Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 4, С. 15–20

УДК **512.542**

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОДГРУППАМИ

А. Х. Журтов, А. А. Цирхов

Представлены результаты исследования класса конечных групп, в которых любая неабелева подгруппа независима. Сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие независимости всех неабелевых подгрупп в конечной группе.

Ключевые слова: конечные группы, независимые подгруппы, группы Фробениуса, силовские подгруппы.

Подгруппа H группы G называется *независимой подгруппой*, если $N_G(K) \leqslant N_G(H)$ для любой нетривиальной подгруппы K из H.

Независимыми подгруппами, очевидно, являются группы простых порядков, нормальные подгруппы, дополнения групп Фробениуса. Другими примерами независимых подгрупп служат силовские 2-подгруппы в простых группах $L_2(2^m)$, $Sz(2^{2m+1})$ и $U_3(2^m)$.

М. Сузуки [1] классифицировал конечные группы четного порядка с независимыми силовскими 2-подгруппами.

Л. И. Шидов [2] описал конечные группы, в которых независима каждая нильпотентная подгруппа.

Целью настоящей работы является изучение класса конечных групп, в каждой из которых любая неабелева подгруппа независима. Очевидно, рассматриваемому классу принадлежат все конечные метагамильтоновы группы, т. е. группы, в которых нормальны все неабелевы подгруппы. Начало изучению метегамильтоновых групп положила работа Г. М. Ромалиса и Н. Ф. Сесекина [3]. Конечные ненильпотентные метагамильтоновы группы классифицировал В. Т. Нагребецкий [4]. Конечные нильпотентные метагамильтоновы группы описаны в работе А. А. Махнева [5]. Бесконечные метагамильтоновы группы, а также обобщения как конечных, так и бесконечных метагамильтоновых групп рассматривались в работах различных авторов, из которых отметим работы С. Н. Черникова [6], Н. Ф. Кузенного и Н. Н. Семко [7], F. De Mari, F. De Giovanni [8]. Наиболее «свежие» результаты на эту тему содержаться в [9].

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *В конечной группе G любая неабелева подгруппа независима тогда и только тогда, когда G метагамильтонова.*

Предварительно докажем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, в которой каждая неабелева подгруппа независима. Тогда G обладает силовской башней. Более того, G является полупрямым произведением холловой нильпотентной подгруппы на абелеву подгруппу.*

Напомним, что группа по определению обладает силовской башней, если она может быть получена с помощью полупрямых произведений из своих силовских подгрупп. Более точно, скажем, что нетривиальная группа G *обладает силовской башней высоты* $h>0$, если она при $h=1$ примарна, а при $h>1$ в ней есть нормальная нетривиальная силовская подгруппа, фактор-группа по которой обладает силовской башней высоты $h-1$.

1. Основные определения и используемые результаты

Группа G называется *группой Фробениуса* с ядром F и дополнением H, если $1\neq F\trianglelefteq G$, $1\neq H\leqslant G$, $G=F\cdot H$, $F\cap H=1$ и $C_F(h)=1$ для любого $1\neq h\in H$.

Подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ группы G называется пересечение ее максимальных подгрупп.

Приведем известные результаты, на которые будем ссылаться как на предложения с соответствующими номерами.

1. *Любая подгруппа конечной группы G, содержащая нормализатор некоторой силовской подгруппы, совпадает со своим нормализатором в G* [10, *теорема* 4.2.4].

2. *Если силовская подгруппа P конечной группы G лежит в центре своего нормализатора, то G обладает нормальным дополнением к P, т. е. $G=P\cdot N$ и $P\cap N=\{1\}$ для некоторой нормальной подгруппы N из G* [10, *теорема* 14.2.1].

3. *Любая группа нечетного порядка разрешима* [11, *теорема Фейта — Томпсона*].

4. *Если G — конечная простая неабелева группа, в которой пересечение любых двух различных силовских 2-подгрупп тривиально, то G изоморфна $L_2(q)$, $Sz(q)$ или $U_3(q)$ для некоторого четного числа q* [1].

5. *Пусть T — силовская 2-подгруппа простой группы $L_2(q)$, $Sz(q)$ или $U_3(q)$. Тогда $N_G(T)$ неабелева, $N_G(T)=TH$, где $H\neq 1$ и $N_G(H)\nleqslant N_G(T)$* [1].

6. *Пусть H — дополнение группы Фробениуса* [12]. *Тогда*

(а) *силовские p-подгруппы из H являются циклическими при $p>2$, а при $p=2$ — циклическими или кватернионными группами;*

(б) *если в H есть инволюция t, то $\langle t\rangle$ содержит все инволюции из H и $f^t=f^{-1}$ для любого элемента f из ядра.*

7. *Если все силовские подгруппы группы G циклические, то G — полупрямое произведение холловой циклической подгруппы на циклическую подгруппу* [12].

8. *Если N — конечная примарная группа, A — группа порядка, взаимно простого с $|N|$, действующая нетривиально на N, то A действует нетривиально на фактор-группе по подгруппе Фраттини $\Phi(N)$ группы N* [10, *теорема* 12.2.2].

9. *Если V — элементарная абелева группа и A — действующая на V группа, порядок которой взаимно прост с $|V|$, то $V=V_1\times\dots\times V_s$, где каждая V_i, $i=1,\dots,s$, является минимальной A-инвариантной подгруппой* [10, *теорема* 16.3.2].

2. Доказательство теоремы 2

В дальнейшем G означает конечную группу, каждая неабелева подгруппа которой независима.

Лемма 1. *В любой подгруппе и любой фактор-группе группы G все неабелевы подгруппы независимы.*

$\lhd$ Пусть $H\leqslant G$, $V\trianglelefteq G$. Если $1\neq R\leqslant K\leqslant H$ и K — неабелева, то $N_H(R)=H\cap N_G(R)\leqslant H\cap N_G(K)=N_H(K)$. Поэтому K независима в H.

Если $\bar{U} = U/V$ — неабелева подгруппа в $G/V = \bar{G}$ и $1 \neq W/V \leqslant U/V$, то U — неабелева, $W \neq 1$ и

$$N_{G/V}(W/V) = N_G(W/V) \leqslant N_G(U/V) = N_{G/V}(U/V),$$

поэтому $\bar{U}$ — независимая подгруппа в $\bar{G}$. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть P — силовская p-подгруппа группы G и H — подгруппа, содержащая $N_G(P)$. Если H неабелева, то $N_G(K) \leqslant H$ для любой нетривиальной подгруппы K из H.*

$\lhd$ По условию H независима. По предложению 1 $N_G(H) = H$. Поэтому $N_G(K) \leqslant N_G(H) = H$. $\rhd$

Лемма 3. *Если P — силовская p-подгруппа в G и $N_G(P)$ неабелева, то*

(а) $P \cap P^x = \{1\}$ *для любого* $x \in G \backslash N_G(P)$,

(б) $N_G(P)$ — *холлова подгруппа.*

$\lhd$ (a): Предположим противное. Тогда $G \neq N_G(P)$ и существует $x \in G$, для которого $P \neq P \cap P^x \neq 1$. Выберем x так, чтобы порядок подгруппы $D = P \cap P^x$ был наибольшим. Тогда $\langle N_P(D), N_{P^x}(D)\rangle$ не является p-подгруппой и поэтому в $N_G(D)$ существуют, по меньшей мере, две различные силовские p-подгруппы.

С другой стороны, $N_G(P)$ — независима, поэтому $N_G(D) \leqslant N_G(P)$ и, следовательно, в $N_G(D)$ есть только одна силовская p-подгруппа. Полученное противоречие доказывает (a).

(б): Пусть $1 \neq U$ — силовская подгруппа из $N = N_G(P)$. По условию $N_G(U) \leqslant N_G(N)$. По предложению 1 $N_G(N) = N$, поэтому $N_G(U) \leqslant N$. Отсюда вытекает, что U — силовская подгруппа в G и, таким образом, $N_G(P)$ — холлова подгруппа. $\rhd$

Лемма 4. *Группа G разрешима.*

$\lhd$ Предположим противное. По лемме 1 можно считать, что G — неабелева простая группа. По теореме Фейта — Томпсона (предложение 3) порядок G четен. По предложению 2 нормализатор силовской 2-подгруппы группы G неабелев и, следовательно, по лемме 3 пересечение любых двух различных силовских 2-подгрупп из G тривиально. По предложению 4 G изоморфна $L_2(q)$, $U_3(q)$ или $Sz(q)$ для некоторого четного числа q. По лемме 2 из предложения 5 получаем противоречие. $\rhd$

Лемма 5. *Если P — силовская подгруппа в G, нормализатор N которой неабелев и отличен от G, то G — группа Фробениуса, ядро которого есть элементарная абелева группа, а дополнение совпадает с N.*

$\lhd$ По лемме 4 в G есть нетривиальная элементарная абелева нормальная q-подгруппа V для некоторого простого числа q. Поскольку N неабелева, $H = V \cdot N$ тоже неабелева. По условию $G = N_G(V) \leqslant N_G(H)$, откуда $N_G(H) = G$. С другой стороны, по предложению 1 $N_G(H) = H$. Отсюда $G = H = V \cdot N$. Далее, $V \cap N \trianglelefteq N$ и $V \cap N \trianglelefteq V$, т. е. $V \cap N \trianglelefteq G$. С другой стороны, если $V \cap N \neq 1$, то по условию и предложению 1 $G = N_G(V \cap N) \leqslant N_G(N) = N$, вопреки выбору P. Поэтому $V \cap N = \{1\}$.

Если теперь $n \in N$, то по условию $C_V(n) \leqslant N \cap V = \{1\}$. Отсюда $G = V \cdot N$ — группа Фробениуса. $\rhd$

Лемма 6. *Если в G нормализатор каждой силовской подгруппы абелев или совпадает с G, то G — полупрямое произведение холловой нормальной подгруппы на абелеву подгруппу и G обладает силовской башней.*

$\lhd$ Пусть H — произведение всех нормальных силовских подгрупп из G. Тогда H — нильпотентная нормальная холлова подгруппа. Нормализаторы остальных силовских подгрупп — абелевы группы, поэтому по предложению 2 для каждой из этих силовских подгрупп в G есть нормальное дополнение, пересечение которых совпадает с H, поэтому G/H — прямое произведение абелевых силовских подгрупп.

В частности, G обладает силовской башней. $\rhd$

Лемма 7. *G обладает силовской башней и G — полупрямое произведение холловой нормальной подгруппы на абелеву подгруппу.*

$\lhd$ Предположим противное. Пусть G — минимальный контрпример. По лемме 6 в G есть силовская подгруппа, нормализатор N которой неабелев и отличен от G. По лемме 5 G — группа Фробениуса, ядро V которой — элементарная абелева группа. Так как ядро группы Фробениуса — холлова подгруппа, то V — силовская подгруппа в G. В силу минимальности G по лемме 1 G/V обладает силовской башней, поэтому G обладает силовской башней.

Если силовская 2-подгруппа в N неабелева, то V — нециклическая подгруппа. Далее, по предложению 6 (б) N обладает единственной инволюцией t и $\vartheta^t = \vartheta^{-1}$ для любого элемента $\vartheta \in V$. Если $\vartheta \neq 1$, то $K = \langle \vartheta, t \rangle$ неабелева группа и $\langle \vartheta \rangle = N_G(K) \cap V$. Поскольку V — нециклическая группа, $V \nleqslant N_G(K)$, однако по условию $V \leqslant N_G(\langle \vartheta \rangle) \leqslant N_G(K)$. Это противоречие показывает, что силовская 2-подгруппа в N абелева. По предложению 6 (а) все силовские подгруппы в N циклические, а по предложению 7 $N = AB$ — полупрямое произведение холловой циклической подгруппы A на циклическую подгруппу B.

Так как N неабелева, то $N_N(B) \neq N$ и поэтому $N_G(VB) = VN_N(B) \neq G$. Поскольку VB неабелева, то из условия следует, что $G = N_G(V) \leqslant N_G(VB)$. Это противоречие доказывает лемму и вместе с ней теорему 2. $\rhd$

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — минимальный противоречащий пример. Тогда в G существует неабелева подгруппа, нормализатор которой отличен от G. Кроме того, для любой неабелевой подгруппы H из G и любой нетривиальной подгруппы K из H выполняется включение $N_G(K) \leqslant N_G(H)$.

По теореме 2 $G = NA$, где N — холлова нильпотентная нормальная в G подгруппа, A — абелева подгруппа и $N \cap A = \{1\}$. Зафиксируем эти обозначения до конца доказательства.

Лемма 8. *G не нильпотентна.*

$\lhd$ Предположим противное. Пусть U — неабелева подгруппа группы G, для которой $N_G(U) \neq G$. Так как G нильпотентна, то $N_G(N_G(U)) \neq N_G(U)$. По лемме 1 из минимальности G вытекает, что $N_G(U) \vartriangle G$. Если $Z(G) \cap U \neq 1$, то $G = N_G(Z(G)) \leqslant N_G(Z(G)) \leqslant N_G(U_1) \neq G$, то $G = N_G(Z(G)) \leqslant N_G(U_1) \neq G$, что не верно. Поэтому $U_1 \vartriangle G$. Поскольку коммутант U_1 нетривиален и совпадает с коммутантом K подгруппы U, то $K \vartriangle G$, и мы получаем противоречие с условием: $G = N_G(K) \leqslant N_G(U) \neq G$. $\rhd$

Лемма 9. *$C_N(A)$ — собственная нормальная подгруппа в N и $N/C_N(A)$ — элементарная абелева группа, на которой A действует неприводимо.*

$\lhd$ Если $C_N(A) = N$, то G нильпотентна вопреки лемме 8. Поэтому $C_N(A)$ — собственная подгруппа в N и, следовательно, A действует на N при сопряжении в G нетривиально. Из предложения 8 вытекает, что A действует нетривиально на группе $V = N/\Phi(N)$, которая является прямым произведением элементарных абелевых групп. Теперь из предложения 9 вытекает, что $V = V_1 \times \ldots \times V_s$, где каждая подгруппа V_i, $i = 1, \ldots, s$, является минимальной A-инвариантной подгруппой. Так как A действует нетривиально на V, то A

действует нетривиально на одном из сомножителей, например, на V_1. Пусть C — полный прообраз $V_2 \times \ldots \times V_s$ в N. Тогда $C \vartriangle G$ и $N/C \approx V_1$. Осталось показать, что $C = C_N(A)$. Очевидно, что $C_N(A) \leqslant C$. Предположим, что $C \nleqslant C_N(A)$. В этом случае CA — неабелева подгруппа и $N_G(CA) \neq G$. С другой стороны, по условию $G = N_G(C) \leqslant N_G(CA) \neq G$. Это противоречие доказывает лемму. $\triangleright$

Лемма 10. *Любая неабелева подгруппа из N инвариантна в G.*

$\triangleleft$ Пусть K — неабелева подгруппа из N.

Из лемм 1 и 8 вытекает, что $K \underline{\vartriangle} N$, а из леммы 9 следует, что $K_0 = C_N(A) \cap K \neq 1$. Теперь по условию $N_G(K) \geqslant N_G(K_0) \geqslant A$, поэтому $K \triangleleft G$. $\triangleright$

Лемма 11. *Если H — неабелева подгруппа из G, то $H \vartriangle G$.*

$\triangleleft$ По лемме 10 можно считать, что $H \nleqslant N$. Пусть $H_0 = H \cap N$. Тогда H_0 — нормальная в H холлова подгруппа и поэтому $H = H_0 A_0$, где A_0 сопряжена с некоторой подгруппой из A. Не нарушая общности, можно считать, что $A_0 \leqslant A$. Так как $H \nleqslant N$, то $A_0 \neq 1$. По условию $A \leqslant N_G(A_0) \leqslant N_G(H)$, т. е. A нормализует H и, в частности, нормализует H_0. Если H_0 неабелева, то по лемме 10 $G = N_G(H_0) \leqslant N_G(H)$, т. е. $H \underline{\vartriangle} G$. Поэтому можно считать, что H_0 абелева и, следовательно, A не централизует H_0. Из леммы 9 вытекает, что $1 \neq [H_0, A] = [H, A] \trianglelefteq G$. По условию $G = N_G([H_0, A]) \leqslant N_G(H_0 A)$, т. е. $H_0 \trianglelefteq G$. Это означает, что $H \vartriangle G$. Лемма и теорема 1 доказаны. $\triangleright$

Литература

1. *Suzuki M.* Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent // Ann. Math.—1964.—Vol. 80, № 1.—P. 58–77.
2. *Шидов Л. И.* О конечных группах с нормализаторным условием // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 6.—С. 141–145.
3. *Ромалис Т. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах // Мат. зап. Уральского ун-та.—1966.—Т. 5, № 3.—С. 45–49.
4. *Нагребецкий В. Т.* Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Уральского ун-та.—1967.—Т. 6, № 1.—С. 80–88.
5. *Махнев А. А.* О конечных метагамильтоновых группах // Мат. зап. Уральского ун-та.—1976.—Т. 10, № 1.—С. 60–75.
6. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами систем подгрупп.—М.: Наука, 1980.—384 с.
7. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп // Мат. заметки.—1983.—Т. 34, № 2.—С. 179–188.
8. *F. de Mari, F. de Giovanni.* Groups with finitely many normalizers of non-abelian subgroups // Ricerche di mat.—2006.—Vol. 55, № 2.—P. 311–317.
9. *Ballester-Bolinchesn A., Cossey J.* Finite groups with subgroups super-soluble or subnormal // J. Algebra.—2009.—Vol. 321, № 7.—P. 2042–2052.
10. *Холл М.* Теория групп.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.—468 с.
11. *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math.—1963.—Vol. 13, № 3.—P. 755–1029.
12. *Burnside W.* Theory of groups of finite order.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1911.

Статья поступила 29 сентября 2010 г.

Журтов Арчил Хазешович
Кабардино-Балкарский госуниверситет,
заведующий кафедрой геометрии и высшей алгебры
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 175
E-mail: zhurtov_a@mail.ru

Цирхов Аубекир Ахметханович
Кабардино-Балкарский госуниверситет,
ассистент кафедры геометрии и высшей алгебры
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 175
E-mail: `tsirkhov@mail.ru`

ON FINITE GROUPS WITH INDEPENDENT SUBGROUPS

Zhurtov A. H., Tsirkhov A. A.

Represented the rezults of investigation of class of finite groups in which any non abelian group is independent. Formulated and proved the necessary and sufficient condition of independence of non abelian group in the finite group.

Key words: finite group, independent subgroup, Frobenius group, Sylow group.