Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 4, С. 73–78

УДК **517.926.4+517.968.25**

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ В ИНТЕГРАЛЬНОМ ВИДЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

С. М. Ситник

Рассматриваются представления в интегральном виде решений одного дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах, содержащего оператор Бесселя. Доказывается существование интегральных представлений определенного вида для указанных решений методом последовательных приближений с использованием операторов преобразования. По сравнению с известными ранее результатами допускаются потенциалы с сильными сингулярностями в начале координат. Также по сравнению с известной схемой Б. М. Левитана функция Грина выражается не через общую гипергеометрическую функцию, а более конкретно через функцию Лежандра, что позволяет избежать неизвестных постоянных в оценках.

Ключевые слова: операторы преобразования, оператор Бесселя, функция Грина, гипергеометрическая функция, функция Лежандра, сингулярные потенциалы.

Введение

В различных разделах математики и теоретической физики применяются методы теории операторов преобразования (см. [1–5] и подробную библиографию в [6–8]).

Рассмотрим задачу о построении оператора преобразования S_α вида

$$S_\alpha u(r) = u(r) + \int\limits_r^\infty P(r,t)u(t)\,dt, \tag{1}$$

определенного на любых функциях $u \in C^2(0,\infty)$ и сплетающего операторы $B_\alpha - q(r)$ и B_α по формуле

$$S_\alpha(B_\alpha - q(r))u = B_\alpha S_\alpha u. \tag{2}$$

Здесь B_α — оператор Бесселя

$$B_\alpha u = u''(r) + \frac{2\alpha}{r}u'(r), \quad \alpha > 0. \tag{3}$$

Сформулированная задача о построении оператора преобразования по существу эквивалентна задаче о нахождении решений дифференциального уравнения, коэффициенты которого имеют особенность в начале координат,

$$B_\alpha v(r) - q(r)v(r) + \lambda v(r) = 0 \tag{4}$$

через решения невозмущенного уравнения $u(r)$, причем ищутся решения, представимые в виде (1) с некоторым ядром $P(r,t)$. Выбор пределов интегрирования в представлении (1) приводит к тому, что искомое решение и его производная имеют ту же асимптотику, что и невозмущенное решение на бесконечности при выполнении очевидных требований к ядру $P(r,t)$.

Представление решений однородного уравнения (4) по формуле (1) обычно называется представлением Йоста. Возможность такого представления с достаточно «хорошим» ядром P для широкого класса потенциалов $q(r)$ лежит в основе классических методов решения обратных задач квантовой теории рассеяния [9–11].

Данный тип задач имеет долгую историю. Существование представления Йоста, сохраняющего асимптотику при $r \to \infty$, впервые было доказано для уравнения Штурма — Лиувилля ($\alpha = 0$, q — суммируемая функция) Б. Я. Левиным в [12]. Операторы преобразования для оператора Бесселя впервые на русском языке были подробно изучены в широко известной работе Б. М. Левитана [13], и далее в их изучение основной вклад вносили математики харьковской школы. Случай непрерывной q, $\alpha > 0$, подробно рассмотрен в различных аспектах в работах А. С. Сохина [14–17], а также ряда других авторов (см. подробнее [6]). Оригинальная методика для решения поставленной задачи была разработана В. В. Сташевской [18], что позволило ей включить в рассмотрение сингулярные потенциалы с оценкой в нуле $|q(r)| \leqslant cx^{-3/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ при целых α, это методика получила широкое развитие. В работе автора [19] условия на $q(r)$ были ослаблены до оценки $|q(r)| \leqslant C/r^2$ методом Сташевской.

Вместе с тем во многих математических и физических задачах необходимо рассматривать сильно сингулярные потенциалы, например, допускающие произвольную степенную особенность в нуле. В настоящей работе сформулированы результаты по интегральному представлению решений уравнений с подобными сингулярными потенциалами. Полученные результаты являются развитием известных ранее в следующих направлениях.

1. Найдено интегральное представление решений для дифференциального уравнения с сингулярным потенциалом, имеющим достаточно произвольную особенность в начале координат. От потенциала требуется лишь мажорируемость определенной функцией, суммируемой на бесконечности. В частности, к классу допустимых в данной работе относятся: сингулярный потенциал $q = r^{-2}$, сильно сингулярный потенциал со степенной особенностью $q = r^{-2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, потенциалы Юкавы типа $q = e^{-\alpha r}/r$, потенциалы Баргмана и Батмана — Шадана [11] и ряд других. При этом на функцию $q(r)$ не накладывается никаких дополнительных условий типа быстрой осцилляции в начале координат или знакопостоянства, что позволяет изучать притягивающие и отталкивающие потенциалы единым методом.

2. Доказательство существования оператора преобразования или интегрального представления решений возмущенного уравнения, что одно и то же, проводится по существу по известной схеме из работы Б. М. Левитана [13]. Мы вносим небольшое усовершенствование в эту схему, так как используемую в доказательстве функцию Грина как оказалось можно выразить не только через общую гипергеометрическую функцию Гаусса, но и более конкретно через функцию Лежандра, что позволяет избавиться от неопределенных постоянных в оценках из [13].

3. Ранее рассматривались лишь случаи одинаковых пределов (оба вида $[0;a]$ или $[a;\infty]$) в основном интегральном уравнении для ядра оператора преобразования. В данной работе впервые показано, что можно рассматривать случай различных пределов в основном интегральном уравнении. Именно такая расстановка пределов и позволила охватить более широкий класс потенциалов с особенностями в нуле. Кроме того, указан-

ный способ позволяет рассматривать решения с более общими начальными условиями.

4. Изложенная техника полностью переносится и на задачу о построении неклассических операторов обобщенного сдвига. Данная задача по существу эквивалентна выражению решений уравнения

$$B_{\alpha,x}u(x,y) - q(x)u(x,y) = B_{\beta,y}u(x,y) \tag{5}$$

через решения невозмущенного волнового уравнения при наличии дополнительных условий, обеспечивающих корректность. Такие представления получаются уже из факта существования операторов преобразования и изучались для несингулярного случая ($\alpha = \beta = 0$) в [20, 21] как следствия теории обобщенного сдвига. Интересная оригинальная методика для получения подобных представлений также в несингулярном случае разработана в работах А. В. Боровских [22, 23]. Из результатов настоящей работы следуют интегральные представления некоторого подкласса решений уравнения (5) в общем сингулярном случае для достаточно произвольных потенциалов с особенностями в начале координат, причем оценки для решений не содержат неопределенных постоянных. Как уже отмечалось, три задачи о построении оператора преобразования, представлении решений возмущенного уравнения и нахождении оператора обобщенного сдвига по существу эквивалентны, поэтому далее результаты приводятся для задачи о построении оператора преобразования. Отметим, что при более ограничительных условиях на потенциал ранее автором были получены результаты, опубликованные в [24, 25].

Основные результаты

Введем новые переменные и функции по формулам:

$$\xi = \frac{t+r}{2}, \quad \eta = \frac{t-r}{2}, \quad \xi \geqslant \eta > 0;$$

$$K(r,t) = \left(\frac{r}{t}\right)^{\alpha} P(r,t), \quad u(\xi,\eta) = K(\xi-\eta,\, \xi+\eta). \tag{6}$$

Обозначим $\nu = \alpha - 1$. Таким образом, для обоснования представления (1), для решения уравнения (4) достаточно определить функцию $u(\xi,\eta)$. Известно [14, 24, 26], что если существует дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(\xi,\eta)$ интегрального уравнения

$$u(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty} R_\nu(s,0;\xi,\eta)q(s)\,ds - \int\limits_{\xi}^{\infty} ds \int\limits_{0}^{\eta} q(s+\tau)R_\nu(s,\tau;\xi,\eta)u(s,\tau)\,d\tau,$$

при условиях $0 < \tau < \eta < \xi < s$, то искомая функция $P(r,t)$ определяется по формулам (6) через это решение $u(\xi,\eta)$. Функция $R_\eta = R_{\alpha-1}$ является функцией Римана, возникающей при решении следующей задачи для сингулярного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{4\alpha(\alpha-1)\xi\eta}{(\xi^2-\eta^2)^2}\,u(\xi,\eta) = q(\xi+\eta)u(\xi,\eta),$$

$$u(\xi,0) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty} q(s)\,ds.$$

Эта функция известна в явном виде, она выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1$

$$R_\nu = \left(\frac{s^2-\eta^2}{s^2-\tau^2}\cdot\frac{\xi^2-\tau^2}{\xi^2-\eta^2}\right)^\nu {}_2F_1\left(-\nu,-\nu;1;\frac{s^2-\xi^2}{s^2-\eta^2}\cdot\frac{\eta^2-\tau^2}{\xi^2-\tau^2}\right).$$

Это выражение упрощено в [24], где показано, что функция Римана в рассматриваемом случае выражается через функцию Лежандра по формуле

$$R_\nu(s,\tau,\xi,\eta) = P_\nu\left(\frac{1+A}{1-A}\right),\ A = \frac{\eta^2-\tau^2}{\xi^2-\tau^2}\cdot\frac{s^2-\xi^2}{s^2-\eta^2}\ . \tag{7}$$

Основное содержание статьи составляет

Теорема 1. *Пусть функция $q(r)\in C^1(0,\infty)$ удовлетворяет условию*

$$|q(s+\tau)| \leqslant |p(s)| \quad (\forall\, s,\tau,\ 0<\tau<s), \qquad \int\limits_\xi^\infty |p(t)|\,dt < \infty \quad (\forall\, \xi>0). \tag{8}$$

Тогда существует интегральное представление вида (1), *ядро которого удовлетворяет оценке*

$$|P(r,t)| \leqslant \left(\frac{t}{r}\right)^\alpha \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{t+r}{2}}^\infty P_{\alpha-1}\left(\frac{y^2(t^2+r^2)-(t^2-r^2)}{2try^2}\right)|p(y)|\,dy$$
$$\times\exp\left[\left(\frac{t-r}{2}\right)\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{t+r}{2}}^\infty P_{\alpha-1}\left(\frac{y^2(t^2+r^2)-(t^2-r^2)}{2try^2}\right)|p(y)|\,dy\right].$$

При этом ядро оператора преобразования $P(r,t)$, а также решение уравнения (4) *являются дважды непрерывно дифференцируемыми на $(0,\infty)$ по своим аргументам.*

Перечислим классы потенциалов, для которых выполнены условия (8). Если $|q(s)|$ монотонно убывает, то можно принять $p(s)=|q(s)|$. Для потенциалов с произвольной особенностью в начале координат и возрастающих при $0<r<M$ (например, кулоновских $q=-\frac{1}{r}$), которые обрезаны нулем на бесконечности, $q(r)=0,\ r>M$, можно принять $p(s)=|q(M)|,\ s<M,\ p(s)=0,\ s\geqslant M$. Условию (8) будут также удовлетворять потенциалы с оценкой $q(s+\tau)\leqslant c|q(s)|$. На возможность подобного усиления теоремы 1 внимание автора обратил В. В. Катрахов.

Замечание. Фактически при доказательстве приведенной теоремы не нужен явный вид функции Римана (7). Используется только существование функции Римана, ее положительность и некоторое специальное свойство монотонности. Эти факты являются довольно общими, поэтому полученные результаты можно обобщить на достаточно широкий класс дифференциальных уравнений.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для ядра оператора преобразования $P(r,t)$ справедлива оценка*

$$|P(r,t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{t}{r}\right)^\alpha P_{\alpha-1}\left(\frac{t^2+r^2}{2tr}\right)\int\limits_r^\infty |p(y)|\,dy$$
$$\times\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t-r}{2}\right)P_{\alpha-1}\left(\frac{t^2+r^2}{2tr}\right)\int\limits_r^\infty |p(y)|\,dy\right].$$

Отметим, что при $r \to 0$ ядро интегрального представления может иметь экспоненциальную особенность.

Для класса потенциалов со степенной сингулярностью вида

$$q(r) = r^{(-2\beta+1)}, \quad \beta > 0 \tag{9}$$

полученные оценки можно упростить не снижая их точности.

Теорема 3. *Рассмотрим потенциал вида* (9). *Тогда теорема* 1 *выполняется с оценкой*

$$|P(r,t)| \leqslant \left(\frac{t}{r}\right)^{\alpha} \frac{\Gamma(\beta)4^{\beta-1}}{(t^2-r^2)^{\beta}} P_{\alpha-1}^{-\beta}\left(\frac{t^2+r^2}{2tr}\right) \exp\left[\left(\frac{t-r}{r}\right) \frac{\Gamma(\beta)4^{\beta-1}}{(t^2-r^2)^{\beta}} P_{\alpha-1}^{-\beta}\left(\frac{t^2+r^2}{2tr}\right)\right].$$

Данная оценка получается после довольно длинных вычислений с использованием знаменитой теоремы Слейтер — Маричева [27], которая помогает вычислить в терминах гипергеометрических функций необходимые интегралы после их сведения к свертке Меллина.

Эта оценка была получена в работе [19] для потенциала $q(r) = cr^{-2}$, для которого $\beta = \frac{1}{2}$. Как следует из [24], в этом случае функция Лежандра $P_{\nu}^{-1/2}(z)$ может быть выражена через элементарные функции. Поэтому и соответствующая оценка может быть выражена через элементарные функции.

Другим потенциалом для которого рассматриваемая оценка оценка может быть выражена через элементарные функции, является потенциал вида $q(r) = r^{-2\beta+1}$, для которого $\beta = \alpha - 1$.

Литература

1. *Carroll R.* Transmutation, scattering theory and special functions.—Amsterdam–New York: North-Holland Publ. Company, 1982.—457 p.
2. *Carroll R.* Transmutation theory and applications.—Amsterdam–New York: North-Holland Publ. Company, 1986.—351 p.
3. *Gilbert R., Begehr H.* Transformations, transmutations and Kernel functions. Vol. 1–2.—Harlow: Longman, 1992.—399 p.
4. *Фаге Д. К., Нагнибида Н. И.* Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов.—Новосибирск: Наука, 1977.—280 с.
5. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.—Киев: Наукова Думка, 1977.—331 с.
6. *Ситник С. М.* Операторы преобразования и их приложения // Исследования по современному анализу и математическому моделированию / Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 226–293.
7. *Ситник С. М.* Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина–Пуассона // Научные ведомости Белгородского государственного университета.—2010.—Вып. 18, № 5 (76).—С. 135–153.
8. *Ситник С. М.* Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений // Вестн. СамГУ. Естеств. серия.—2008.—Т. 67, № 8/1.—С. 237–248.
9. *Агранович З. С., Марченко В. А.* Обратная задача теории рассеяния.—Харьков: изд. ХГУ, 1960.—268 с.
10. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма — Лиувилля.—М.: Наука, 1984.—240 с.
11. *Шадан К., Сабатье П.* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния.—М.: Мир, 1980.—408 с.
12. *Левин Б. Я.* Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР.—1956.—Т. 106, № 2.—С. 187–190.
13. *Левитан Б. М.* Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН.—1951.—Т. 6, вып. 2.—С. 102–143.
14. *Сохин А. С.* Об одном классе операторов преобразования // Тр. физ.-тех. ин-та низких температур АН УССР.—1969.—Вып. 1.—С. 117–125.

15. *Сохин А. С.* Обратные задачи рассеяния для уравнений с особенностью // Тр. физ.-тех. ин-та низких температурур АН УССР.—1971.—Вып. 2.—С. 182–233.
16. *Сохин А. С.* Обратные задачи рассеяния для уравнений с особенностями специального вида // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.—1973.—№ 17.—С. 36–64.
17. *Сохин А. С.* О преобразовании операторов для уравнений с особенностью специального вида // Вестн. Харьковского ун-та.—1974.—№ 113.—С. 36–42.
18. *Сташевская В. В.* Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле // Уч. зап. Харьковского мат. об-ва.—1957.—№ 5.—С. 49–86.
19. *Ситник С. М.* Операторы преобразования для дифференциального выражения Бесселя.— Воронеж: Воронеж. ун-т, 1987.—28 с. Деп. в ВИНИТИ № 535–В87.
20. *Левитан Б. М.* Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка // Успехи мат. наук.—1949.—Т. 29, № 4:1.—С. 3–112.
21. *Левитан Б. М.* Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения.—М.: ГИФМЛ, 1962.— 324 с.
22. *Боровских А. В.* Формула распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды // Диф. уравнения.—2002.—Т. 38.—№ 6.—С. 758–767.
23. *Боровских А. В.* Метод распространяющихся волн // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.—2004.— Вып. 24.—С. 3–43.
24. *Ситник С. М.* Оператор преобразования и представление Йоста для уравнения с сингулярным потенциалом.—Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 1993.—21 с.—(Препринт).
25. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Оценки решений Йоста одномерного уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР.—1995.—Т. 340, № 1.—С. 18–20.
26. *Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами.—Самара: Изд-во СамГЭУ, 2008.—163 с.
27. *Маричев О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций.—Минск: Наука и техника.—1978.—312 с.

Статья поступила 11 октября 2010 г.

Ситник Сергей Михайлович
Воронежский институт МВД,
доцент кафедры высшей математики
РОССИЯ, 394065, Воронеж, пр. Патриотов, 53
E-mail: `mathsms@yandex.ru`

ON INTEGRAL REPRESENTATION TO SOLUTIONS FOR A DIFFERENTIAL EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Sitnik S. M.

We consider integral representations to solutions for a differential equation with singular coefficients with Bessel operator. An existence of such integral representations is proved by successive approximations using transmutation operators method. Unlike known results we consider potentials with strong singularities at the origin and also slightly improve well-known method of B. M. Levitan by more accurate calculation of Green function in terms of Legendre function. It leads to more precise estimates without unnecessary constants.

Key words: transmutation operator, Bessel operator, Green function, hypergeometric function, Legendre function.