*Владикавказский математический журнал*
*2010, Том 12, Выпуск 4, С. 12–14*

*УДК* **519.46**

# О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**Н. А. Джусоева, В. С. Дзигоева, В. А. Койбаев**

Строится класс максимальных подгрупп полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n, k(x))$ степени $n$ над полем рациональных функций $\Omega = k(x)$ с коэффициентами из поля $k$ нечетной характеристики, содержащих нерасщепимый максимальный тор $T = T(\varphi)$, связанный с радикальным расширением $K = \Omega(\sqrt[n]{\varphi})$ степени $n$ основного поля $\Omega = k(x)$, где $\varphi$ — неприводимый многочлен в $k[x]$.

**Ключевые слова:** промежуточные подгруппы, максимальные подгруппы, нерасщепимый максимальный тор, трансвекция.

Настоящая статья посвящена построению класса максимальных подгрупп полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n, k(x))$ степени $n$ над полем рациональных функций $\Omega = k(x)$, с коэффициентами из поля $k$ нечетной характеристики, содержащих нерасщепимый максимальный тор $T = T(\varphi)$, связанный с радикальным расширением $K = \Omega(\sqrt[n]{\varphi})$ степени $n$ основного поля $\Omega = k(x)$, где $\varphi$ — неприводимый многочлен в $k[x]$.

Сформулируем основной результат работы. Элементы матриц тора $T = T(\varphi)$ порождают некоторое подкольцо $R(\varphi)$ поля $k(x)$. Пусть $R_\varphi$ — подкольцо $\varphi$-целых дробей рациональных функций (т. е. рациональных функций, у которых знаменатели свободны от $\varphi$). Тогда $R(\varphi) \subseteq R_\varphi$. Через $\sigma_\varphi$ обозначим сеть, у которой выше главной диагонали стоит идеал $\varphi R_\varphi$, а на главной диагонали и ниже — $R_\varphi$. Далее, $G(\sigma_\varphi)$ — сетевая группа [1].

**Теорема.** *Для произвольного неприводимого многочлена $\varphi$ группа $TG(\sigma_\varphi)$ является максимальной подгруппой полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n, k(x))$, не содержащей $\mathrm{SL}(n, k(x))$.*

С каждым вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega^n \setminus \bar{0}$ связана невырожденная матрица $C(x)$, элементы которой вычисляются по формулам

$$(C(x))_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leqslant i; \\ \varphi x_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1. \end{cases}$$

С каждой матрицей $C = C(x) = (c_{ij})$ связана обратная матрица $C^{-1} = C(y) = (c'_{ij})$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Omega^n$, где $y_i = \frac{C_{1i}}{|C(x)|}$, причем $C_{1i}$ — алгебраическое дополнение элемента $c_{1i}$ матрицы $C = C(x)$.

В работе рассматривается унитальное подкольцо $R(\varphi)$ поля $\Omega$, порожденное элементами $x_i y_j$, $\varphi x_r y_s$:

$$R(\varphi) = \left\langle x_i y_j, \varphi x_r y_s \colon\ i + j \leqslant n+1,\ r+s > n+1,\ x \in \Omega^n \setminus \bar{0} \right\rangle_{\mathrm{ring}},$$

$t^n - \varphi$ — неприводимый многочлен степени $n$ над полем $\Omega$ [2]. Тогда $e_i = \theta^{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, образует базис радикального расширения $K = \Omega(\sqrt[n]{\varphi})$, $\theta = \sqrt[n]{\varphi}$, поля $K = \Omega(\theta)$ над $\Omega$. Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(\varphi)$, который является образом мультипликативной группы поля $K = \Omega(\sqrt[n]{\varphi})$ при регулярном вложении в $G = GL(n, k)$. В выбранном базисе тор $T = T(\varphi)$ определяется как матричная группа

$$T = T(\varphi) = \{C(x) : \ x \in \Omega^n \setminus \bar{0}\}.$$

С промежуточной подгруппой $H$, $T \leqslant H \leqslant G$, содержащей трансвекцию, связаны модули трансвекций $(i \neq j)$

$$A_{ij} = A_{ij}(H) = \{\alpha \in \Omega : \ t_{ij}(\alpha) \in H, \ i \neq j\}$$

и их кольца множителей

$$R_{ij} = R_{ij}(H) = R_{ij}(A_{ij}) = \{\lambda \in \Omega : \ \lambda A_{ij} \subseteq A_{ij}\}.$$

Очевидно, что $A_{ij}$ являются подгруппами аддитивной группы $\Omega^+$ поля $\Omega$ ($R_{ij}$-модули). Положим $A_i = A_{i1}$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Тогда [3, лемма 2.7.1] справедлива формула

$$A_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j < i; \\ \varphi A_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1. \end{cases}$$

Положим $A_1 = \varphi A_n$ и рассмотрим сеть $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, которую мы называем сетью, ассоциированной с подгруппой $H$.

Элементы матриц тора $T = T(\varphi)$ порождают подкольцо $R(\varphi)$ поля $\Omega$. Пусть $R$ — промежуточное подкольцо, $R(\varphi) \subseteq R \subseteq \Omega$. Через $\sigma_R$ обозначим сеть, у которой на главной диагонали и выше стоит идеал $\varphi R$, а ниже диагонали — $R$, а через $\sigma^R$ — сеть, у которой на главной диагонали и ниже стоит $R$, а выше — $\varphi R$. Пусть, далее, $E(\sigma_R)$ — подгруппа, порожденная всеми трансвекциями из сетевой группы $G(\sigma_R)$.

Доказательство нашей теоремы основано на следующей лемме.

**Лемма** [4, теорема 1]. *Пусть $H$ — подгруппа полной линейной группы $G = GL(n, \Omega)$, содержащая нерасщепимый максимальный тор $T = T(\varphi)$. Предположим, что сеть $\sigma$, ассоциированная с подгруппой $H$, совпадает с сетью $\sigma_R$. Тогда произведение $TE(\sigma_R)$ является группой и справедливы включения*

$$TE(\sigma_R) \leqslant H \leqslant N(\sigma_R),$$

*где $N(\sigma_R) = N_G(E(\sigma_R))$ — нормализатор элементарной подгруппы $E(\sigma_R)$ в группе $G = GL(n, k)$. Для нормализатора $N(\sigma_R)$ справедливо равенство*

$$N(\sigma_R) = TG(\sigma^R).$$

## Литература

1. *Боревич З. И.* Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. семинаров ЛОМИ РАН.—1976.—Т. 64.—С. 12–29.
2. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. 3-е изд.—М.: Наука, 1985.—503 с.
3. *Койбаев В. А.* Подгруппы группы $\mathrm{GL}(2, k)$, содержащие нерасщепимый тор.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2009.—183 с.—(Итоги науки. ЮФО. Сер. мат. моногр.)

4. *Койбаев В. А., Шилов А. В.* О подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—2010.—Т. 375.—С. 130–139.

*Статья поступила 14 октября 2010 г.*

Джусоева Нонна Анатольевна
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, *ассистент каф. алгебры и геометрии*
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: nonnadjusoeva@gmail.com

Дзигоева Валентина Созрыкоевна
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, *доцент каф. алгебры и геометрии*
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: dzivalso@yandex.ru

Койбаев Владимир Амурханович
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, *зав. каф. алгебры и геометрии*
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Ватутина, 46;

Южный математический институт, *вед. науч. сотр.*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru

## ON MAXIMAL SUBGROUPS OF THE GENERAL LINEAR GROUP OVER RATIONAL FUNCTIONS FIELD

Dzhusoeva N. A., Dzigoeva V. S., Koibaev V. A.

We construct a class of the maximal subgroups of the general linear group $G = \mathrm{GL}(n, k(x))$ of degree $n$ over a field of the rational functions $k(x)$ with coefficients in a field $k$ of odd characteristic, containing non-split maximal torus associated with the radical extension of the basic field $k(x)$.

**Key words:** intermediate subgroups, maximal subgroups, non-split maximal torus, transvection.