — регулярный граф степени 45, то ввиду леммы 1.3 имеем $162 \leqslant |\Gamma - \Omega| \leqslant 180$, поэтому $63 \leqslant |\Omega| \leqslant 81$. Утверждение (1) доказано.

Пусть вершины u, u^g смежны. Если $z \in [u^g] - u^\perp$, то $[z]$ содержит β вершин из $[u] \cap [u^g]$, $9 - \beta$ вершин из $[u] - (u^g)^\perp$, $20 - \beta$ вершин из $[u^g] - u^\perp$ и $36 + \beta$ вершин вне $u^\perp \cup (u^g)^\perp$. Заметим, что $\beta > 0$ для некоторой вершины $z \in [u^g] - u^\perp$.

Если $[u] \cap [u^g]$ содержит смежные вершины w, w^g, то $[w]$ содержит не более 7 вершин из $[u] - (u^g)^\perp$, и из $[u^g] - u^\perp$ и не менее 49 вершин вне $u^\perp \cup (u^g)^\perp$. Поэтому $\big([w] - (w^g)^\perp\big) \cup \big([w^g] - w^\perp\big)$ содержит не менее 84 вершин вне $u^\perp \cup (u^g)^\perp$ и $|\Omega| \leqslant 7 + 36$.

Если $[u] \cap [u^g]$ содержит две несмежные вершины w, w^g, то $[w]$ содержит не более 8 вершин из $[u] - (u^g)^\perp$, и из $[u^g] - u^\perp$ и не менее 48 вершин вне $u^\perp \cup (u^g)^\perp$. Поэтому $\big([w] - (w^g)^\perp\big) \cup \big([w^g] - w^\perp\big)$ содержит не менее 58 вершин вне $u^\perp \cup (u^g)^\perp$ и $|\Omega| \leqslant 7 + 62$.

Если вершины z, z^g смежны и $z \in [u^g] - u^\perp$, то $[z]$ содержит β вершин из $[u] \cap [u^g]$ и $36 + \beta$ вершин вне $u^\perp \cup (u^g)^\perp$. Поэтому $\big([z] - (z^g)^\perp\big) \cup \big([z^g] - z^\perp\big)$ содержит не менее $54 + 2\beta$ вершин вне $u^\perp \cup (u^g)^\perp$ и $|\Omega| \leqslant 9 + (66 - 2\beta)$.

Допустим, что $|\Omega| \geqslant 77$. Тогда $\big\{u \| \ d(u, u^g) = 1\big\}$ является объединением изолированных ребер и $|[u] \cap \Omega| = 9$. Если подграф $\{u, u^g\} \cup \big([u] \cap [u^g]\big) \cup \big(\Gamma - (u^\perp \cup (u^g)^\perp)\big)$ содержит вершину w с $d(w, w^g) = 2$, то $\Gamma - (w^\perp \cup (w^g)^\perp))$ содержит не менее 70 вершин из $[u] \cup [u^g] - \Omega$, не менее 56 вершин из Ω, и не менее 6 вершин из $\big\{u \| \ d(u, u^g) = 1\big\}$, противоречие. Значит, подграф $\{u, u^g\} \cup ([u] \cap [u^g]) \cup (\Gamma - (u^\perp \cup (u^g)^\perp))$ совпадает с $\big\{u \| \ d(u, u^g) = 1\big\} \cup \Omega$ и $\alpha_1(g) \leqslant 54$. Так как вершина из $[u^g] - u^\perp$ смежна с четным числом вершин из $\big\{u \| \ d(u, u^g) = 1\big\}$, то $\alpha_1(g)$ делится на 12.

Пусть $\alpha_1(g) = 12$. Тогда $|\Omega| = 119$ и $\chi_2(g) = 119/3 - 4/6 + 7/2$, противоречие. Пусть $\alpha_1(g) = 24$. Тогда $|\Omega| = 107$ и $\chi_2(g) = 107/6 - 8/6 + 7/2 = 20$. Пусть $\alpha_1(g) = 48$. Тогда $|\Omega| = 83$ и $\chi_2(g) = 83/6 - 16/6 + 7/2$, противоречие.

Допустим, что $|\Omega| \leqslant 75$. Тогда число $44 - \chi_2(g) = (363 - 3t + \alpha_1(g))/18$ четно, поэтому $3 - 3t + \alpha_1(g)$ делится на 36. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны. $\rhd$

Литература

1. *Журтов А. Х., Махнев А. А., Нирова М. С.* Об автоморфизмах 4-изорегулярных графов // Тр. Института математики и механики.—2010.—Т. 16, № 3.—С. 185–194.
2. *Cameron P., Van Lint J.* Designs, graphs, codes and their links.—Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1981.—240 p.—(London Math. Soc. Stud. Texts 22).
3. *Brouwer A., Van Lint J.* Strongly regular graphs and partial geometries // Enumeration and Designe / Eds M. Jackson, S. Vanstone.—1984.—P. 85–122.
4. *Macay M., Siran J.* Search for properties of the missing Moore graph // Linear Algebra and its Appl.—2009.—Vol. 432.—P. 2381–2398.

5. *Cameron P.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1999.—220 p.—(London Math. Soc. Stud. Texts 45).

Статья поступила 7 апреля 2010 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
заведующий отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620219, Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

Токбаева Альбина Аниуаровна
Кабардино-Балкарский госуниверситет,
ассистент кафедры алгебры
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: albinatokbaeva@mail.ru

ON AUTOMORPHISMS OF STRONGLY REGULAR GRAPHS WITH PARAMETERS $(243, 66, 9, 21)$

Makhnev A. A., Tokbaeva A. A.

Orders and fixed-point subgraphs of automorphisms of strongly regular graphs with parameters $(243, 66, 9, 21)$ are found. These results will be useful for investigations of automorphisms of strongly regular graphs with parameters $(640, 243, 66, 108)$ (in such graph neighborhoods of vertices are strongly regular with parameters $(243, 66, 9, 21)$).

Key words: strongly regular graph, automorphism group.