Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 4, С. 28–38

УДК **517.11**

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РИМАНА И ГИЛЬБЕРТА В КЛАССЕ BMO ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Б. Климентов

В работе рассматривается разрешимость классических краевых задач Римана и Гильберта в классе $BMOA$ аналитических функций в предположении, что коэффициент краевого условия принадлежит пространству мультипликаторов класса BMO. Построены примеры, когда задача с неотрицательным индексом в такой наиболее естественной постановке неразрешима в классе $BMOA$. Даны достаточные условия на коэффициент, при которых имеет место обычная картина разрешимости.

Ключевые слова: краевые задачи Римана и Гильберта, классы BMO.

1. Введение. Основные определения

Краевая задача Гильберта (Римана — Гильберта) для обобщенных аналитических функций класса BMO (определения рассматриваемых классов см. ниже) рассматривалась в работе автора [1] в предположении, что коэффициент краевого условия гёльдеров (умножение функции класса BMO на окружности на гёльдерову функцию не выводит из класса BMO; этим и определялось требование на коэффициент; задача для голоморфных функций при гельдеровости коэффициента рассматривалась в [2]). Разумеется, постановка задачи наиболее естественна при предположении, что коэффициент краевого условия принадлежит пространству мультипликаторов функций из класса BMO. Именно в такой постановке задачи Римана и Гильберта для голоморфных функций рассматриваются в настоящей работе.

Строятся примеры, когда задачи с неотрицательным индексом в такой постановке (даже с непрерывными коэффициентами из LMO) неразрешимы в $BMOA$.

Хорошо известны примеры неразрешимости задач Римана и Гильберта с непрерывными коэффициентами и правыми частями в непрерывных в замкнутой области голоморфных функциях [3] (а умножение непрерывных функций на непрерывные из класса непрерывных функций не выводит). Причина этого явления состоит в неограниченности сингулярного оператора в непрерывных функциях. В то же время сингулярный оператор в пространстве BMO ограничен!

В нашем случае неразрешимость возникает по другой причине по сравнению с непрерывным случаем, а именно, из-за того, что экспоненты функций классов BMO и LMO, вообще говоря, не принадлежат BMO.

Приводятся достаточные условия на коэффициенты, при которых картина разрешимости та же, что и при гёльдеровых коэффициентах, а также пример, демонстрирующий, что при нарушении этих достаточных условий задача в классе $BMOA$ может быть неразрешимой (при разрешимости в любом классе Харди H_p, $p > 1$).

Известно, что конформным отображением краевые задачи Римана и Гильберта для односвязной области с ляпуновской границей сводятся к задачам для единичного круга [4, §§ 14, 29]. В связи с этим ниже в качестве области рассматривается единичный круг.

Обозначим $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z-плоскости, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D; $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

Определение 1. Вещественная функция $\varphi \in L_1(\Gamma)$, $\varphi = \varphi(e^{i\theta}) \equiv \varphi(\theta)$ называется *функцией класса* BMO_f (Bounded Mean Oscillation) [5, c. 277; 6], если

$$\sup_I \frac{1}{f(I)|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I| \, d\theta = \|\varphi\|_{*,f} < \infty,$$

где $I \subset \Gamma$ — произвольный интервал на Γ, $|I|$ — его длина,

$$\varphi_I = \frac{1}{|I|} \int_I \varphi \, d\theta,$$

f — неубывающая положительная функция, определенная на $[0, \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < 2\pi$.

Для комплекснозначной функции $\varphi \in L_1(\Gamma)$ определение аналогично.

Определение 2. Следуя [5, c. 269], будем говорить, что функция $\Phi(z)$, аналитическая в D, принадлежит классу $BMOA_f$, если $\Phi(z)$ принадлежит классу Харди H_2 и ее некасательные предельные значения $\Phi(e^{i\theta}) \equiv \Phi(\theta)$ на Γ принадлежат классу BMO_f.

Будем говорить, что функция $\Phi(z)$, аналитическая в дополнении круга D и ограниченная на ∞, принадлежит классу $BMOA_f$, если $\Phi(1/z) \in BMOA_f$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $\varphi(\theta) \in \Lambda_f$, если

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s,\theta} \frac{|\varphi(s) - \varphi(\theta)|}{f(|s - \theta|)} = \|\varphi\|_{\Lambda_f} < \infty.$$

Очевидно, что $\Lambda_f \subset BMO_f$.

Если $f \equiv 1$, будем использовать обозначение $BMO_1 = BMO$; если $f(r) = \ln^{-1} 1/r$, будем использовать обозначения $BMO_f = LMO$, $\Lambda_f = \Lambda_l$.

Известно [6; 7; 8, c. 223], что $LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ есть мультипликатор пространства BMO, т. е. максимально широкое множество функций, умножение на которые есть непрерывный линейный оператор из BMO в BMO.

Обозначим

$$Hu(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \, d\sigma. \tag{1}$$

$v(s) = Hu(s)$ — с точностью до постоянного слагаемого выражение краевых значений мнимой части аналитической в D функции через краевые значения действительной части [4, c. 59]. Очевидно, $H^2 u = -u$.

Обозначим

$$Ku(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u(\sigma)}{\tau - t} \, d\tau, \tag{2}$$

где $t = e^{is}$, $\tau = e^{i\sigma}$.

Имеет место соотношение [4, с. 59]

$$iHu(s) = 2Ku(s) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma)\,d\sigma + v_0, \tag{3}$$

где $v_0 = \mathrm{const}$.

Замечание 1. В силу (3) условия $H\mu(s) \in L_\infty(\Gamma)$ и $K\mu(s) \in L_\infty(\Gamma)$ эквивалентны как для действительной, так и для комплексной функции $\mu(s)$.

Известно, что сингулярный оператор, в том числе и (1), (2), ограничен в BMO и LMO [9, 10].

2. Формулировка результатов

Задача Римана [4, § 14]. Найти две функции класса $BMOA$: $\Phi^+(z)$ — аналитическую в $D(= D^+)$, и $\Phi^-(z)$ — аналитическую в D^- — дополнении D, включая $z = \infty$, удовлетворяющие на контуре Γ линейному соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) \quad \text{(однородная задача)} \tag{4}$$

или

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{(неоднородная задача).} \tag{5}$$

Функцию $G(t)$ называют *коэффициентом задачи Римана*, а функцию $g(t)$ — ее *свободным членом.*

Поскольку на Γ выполняется $t = e^{is}$, везде далее для функций, определенных на Γ, пишем $\varphi(e^{is}) \equiv \varphi(s)$.

Задача Гильберта (Римана — Гильберта) [4, § 27]. Найти аналитическую в D функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую на контуре Γ линейному соотношению

$$a(s)\,u(s) + b(s)\,v(s) = \mathrm{Re}\left\{\overline{\lambda(s)}\Phi(s)\right\} = c(s), \tag{6}$$

где $\lambda(s) = a(s) + ib(s)$, $\Phi(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Функцию $\lambda(s)$ называют *коэффициентом*, а $c(s)$ — *свободным членом* краевого условия (6).

При $c(s) \equiv 0$ будем иметь однородную задачу и при $c(s) \not\equiv 0$ — неоднородную.

Индекс краевого условия. Везде далее будем считать, что $G(s), \lambda(s) \in L_\infty(\Gamma)$,

$$0 < k_1 \leqslant |G(s)| \leqslant k_2 \tag{7}$$

и

$$0 < k_1 \leqslant |\lambda| \leqslant k_2, \tag{8}$$

где k_1 и k_2 — некоторые постоянные, вообще говоря, различные в (4) и (6).

Обозначим $G(t) = |G(t)|e^{i\theta}$, т. е. $\theta = \arg G$. На $\theta(t)$ наложим следующие дополнительные условия: существует такое конечное покрытие (B_k) контура Γ интервалами, что на каждом из них $|\theta(t)| < 2\pi$. Аналогично для $\arg\lambda$.

Возьмем на каждом интервале B_k из покрытия (B_k) точку t_k и разрежем B_k в этой точке, т. е. будем принимать точку t_k за две точки: t_k^+ и t_k^-. Фиксируя произвольно значение $\theta(t)$ в некоторой точке t_k^+ и следуя по направлению обхода контура Γ вдоль цепи интервалов B_k, будем последовательно определять $\theta(t)$ на встречающихся интервалах так, чтобы $|\theta(t)-\theta(t)|<2\pi$, когда t и t' принадлежат пересечению соседних интервалов. В результате получим вполне определенную ветвь $\theta(t)$, которая в точках t_k имеет два значения: $\theta(t_k^-)$ до обхода и $\theta(t_k^+)$ после обхода.

Обозначим
$$\frac{1}{2\pi}\sum_k\left\{\theta(t_k^+)-\theta(t_k^-)\right\}=\mathrm{ind}_\Gamma\left[e^{i\theta(t)}\right]=\varkappa.$$
Поскольку $\theta(t_k^\pm)$ соответствует одной и той же точке $e^{i\theta(t_k)}$, число $\varkappa$ — целое. Очевидно, $\varkappa$ не зависит от выбора точек t_k и покрытия (B_k).

Определение 4. Число $\varkappa$ будем называть *индексом* задач (4) и (5).

Аналогично определяется индекс задачи (6) с использованием функции $\theta=\arg\lambda$.

Теорема 1. *Пусть в* (4)[1]
$$K\ln G(t)\in L_\infty(\Gamma). \tag{9}$$

При $\varkappa=\mathrm{ind}_\Gamma G(t)\geqslant 0$ задача (4) *имеет точно $\varkappa+1$ линейно независимых в комплексном смысле решений класса $BMOA$ (которые будут даже из L_∞).*

Общее решение задается формулой
$$\Phi(z)=P_\varkappa(z)\,X(z), \tag{10}$$
где $P_\varkappa(z)$ — произвольный многочлен (с комплексными коэффициентами) степени не выше $\varkappa$,
$$X(z)=X^+(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\ln\left[\tau^{-\varkappa}G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau\right\},\quad z\in D^+, \tag{11}$$
$$X(z)=X^-(z)=z^{-\varkappa}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\ln\left[\tau^{-\varkappa}G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau\right\},\quad z\in D^-. \tag{12}$$

При $\varkappa<0$ задача (4), *безотносительно к условию* (9), *в классе $BMOA$ имеет только тривиальное (нулевое) решение.*

Если при этом $G(t)\in LMO\cap L_\infty(\Gamma)$, то решение (10) *при любом фиксированном многочлене $P_\varkappa(z)$ будет класса $LMOA\cap L_\infty$.*

Замечание 2. Отказ от условия (9) может привести к тому, что при $\varkappa\geqslant 0$ задача не будет иметь нетривиальных решений класса $BMOA$. В то же время это достаточное условие необходимым не является (см. пример в п. 5.1).

Теорема 2. *При $\varkappa\geqslant 0$ для разрешимости однородной задачи* (4) *в классе $BMOA\cap L_\infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\exp\{K\ln G(t)\}\in L_\infty(\Gamma)$. Если при этом $G(t)\in LMO\cap L_\infty(\Gamma)$, для разрешимости в $LMOA\cap L_\infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\exp\{K\ln G(t)\}\in LMO\cap L_\infty(\Gamma)$. При $G(t)\in LMO\cap L_\infty(\Gamma)$ для разрешимости в $BMOA$ необходимо и достаточно, чтобы $\exp\{K\ln G(t)\}\in BMO$. Во всех случаях общее решение дается формулой* (10).

Замечание 3. В случае $G(t)\in LMO\cap L_\infty(\Gamma)$, но $\exp\{K\ln G(t)\}\notin L_\infty(\Gamma)$, о примере разрешимости в $BMOA$ см. замечание 10.

Теорема 3. *Пусть для краевого условия* (5) *выполнено* (9), $G(t)\in LMO\cap L_\infty(\Gamma)$.

[1] Везде далее при $f\in L_\infty$ считаем, что $|f|\leqslant\mathrm{const}<\infty$.

При $\varkappa = \mathrm{ind}_\Gamma G(t) \geqslant 0$ задача (5) *разрешима в классе $BMOA$ при любом свободном члене $g(t) \in BMO$ и ее общее решение дается формулой*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)\, P_\varkappa(z), \tag{13}$$

где $X(z)$ определена в (11), (12), *а $P_\varkappa(z)$ — многочлен степени $\varkappa$ с произвольными комплексными коэффициентами.*

Если $\varkappa = -1$, задача (5) *разрешима в классе $BMOA$ и имеет единственное решение*

$$\Psi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{14}$$

В случае $\varkappa < -1$ для разрешимости (*в классе $H_p \supset BMOA$, $p > 1$*) *необходимо и достаточно, чтобы свободный член удовлетворял $-\varkappa - 1$ условиям*

$$\int\limits_\Gamma \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1. \tag{15}$$

Замечание 4. В отличие от однородной задачи (см. теорему 1), снижение требований на коэффициент $G(t)$ до принадлежности лишь $L_\infty(\Gamma)$ приводит, вообще говоря, к неразрешимости задачи при $\varkappa \geqslant 0$ в классе $BMOA$ даже при $g(t) \in L_\infty(\Gamma)$ (см. пример из пункта 5.2).

Теорема 4. *Для того, чтобы при $G(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ и отказе от условия* (9) *имели место все утверждения теоремы* 3, *достаточно, чтобы* $\exp\{\pm K \ln G(t)\} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$.

Замечание 5. Вопрос о необходимых условиях пока остается открытым.

Перейдем к обсуждению краевой задачи Гильберта (6).

Теорема 5. *Пусть в* (6)

$$H\theta(t) \in L_\infty(\Gamma), \tag{16}$$

где $\theta(t) = \arg \lambda(t)$.

При $\varkappa = \mathrm{ind}_\Gamma \geqslant 0$ однородная задача (6) *имеет $2\varkappa + 1$ линейно независимых в действительном смысле решений класса $BMOA$* (*которые будут даже из L_∞*).

Общее решение задается формулой

$$\Phi(z) = z^\varkappa e^{i\gamma(z)} Q(z), \tag{17}$$

где

$$\gamma(z) = S\left[\theta(t) - \varkappa \arg t\right](z), \tag{18}$$

$S\varphi = \varphi + iH\varphi$ — оператор Шварца;

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{\varkappa} \left\{ c_k z^k - \bar{c}_k z^{-k} \right\}, \tag{19}$$

β_0 — произвольная вещественная постоянная, c_k, $k = 1, \ldots, \varkappa$, — произвольные комплексные постоянные.

При $\varkappa < 0$ однородная задача (6) *в классе $H_p \supset BMOA$, $p > 1$, имеет только тривиальное* (*нулевое*) *решение.*

Если при этом $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, то решение (17) при любых фиксированных постоянных β_0, c_k, $k = 1, \dots, \varkappa$, будет класса $LMO \cap L_\infty$.

Замечание 6. Отказ от условия (16) может привести к тому, что при $\varkappa \geqslant 0$ задача не будет иметь нетривиальных решений класса $BMOA$. В то же время это достаточное условие необходимым не является (см. пример в п. 5.1).

Теорема 6. *При $\varkappa \geqslant 0$ для разрешимости однородной задачи (6) в классе $BMOA \cap L_\infty$ необходимо и достаточно, чтобы $e^{-\omega(s)} \in L_\infty(\Gamma)$, где $\omega(s) = H\theta(s)$. Если при этом $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, для разрешимости в $LMOA \cap L_\infty$ необходимо и достаточно, чтобы $-e^{\omega(s)} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$. При $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ для разрешимости в $BMOA$ необходимо и достаточно, чтобы $e^{-\omega(s)} \in BMO$. Во всех случаях решение дается формулой (17).*

Замечание 7. В случае $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, но $e^{-\omega(s)} \notin L_\infty(\Gamma)$, о примере разрешимости в $BMOA$ см. замечание 10.

Теорема 7. *Пусть для краевого условия (6) выполнено (16) и $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$.*

При $\varkappa = \operatorname{ind}_\Gamma \lambda(t) \geqslant 0$ неоднородная задача (6) разрешима в классе $BMOA$ при любом свободном члене $c(s) \in BMO$ и ее общее решение дается формулой

$$\Phi(z) = z^\varkappa e^{i\gamma(z)} \left[S\left(\frac{e^{\omega(t)} c(t)}{|t|^\varkappa |\lambda(t)|} \right)(z) + Q(z) \right], \tag{20}$$

где $\omega(t) = H\theta(t) = \operatorname{Im} \gamma(t)$, $\gamma(z)$ и $Q(z)$ определены формулами (18) и (19).

При $\varkappa < 0$ неоднородная задача (6) разрешима и имеет в классе $BMOA$ единственное решение

$$\Phi(z) = z^\varkappa e^{i\gamma(z)} \left[S\left(\frac{e^{\omega(t)} c(t)}{|t|^\varkappa |\lambda(t)|} \right)(z) \right], \tag{21}$$

тогда и только тогда, когда выполнены $-2\varkappa - 1$ действительных условий разрешимости

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{\omega(s)} c(s) \cos ks}{|\lambda(s)|}\, ds = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\omega(s)} c(s) \sin ks}{|\lambda(s)|}\, ds = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -\varkappa - 1. \tag{22}$$

Замечание 8. В отличие от однородной задачи (см. теорему 5), снижение требований на коэффициент $\lambda(t)$ до принадлежности лишь $L_\infty(\Gamma)$ приводит, вообще говоря, к неразрешимости задачи при $\varkappa \geqslant 0$ в классе $BMOA$ даже при $c(s) \in L_\infty(\Gamma)$ (см. пример из п. 5.2).

Теорема 8. *Для того, чтобы при $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ и отказе от условия (16) имели место все утверждения теоремы 7 достаточно, чтобы $e^{\pm\omega(s)} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$.*

Замечание 9. Вопрос о необходимых условиях пока остается открытым.

3. Вспомогательные сведения

Имеет место следующее очевидное утверждение [6].

Лемма 1. *Если $|F(x) - F(y)| \leqslant C|x - y|$, где C — некоторая постоянная, то*

$$\int_I \left| F(\varphi(\theta)) - [F(\varphi)]_I \right| d\theta \leqslant 2C \int_I |\varphi(\theta) - \varphi_I|\, d\theta.$$

Очевидно

Следствие 1. *Если $\varphi \in BMO_f$, то $F(\varphi) \in BMO_f$.*

Следствие 2. *Если значения комплекснозначной функции* $\varphi \in BMO_f$ *принадлежат области, в которой функция* F *удовлетворяет условию Липшица, то* $F(\varphi) \in BMO_f$.

Лемма 2. *Если* $\varphi \in BMO_f$, *то* $|\varphi| \in BMO_f$.

Если при этом $0 < k_1 \leqslant |\varphi| \leqslant k_2$, *где* k_1 *и* k_2 — *некоторые постоянные, то* $1/\varphi \in BMO_f$. *Если* $\varphi_1, \varphi_2 \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, *то произведение* $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$.

$\lhd$ Первое утверждение сразу же следует из неравенства

$$\int\limits_I \big||\varphi| - |\varphi|_I\big|\, d\theta \leqslant \int\limits_I |\varphi - \varphi_I|\, d\theta.$$

Для доказательства второго утверждения достаточно оценить величину

$$\int\limits_I \left|\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi_I}\right| d\theta,$$

см. [5, с. 224]. Далее, имеем

$$\int\limits_I \left|\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi_I}\right| d\theta \leqslant \frac{1}{k_1^2} \int\limits_I |\varphi - \varphi_I|\, d\theta,$$

откуда получаем второе утверждение.

Третье утверждение вытекает из того, что $LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ — мультипликатор BMO. $\rhd$

Из следствия 2 и леммы 2 получаем

Следствие 3. *Если* $\lambda(t) \in LMO$ *и удовлетворяет* (8), *то* $\theta(t) = \arg \lambda(t) \in LMO$.

4. Доказательства основных результатов

Все доказательства из данного пункта являются модификациями соответствующих рассуждений из [4].

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Рассмотрим случай $\varkappa \geqslant 0$.

Повторяя соответствующие рассуждения из [4, с. 107–109], с учетом того, что «задача о скачке»

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t) \in L_p(\Gamma), \quad p > 1, \tag{23}$$

имеет в классе $H_p \supset BMO$ единственное решение [11, с. 193]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{g(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \in H_p, \tag{24}$$

получаем, что для предельных некасательных значений на Γ «канонической функции» [4, с. 107–109] $X(z)$, определяемой в (11), (12), соотношение

$$G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}. \tag{25}$$

В силу (9)

$$X^\pm(t) \in L_\infty(\Gamma), \quad 0 < c_1 \leqslant |X^\pm(t)| \leqslant c_2,\ t \in \Gamma, \tag{26}$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные.

Далее, следуя [4, с. 109], подставим (25) в (4) и получим

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}. \tag{27}$$

В (27) слева и справа граничные значения на Γ функций класса H_p и на бесконечности $\Phi^-(z)/X^-(z)$ имеет полюс порядка не выше $\varkappa$. Отсюда следует, что функция $\Phi(z)/X(z)$ есть многочлен степени не выше $\varkappa$ [11, с. 194], т. е. справедлива формула (10).

Поскольку $X^\pm(t) \in L_\infty(\Gamma)$, $\Phi^\pm(t) \in L_\infty(\Gamma) \subset BMO$.

Если $G(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, то по следствию 2 $\ln G(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, а в силу ограниченности оператора K в LMO и (9)

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\ln[\tau^{-\varkappa} G(\tau)]}{\tau - t}\, d\tau \in LMO \cap L_\infty(\Gamma).$$

Повторно применяя следствие 2, получаем $X^\pm(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$. Поскольку $P_\varkappa(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, из леммы 2 имеем

$$\Phi^\pm(t) = X^\pm(t) P_\varkappa(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma).$$

Пусть $\varkappa < 0$. Тогда $\Phi^-(\infty)/X^-(\infty) = 0$ и из (23), (24) и (27) получаем $\Phi(z) \equiv 0$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. *Достаточность* — это повторение доказательства теоремы 1.

Необходимость. Из (11), переходя к пределу по некасательным путям при $z \to t \in \Gamma$, с учетом формул Сохоцкого — Племеля [11, с. 126], получаем:

$$X^+(t) = \left[t^{-\varkappa} G(t)\right]^{1/2} \exp\left\{K \ln[t^{-\varkappa} G(t)]\right\}. \tag{28}$$

Отсюда, с учетом леммы 2, следствия 2 и того, что $LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ — мультипликатор BMO, получаем все наши утверждения. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 3. Рассмотрим случай $\varkappa \geqslant 0$.

Подставляя в (5) выражение (25), приведем (5) к виду

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)},$$

откуда, с учетом формул Сохоцкого — Племеля [11, с. 126], получаем, что выражение (14) есть частное решение задачи (5).

В силу (26) по лемме 2 $1/X^+(\tau) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, а следовательно, $g(\tau)/X^+(\tau) \in BMO$. Отсюда, ввиду ограниченности оператора K в BMO, имеем $\Psi(z) \in BMOA$.

Добавляя к $\Psi(z)$ общее решение (10) однородной задачи (4), получим (13).

В случае $\varkappa = -1$ общее решение однородной задачи нулевое, а $\Psi(z)$ ограничена на ∞.

В случае $\varkappa < -1$ функция $\Psi(z)$, вообще говоря, имеет полюс порядка $-\varkappa - 1$ на ∞ и условия (15) получаем, следуя [4, с. 112], приравниванием нулю коэффициентов при положительных степенях z в разложении $\Psi(z)$ в ряд Тэйлора в окрестности ∞. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 4. Из условия теоремы $X^+(t)$, $[X^+(t)]^{-1} \in LMOA \cap L_\infty$. Далее повторяется доказательство теоремы 3. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 5. Рассмотрим случай $\varkappa \geqslant 0$. Известно [2], что формула (17) дает решение однородной задачи (6) в любом классе Харди H_p, $p > 1$. В силу (16) получаем $\Phi(z) \in L_\infty \cap BMOA$.

Утверждение, касающееся случая $\varkappa < 0$, следует из [2].

Если $\varkappa \geqslant 0$ и $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, по следствию 3 $\theta(t) \in LMO$. В силу ограниченности оператора S в LMO и (16), имеем $\gamma(z) \in LMOA \cap L_\infty$, откуда, с учетом следствия 2 и леммы 2, получаем $\Phi(z) \in LMOA \cap L_\infty$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 6. Аналогично доказательству теоремы 2. Или можно сослаться на сводимость задачи Гильберта к задаче Римана [4, с. 290, 291]. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 7. Так как $\gamma(z) \in LMOA \cap L_\infty$, по следствию 2 $e^{\gamma(z)} \in LMOA \cap L_\infty$, а по лемме 2 $1/|\lambda(t)| \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$. Отсюда получаем, что

$$\frac{e^{\omega(t)}c(t)}{|t|^{\varkappa}|\lambda(t)|} \in BMO$$

и

$$S\biggl(\frac{e^{\omega(t)}c(t)}{|t|^{\varkappa}|\lambda(t)|}\biggr)(z) \in BMOA.$$

Таким образом, частное решение класса H_p [2], $p > 1$, (21) неоднородной задачи (6) при $\varkappa \geqslant 0$ (а также и при $\varkappa < 0$, когда это решение) принадлежит $BMOA$.

Сопоставляя это с теоремой 5, получаем, что при $\varkappa \geqslant 0$ общее решение (20) принадлежит классу $BMOA$.

Условия разрешимости (22), так же, как и в [4, с. 283], получаем как требование того, чтобы функция

$$S\biggl(\frac{e^{\omega(t)}c(t)}{|t|^{\varkappa}|\lambda(t)|}\biggr)(z)$$

имела нуль порядка $-\varkappa$ в начале координат. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 8. Это повторение доказательства теоремы 7. $\rhd$

5. Контрпримеры

5.1. Пример однородной задачи с непрерывным коэффициентом класса Λ_l с нулевым индексом, не имеющей нетривиальных решений класса $BMOA$. Здесь строится пример задачи Гильберта с коэффициентом, для которого $H\arg\lambda \notin L_\infty(\Gamma)$. Поскольку в единичном круге задача Гильберта сводится к задаче Римана [4, с. 290, 291], этот пример распространяется и на однородную задачу Римана.

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 1 из [6].

Лемма 3. *$LMO = \Lambda_l + H\Lambda_l$. Более точно, если $\varphi_j \in \Lambda_l$, $j = 1, 2$, то $\|\varphi_1 + H\varphi_2\|_{*,L} \leqslant \mathrm{const}\sum_{j=1}^{2}\|\varphi_j\|_l$, и если $\varphi \in LMO$, то найдутся $\varphi_j \in \Lambda_l$, $j = 1, 2$, такие, что $\varphi = \varphi_1 + H\varphi_2$ и $\sum_{j=1}^{2}\|\varphi_j\|_l \leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|_{*,L}$, где константы от φ, φ_1, φ_2 не зависят.*

Рассмотрим на Γ функцию равную $2\ln|\ln|s||$ в малой окрестности нуля и непрерывно продолженную константой вне этой окрестности. Чтобы не усложнять обозначений, будем обозначать ее $2\ln|\ln|s|| \in LMO$. По лемме 3 имеем $2\ln|\ln|s|| = \varphi_1 + H\varphi_2$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in \Lambda_l$. Отсюда $\varphi_2 = -H(2\ln|\ln|s|| - \varphi_1) \in \Lambda_l$.

Обозначим $\varkappa = \mathrm{ind}_\Gamma e^{i\varphi_2(s)}$ и положим $\theta(s) = -\varphi_2(s) + \varkappa s$. Тогда $\theta(s) \in \Lambda_l$, $\mathrm{ind}_\Gamma e^{i\theta(s)} = 0$ и $H\theta(s) \notin L_\infty(\Gamma)$.

Рассмотрим однородную краевую задачу Гильберта

$$\mathrm{Re}\left\{e^{-i\theta(s)}\Phi(s)\right\} = 0. \qquad (29)$$

Покажем, что эта задача не имеет нетривиальных решений в классе $BMOA$.

Эта задача имеет одно нетривиальное линейно независимое решение в любом классе Харди H_p, $p > 1$, и для решения справедлива формула Гахова из [4, с. 281] (см. [2]):

$$\Phi(z) = i\beta_0 e^{i\gamma(z)},$$

где $\beta_0 = \mathrm{const}$, $\gamma(z) = S\theta(z)$,

$$S\theta(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \theta(\sigma)\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}\, d\sigma + i\sigma_0$$

— оператор Шварца.

Для граничных некасательных предельных значений $\gamma(e^{is}) = \gamma(s)$ имеем $\gamma(s) = \theta(s) + iH\theta(s)$, т. е.

$$\Phi(s) = i\beta_0 e^{i\theta(s)} e^{-H\theta(s)} = \ln^2|s| \cdot F(s),$$

где $\ln^2|s|$ продолжена вне малой окрестности нуля константой, $F(s) = i\beta_0 e^{i\theta(s)+\varphi_1(s)} \in \Lambda_l \subset LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, причем $|F(s)| > 0$, откуда

$$1/|F(s)| \in \Lambda_l \subset LMO \cap L_\infty(\Gamma) \tag{30}$$

— мультипликатор BMO.

Таким образом, $\Phi(s) \notin BMO$. Действительно, если предположить противное, в силу (30) получим:

$$\ln^2|s| = \frac{|\Phi(s)|}{|F(s)|} \in BMO,$$

что неверно.

Замечание 10. Если рассуждения начать с функции $\ln|\ln|s||$ (убрав двойку), то получим задачу, разрешимую в $BMOA$, для которой $H\arg\lambda \notin L_\infty(\Gamma)$.

Таким образом, достаточные условия (9) и (16) необходимыми не являются.

5.2. Пример неоднородной задачи Гильберта с неотрицательным индексом и ограниченной правой частью, неразрешимой в $BMOA$. Поскольку в единичном круге задача Гильберта сводится к задаче Римана [4, с. 290, 291], этот пример распространяется и на неоднородную задачу Римана.

Рассмотрим краевую задачу (6) при $\lambda(t) = e^{i\theta(t)}$. Пусть $\theta(s) \in L_\infty(\Gamma)$, $\mathrm{ind}_\Gamma \lambda(t) \geqslant 0$, $\lambda(t)$, а следовательно, и $\theta(s) \notin LMO$ (см. следствие 3), и выполнено (16).

Тогда $e^{\omega(s)} \in L_\infty(\Gamma)$, $e^{\omega(s)} \notin LMO$ (см. следствие 3), и при подходящем выборе $c(s)$ произведение $\varphi(s) = e^{\omega(s)}c(s)$ — произвольная функция из $L_\infty(\Gamma)$.

Рассмотрим функцию $e^{-\omega(s)}H\varphi(s)$. В силу произвольности $\varphi(s) \in L_\infty(\Gamma)$, $H\varphi(s) = \varphi_1(s) + \varphi_2(s)$, где $\varphi_1(s)$ — произвольная функция из BMO, а $\varphi_2(s) \in L_\infty(\Gamma)$ [5, с. 247]. Поскольку $e^{-\omega(s)} \notin LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, при подходящем подборе $\varphi(s)\,(c(s))$ произведение $e^{-\omega(s)}\varphi_1(s) \notin BMO$. Отсюда получаем, что для рассматриваемой задачи никакое решение (20) не принадлежит $BMOA$.

Литература

1. *Климентов С. Б.* Классы BMO обобщенных аналитических функций // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 8, вып. 1.—С. 27–39.
2. *Климентов С. Б.* Стохастическая краевая задача Римана — Гильберта в конформных мартингальных классах H_p и BMO // Изв. вузов, Сев.-Кав. рег. Естеств. науки.—2004.—№ 3.—С. 6–12.

3. *Симоненко И. Б.* Краевая задача Римана с непрерывным коэффициентом // Докл. АН СССР.—1959.—Т. 124, № 2.—С. 278–281.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.—640 с.
5. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции.—М.: Мир, 1984.—469 с.
6. *Janson S.* On functions with conditions on the mean oscillation // Ark. Math.—1976.—Vol. 14, № 2.—P. 189–196.
7. *Stegenga D. A.* Bounded Toeplitz operators on H^1 and applications of the duality between H^1 and the functions of bounded mean oscillation // American J. of Math.—1976.—Vol. 98, № 3.—P. 573–589.
8. *Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций.—Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1986.—404 с.
9. *Peetre J.* On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant // Ann. Mat. Pura Appl.—1966.—Vol. 72, № 4.—P. 295–304.
10. *Bramanti M., Brandolini L.* Estimates of BMO type for singular integrals on spaces of homogeneous type and applications to hypoelliptic pdes // Rev. Mat. Iberoamericana.—2005.—Vol. 21, № 2.—P. 511–556.
11. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости.—М.: Наука, 1975.—296 с.

Статья поступила 21 сентября 2009 г.

Климентов Сергей Борисович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
главный научный сотрудник лаб. компл. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: sklimentov@pochta.ru

RIEMANN AND HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN BMO CLASSES FOR HOLOMORPHIC FUNCTIONS

Klimentov S. B.

The classical Riemann and Hilbert boundary value problems for analytic functions are under consideration. We search the solution in $BMOA$ class under assumption that the coefficient of the boundary condition belongs to the set of pointwise multipliers of BMO. We constract examples when the problem with non-negative index in the such natural setting has not solution in $BMOA$. Sufficient conditions on the coefficient are given when we have usual pattern of solvability in $BMOA$ class.

Key words: Riemann and Hilbert boundary value problems, BMO classes.