

УДК 519.688, 517.18

ТЕТРАЦИЯ КАК СПЕЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Д. Ю. Кузнецов

Голоморфная тетрация (суперэкспонента) по основанию e и ее обратная функция (арктетрация) аппроксимированы элементарными функциями.

Ключевые слова: тетрация, суперфункция, функция Абеля, голоморфная функция, аналитическая функция, суперэкспонента, суперлогарифм, аккуратная аппроксимация функций, специальные функции, итерирование функций, нецелые итерации.

Введение

Тетрация или суперэкспонента определяется как голоморфное решение F уравнения

$$F(z + 1) = \exp_b(F(z)). \quad (1)$$

Такое уравнение рассматривалось с 1950-х гг. [1–10]. В частности, для «натурального» основания $b = e$. Термин «суперэкспонента», или sexp , указывает на то, что функция F является *суперфункцией* [9, 11] от экспоненты.

Вообще говоря, для некоторой функции H , которую можно назвать *передаточной функцией* [11, 12], суперфункция F есть голоморфное решение уравнения

$$F(z + 1) = H(F(z)). \quad (2)$$

Уравнение (1) является специальным случаем уравнения (2) для $H = \exp_b$. При этом умножение является суперфункцией сложения (прибавления константы), экспонента — суперфункцией от умножения на константу, а решение F уравнения (1) — суперфункцией от экспоненты, т. е. суперэкспонентой.

Специальный случай суперэкспоненты F , голоморфной хотя бы в правой части комплексной плоскости, я называю «тетрацией», $F = \text{tet}_b$, если эта функция удовлетворяет дополнительному условию

$$F(0) = 1. \quad (3)$$

Четыре примера таких функций показаны на рис. 1 для $b = \sqrt{2}$, $b = \exp(1/e)$, $b = 2$ и $b = e$.

Тетрация $\text{tet}_b(z)$ может интерпретироваться как результат z -кратного экспоненцирования единицы, по крайней мере для целых значений z :

$$\text{tet}_b(z) = \underbrace{\exp_b(\exp_b(\dots \exp_b(1)\dots))}_{z \text{ exponentiations}}. \quad (4)$$

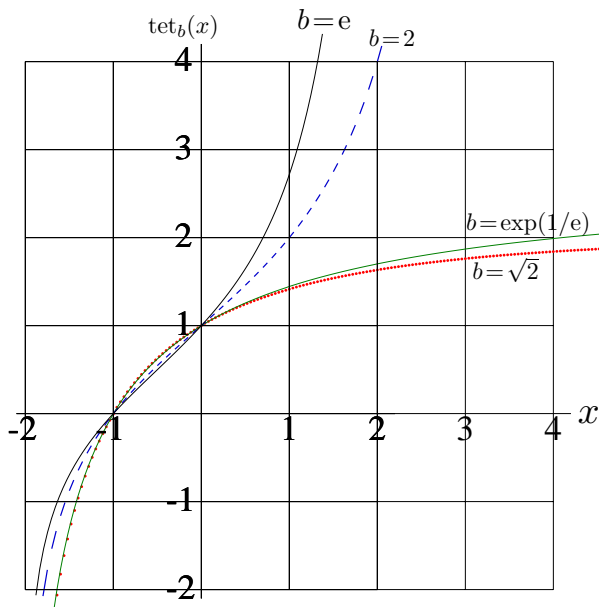


Рис. 1. Тетрация $\text{tet}_b(x)$ по основанию $b = e$ (толстая сплошная), $b = 2$ (пунктир), $b = \exp(1/e)$ (тонкая сплошная) и $b = \sqrt{2}$ (точки) как голоморфное решение уравнений (1), (2) для вещественных значений x .

Имя функции «тетрация» («tetra» значит «четыре») указывает, что эта функция является четвертым элементом последовательности функций (единичный инкремент, сложение, умножение, экспонента, тетрация, пентация, ...), в которой каждый элемент (кроме элемента номер ноль) является суперфункцией для предыдущего элемента и передаточной функцией для последующего элемента. Физические приложения суперфункций, которые обосновывают термин «передаточная функция», предложены в работах [8, 11, 12]; суперфункция и ее обратная функция позволяют определять нецелые итерации функций и, в частности, такие экзотические функции, как $\sqrt{\exp}$ Кнезера [1] и $\sqrt[1]{}$, описанный в работе [11].

Способ аппроксимации решения уравнения (1) зависит от b . При $1 < b \leq \exp(1/e)$ может использоваться так называемая *регулярная итерация* (*regular iteration*) [2, 3, 5–7, 9]. Для $b > \exp(1/e)$, решение можно вычислять через контурный интеграл [8], предполагая, что эта функция голоморфна на множестве

$$C = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2\}. \quad (5)$$

Такое представление позволяет выразить производную tet' и вычислять обратную функцию, т. е. арктетрацию $\text{ate} = \text{tet}^{-1}$. Для такой обратной функции может использоваться обозначение «суперлогарифм», slog , хотя tet^{-1} и не является суперфункцией от логарифма. Арктетрация удовлетворяет уравнению

$$\text{ate}(\exp(z)) = \text{ate}(z) + 1. \quad (6)$$

Единственность решения ate , биголоморфного на множестве

$$G = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq \text{Re}(L); |z| < |L|\}, \quad (7)$$

исследуется в работах [8, 10]. Здесь $L \approx 0.318 + 1.337i$ есть стационарная точка логарифма, т. е. решение уравнения $L = \log(L)$. В языке программирования Maple константа L может быть представлена как `conjugate(-LambertW(-1))`, а в языке Mathematica эта константа выражается как `Conjugate[-ProductLog[-1]]`.

В этой статье я предлагаю несложные аппроксимации функций tet и ate , которые могут быть прототипами для их численного `complex < double >` представления. Здесь я рассматриваю только случай $b = e$; $\log = \ln = \log_e$ и $H = \exp = \exp_e$. Тетрация при других значениях основания $b > e^{1/e}$ может быть рассмотрена аналогичным образом. Ниже предлагается аппроксимация для функции $\text{tet} = \text{tet}_e$, показанная на рис. 1 толстой сплошной кривой, но эта аппроксимация не ограничивается вещественными значениями аргумента. Карты тетрации и арктетрации в комплексной плоскости показаны на рис. 2.

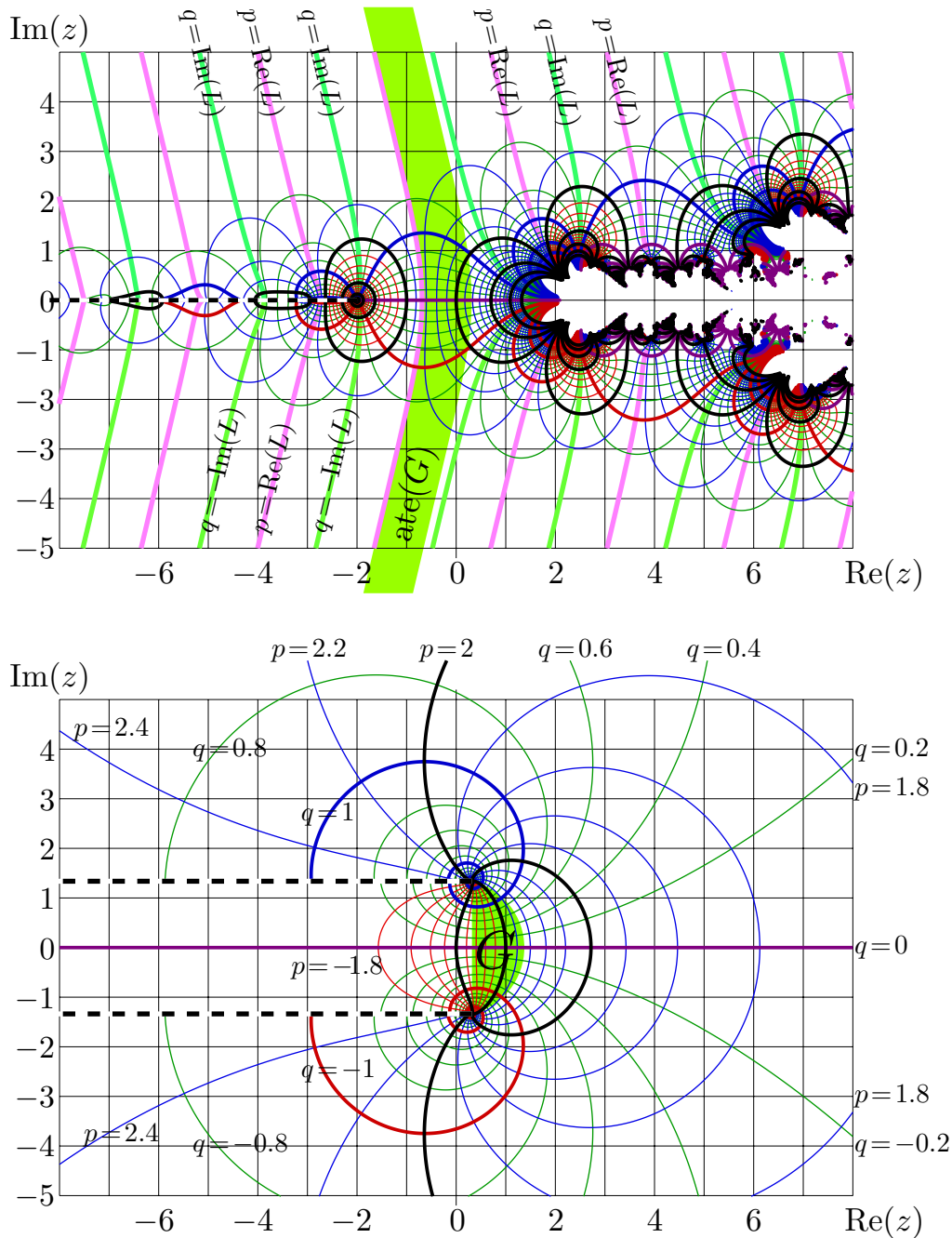


Рис. 2. Функции $f = \text{tet}(z)$ и $f = \text{ate}(z)$ в комплексной z -плоскости. Показаны уровни $p = \text{Re}(f) = \text{const}$ и $q = \text{Im}(f) = \text{const}$.

2. Свойства функций tet и ate

В этом параграфе обсуждаются свойства функций $f = \text{tet}(z)$ и $f = \text{ate}(z)$, следующие из их представления через контурный интеграл [8]. Поведение этих функций в комплексной плоскости z показано на рис. 2 с помощью линий $p = \text{Re}(f) = \text{const}$ и $q = \text{Im}(f) = \text{const}$. Уровни целых значений p и q показаны толстыми темными линиями. Толстые светлые линии показывают уровни $p = \text{Re}(L)$ и $|q| = \text{Im}(L)$. Тонкие линии показывают промежуточные уровни, затененный серп — область G по формуле (7). Верхний угол этого серпа есть L , а нижний L^* . Затененная полоса показывает домен $\text{ate}(G)$.

Функция tet имеет точку ветвления -2 и разрез вдоль вещественной оси до $-\infty$. Положение этого разреза соответствует условию вещественности функции, т. е. $\text{tet}(z^*) = \text{tet}(z)^*$.

Функция ate имеет две точки ветвления, и необходимо выбрать положение линий разреза. В работе [8], линии разреза соответствуют уровню $\text{Re}(\text{ate}(z)) = -2$, при этом разрезы «накручиваются» вокруг точек ветвления, и вычисление положений этих разрезов замедляет алгоритм вычисления арктетрации. Поэтому в этой работе линии разреза помещены вдоль прямых, параллельных вещественной оси.

Функция tet асимптотически приближается к своим предельным значениям L в верхней полуплоскости и L^* в нижней полуплоскости. Это приближение видно на рис. 2 в той части, где линии $p = \text{Re}(L)$ почти параллельны линиям $q = \text{Im}(L)$. Стремление к значению L экспоненциальное [8]. Аппроксимация тетрации $\text{tet}(z)$ при больших значениях $\text{Im}(z)$ должна использовать это свойство. В левой части комплексной плоскости, а также вблизи вещественной оси, кроме уравнения (1) функция $f = \text{tet}$ удовлетворяет также «обратному» соотношению, т. е.

$$\log(f(z+1)) = f(z) \quad \forall z \in C : |\text{Im}(f(z))| < \pi. \quad (8)$$

Уравнения (1) и (8) упрощают аппроксимирование функций. Для численного представления тетрации, достаточно аппроксимировать эту функцию в некоторой связной области комплексной плоскости, которая простирается от $-i\infty$ до $i\infty$ так, что ширина ее сечения при каждом значении $\text{Im}(z) = \text{const}$ превышает единицу. Эта область может частично перекрываться с изображением $\text{tet}(G)$ домена G . В частности, этот район может быть полоской $|\text{Re}(z)| \leq 1/2$, использованной в работе [8], но может быть и «альтернативной полоской» $-1 \leq \text{Re}(z) \leq 0$, предложенной для проверки аппроксимации. Аналогично, для представления функции ate , достаточно аппроксимировать ее в некоторой области, которая простирается от L^* до L так, что экспонента от левого края области попадает внутрь области (или хотя бы на правый край этой области).

Ниже, я предлагаю аппроксимации, построенные на основе дискретного представления этих функций через контурный интеграл [8]. Затем, свойства функций tet и ate используются для обобщения этих представлений на всю комплексную плоскость

3. Численное представление тетрации: fima

Для того, чтобы отличать функции tet и ate от их аппроксимаций, я даю специальное имя каждой аппроксимации. Аппроксимации функции tet при больших значениях мнимой части аргумента получается из асимптотического разложения

$$\text{tet}(z) = L + \sum_{n,m} \mathcal{A}_{m,n} \exp(Lnz + \alpha mz). \quad (9)$$

Подставляя такое разложение в уравнение (1) и считая $\exp(Lz)$ малым параметром, получаю значение $\alpha = 2\pi i$ и уравнения для коэффициентов \mathcal{A} .

Учет нескольких слагаемых в разложении (9) дает асимптотическую аппроксимацию, назову ее fima :

$$\text{fima}(z) = \sum_{n=0}^N a_n \varepsilon^n + \beta \varepsilon \exp(2\pi i z), \quad (10)$$

где β является константой, малый параметр

$$\varepsilon = \exp(Lz + R), \quad (11)$$

а коэффициенты

$$a_0 = L \approx 0.3181315052047641353 + 1.3372357014306894089 i, \quad (12)$$

$$a_1 = 1, \quad (13)$$

$$a_2 = \frac{1/2}{L-1} \approx -0.1513148971556517359 - 0.2967488367322413067 i, \quad (14)$$

$$a_3 = \frac{a_2 + 1/6}{L^2 - 1} = \frac{2 + L}{6(L-1)(L^2 - 1)} \approx -0.03697630940906762 + 0.09873054431149697 i, \quad (15)$$

$$a_4 = \frac{6 + 6L + 5L^2 + L^3}{24(L-1)^3(L+1)(L^2 + L + 1)} \approx 0.0258115979731401398 - 0.017386962126530755 i, \quad (16)$$

$$a_5 = \frac{24 + 36L + 46L^2 + 40L^3 + 24L^4 + 9L^5 + L^6}{120(L-1)^4(L+1)^2(1 + L + 2L^2 + L^3 + L^4)} \approx -0.0079444196 + 0.00057925018 i. \quad (17)$$

Параметр R вводится для того, чтобы положить $a_1 = 1$. Тогда получаются несложные выражения и других коэффициентов a через стационарные значение L логарифма. Значение этого параметра выбирается так, чтобы при фиксированном $\text{Re}(z)$ и больших значениях $\text{Im}(z) \gg 1$ имела место асимптотика

$$\text{tet}(z) = L + \exp(Lz + R) + \mathcal{O}(\exp(2Lz)). \quad (18)$$

Увеличение количества слагаемых в полиноме (10) и добавление полиномов от ε с множителями $\exp(2\pi i z)$, $\exp(4\pi i z)$, и т. д., улучшает аппроксимацию, но для алгоритма с 14-ю десятичными знаками, описанного ниже, достаточно в сумме (10) взять 6 слагаемых, полагая $N = 5$, и учесть одно слагаемое, пропорциональное $\exp(2\pi i z)$.

Я оцениваю параметры R и β , аппроксимируя численное решение [8]:

$$R \approx 1.0779614375280 - 0.94654096394782 i, \quad (19)$$

$$\beta \approx 0.12233176 - 0.02366108 i. \quad (20)$$

Можно ожидать, что эти значения аппроксимируют фундаментальные математические константы. Приближение fima по формуле (10) показано на верхнем графике рис. 3 в тех же обозначениях, что и на рис. 2. В нижней части рис. 3 показано согласие

$$D_0 = -\lg \left| \exp(\text{fima}(z-1)) - \text{fima}(z) \right|. \quad (21)$$

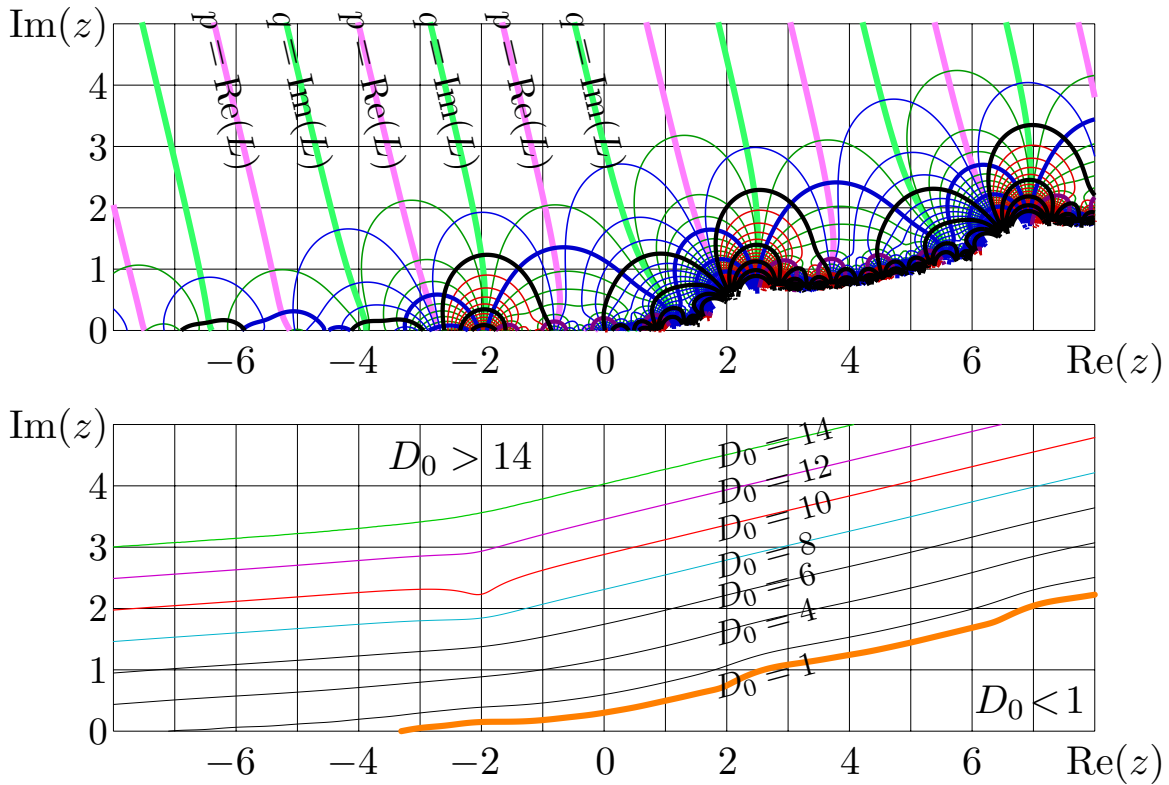


Рис. 3. Аппроксимация $f = \text{fima}(z)$ по формуле (10) и согласие D_0 по формуле (21) в комплексной z -плоскости.

Эта функция выражает невязку при подстановке $F \rightarrow \text{fima}$ в уравнение (1). Уровень $D = 1$ показан очень толстой светлой, самой нижней линией; уровни $D = 2, 4, 6, 8$ — тонкими черными линиями; уровни $D = 10, 12, 14$ — толстыми линиями. Функция согласия указывает, сколько верных десятичных цифр можно ожидать получить в этом приближении. В частности, для значений аргумента над всеми проведенными линиями, можно ожидать получить по крайней мере 14 корректных десятичных знаков, в то время как для значений под нижней (самой толстой) линией, даже первый десятичный знак такого приближения сомнителен.

Вместе с «сопряженным» приближением $\text{fima}(z^*)^*$, аппроксимация (10) покрывает значительную часть комплексной плоскости, но не годится вблизи вещественной оси.

4. Аппроксимация тетрации: разложение в нуле

Ряд Тэйлора имеет радиус сходимости, равный расстоянию от точки разложения до ближайшей сингулярности. В случае тетрации, конечная сумма ряда Маклорена дает приближение

$$\text{naiv}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n z^n, \quad \text{tet}(z) = \text{naiv}(z) + \mathcal{O}(z^N), \quad (22)$$

аппроксимирующее тетрацию при $|z| < 2$. Эта аппроксимация показана на рис. 4. Аппроксимации первых коэффициентов c_n представлены в первом столбце таблицы 1.

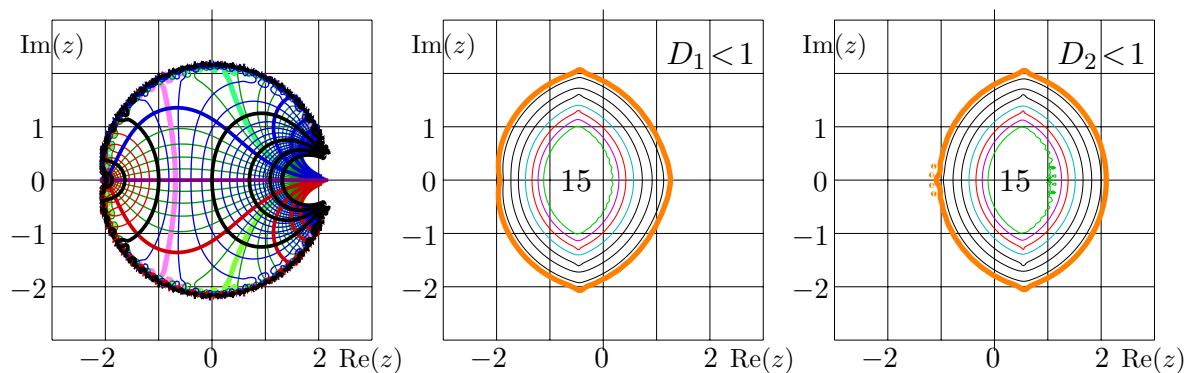


Рис. 4. Аппроксимация $f = \text{naiv}(z)$ оборванным рядом Тэйлора в нуле по формуле (22) тетрации tet , левый график; согласия D_1 и D_2 по формулам (23) и (24), центральный и правый графики.

Таблица 1

Коэффициенты в разложениях (22), (25) и (29)

n	c_n	s_n	$\text{Re}(t_n)$	$\text{Im}(t_n)$
0	1.000000000000000	0.30685281944005	0.37090658903229	1.33682167078891
1	1.09176735125832	0.59176735125832	0.01830048268799	0.06961107694975
2	0.27148321290170	0.39648321290170	-0.04222107960160	0.02429633404907
3	0.21245324817626	0.17078658150959	-0.01585164381085	-0.01478953595879
4	0.06954037613999	0.08516537613999	0.00264738081895	-0.00657558130520
5	0.04429195209047	0.03804195209047	0.00182759574799	-0.00025319516391
6	0.01473674209639	0.01734090876306	0.00036562994770	0.00028246515810
7	0.00866878181723	0.00755271038865	0.00002689538943	0.00014180498091
8	0.00279647939839	0.00328476064839	-0.00003139436775	0.00003583704949
9	0.00161063129058	0.00139361740170	-0.00001376358453	-0.00000183512708
10	0.00048992723148	0.00058758348148	-0.00000180290980	-0.00000314787679
11	0.00028818107115	0.00024379186661	0.00000026398870	-0.00000092613311
12	0.00008009461254	0.00010043966462	0.00000024961828	-0.00000013664223
14	0.00001218379034	0.00001654344436	0.00000000637479	0.00000002270476
15	0.00000866553367	0.00000663102846	-0.00000000341142	0.00000000512289
16	0.00000168778232	0.00000264145664	-0.00000000162203	0.00000000031619
17	0.00000149325325	0.00000104446533	-0.00000000038743	-0.00000000027282
18	0.00000019876076	0.00000041068839	-0.00000000001201	-0.00000000013440
19	0.00000026086736	0.00000016048059	0.00000000002570	-0.00000000002543
20	0.00000001470995	0.00000006239367	0.00000000000935	0.00000000000045
21	0.00000004683450	0.00000002412797	0.00000000000170	0.000000000000186
22	-0.00000000154924	0.00000000928797	-0.00000000000005	0.000000000000071
23	0.00000000874151	0.00000000355850	-0.00000000000016	0.000000000000012
24	-0.00000000112579	0.00000000135774	-0.00000000000005	-0.000000000000001
25	0.00000000170796	0.00000000051587	-0.00000000000001	-0.000000000000001

Нулевой столбец таблицы 1 указывает номер n коэффициента, первый столбец — значение коэффициента c_n в формуле (22).

Точность аппроксимации (22) может быть охарактеризована функциями согласия:

$$D_1 = -\lg |\exp(\text{naiv}(z-1)) - \text{naiv}(z)|, \quad (23)$$

$$D_2 = -\lg |\log(\text{naiv}(z+1)) - \text{naiv}(z)|. \quad (24)$$

Эти функции построены на центральном и правом графиках рис. 4. Знак «15» указывает область, где согласие больше 14. Рисунок указывает, что при $|z| \leq 1$, такая конечная сумма ряда Тэйлора дает порядка 15 значащих цифр.

Чтобы расширить область аппроксимации, имеет смысл «выключить» сингулярность в точке -2 , раскладывая функцию $\text{tet}(z) - \log(z + 2)$ вместо функции $\text{tet}(z)$. Такое разложение дает приближение

$$\text{maclo}(z) = \log(z + 2) + \sum_{n=0}^{N-1} s_n z^n; \quad (25)$$

$$\text{tet}(z) = \text{maclo}(z) + \mathcal{O}(z^N). \quad (26)$$

Название `maclo` (MAClaurin expansion with LOgarithm) указывает, что использованы разложение Маклорена и логарифм. Приближения коэффициентов разложения представлены во втором столбце таблицы 1.

Функция `maclo` показана на рис. 5 для $N = 101$. При построении рисунка использован генератор [14].

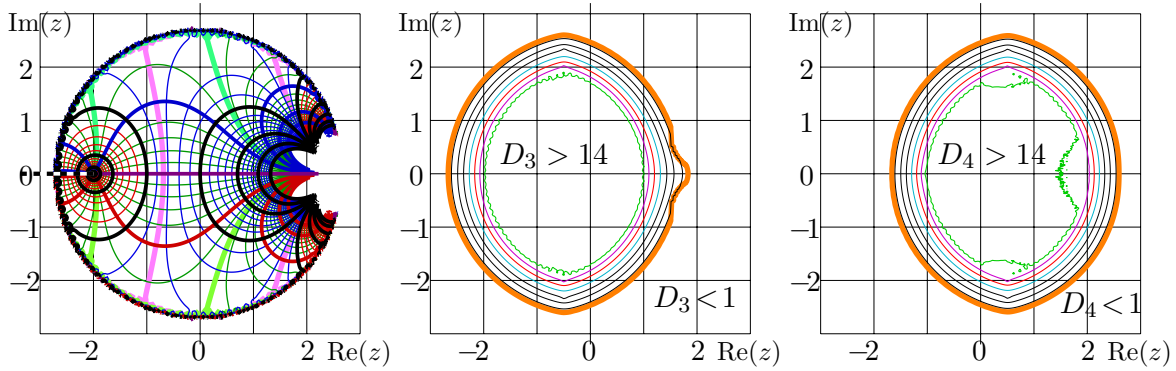


Рис. 5. Функция $f = \text{maclo}(z)$ по формуле (25) при $N = 101$ в комплексной z -плоскости, слева; согласия D_3 и D_4 по формулам (27) и (28), центр и справа.

Область аппроксимации тетрации функцией `maclo` шире, чем в случае непосредственного разложения тетрации в нуле. В правой части того же рис. 5 показаны согласия

$$D_3 = -\lg \left| \exp(\text{maclo}(z + 1)) - \text{maclo}(z) \right|, \quad (27)$$

$$D_4 = -\lg \left| \log(\text{maclo}(z - 1)) - \text{maclo}(z) \right|. \quad (28)$$

В центральной области невязки при подстановке $\text{tet} \rightarrow \text{maclo}$ в уравнения (1), (8) имеют порядок величины 10^{-15} .

5. Разложение Тэйлора функции tet в точке $3i$

Карты согласий D на рис. 3 и 5 указывают, что в области значений $z \approx 3i$, каждая из аппроксимаций `fima(z)` и `maclo(z)` дает мало значащих цифр. В этой секции предложено разложение Тэйлора функции $\text{tet}(z)$ в точке $z = 3i$; назову такую аппроксимацию «tai» (TAylor expansion centered at the Imaginary axis):

$$\text{tai}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} t_n (z - 3i)^n. \quad (29)$$

Коэффициенты этого разложения оценены в последних двух столбцах таблицы 1. Для $N = 51$ функция tai построена на рис. 6.

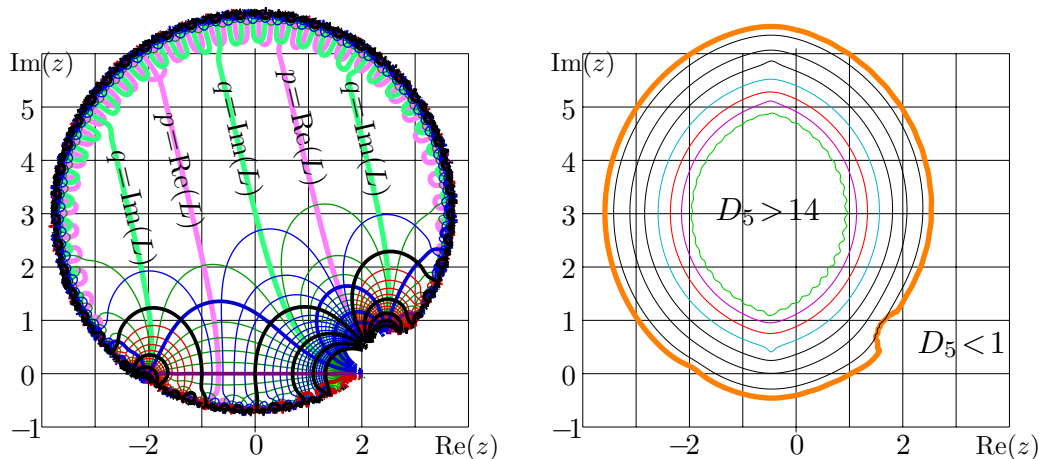


Рис. 6. Функция $f = \text{tai}(z)$ по формуле (29) для $N = 51$ и согласие D_5 по формуле (30).

Рисунок построен с помощью генератора [15]. Погрешность аппроксимации решения уравнений (1), (8) характеризуется согласием

$$D_5 = -\lg |\log(\text{tai}(z + 1)) - \text{tai}(z)|. \quad (30)$$

Это согласие построено в правой части рис. 6.

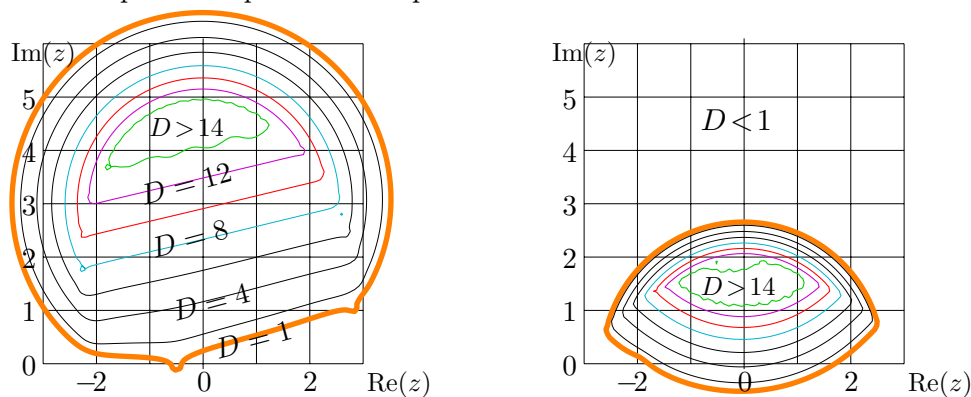


Рис. 7. Сравнение аппроксимации tai по формуле (29) с аппроксимацией fima по формуле (10), слева, и с аппроксимацией maclo по формуле (25), справа: согласия $D = D_6$ и $D = D_7$ по формулам (31), (32) в комплексной z -плоскости.

Взаимное согласие аппроксимаций может быть характеризовано функциями:

$$D_6 = -\lg |\text{fima}(z) - \text{tai}(z)|, \quad (31)$$

$$D_7 = -\lg |\text{maclo}(z) - \text{tai}(z)|. \quad (32)$$

Эти функции показаны на рис. 7. В центральных областях невязка не превышает 10^{-14} . На основе этого рисунка я предлагаю следующую аппроксимацию:

$$\text{fse}(z) = \begin{cases} \text{fima}(z), & 4.5 < \text{Im}(z), \\ \text{tai}(z), & 1.5 < \text{Im}(z) \leq 4.5, \\ \text{maclo}(z), & -1.5 \leq \text{Im}(z) \leq 1.5, \\ \text{tai}(z^*)^*, & -4.5 \leq \text{Im}(z) < -1.5, \\ \text{fima}(z^*)^*, & \text{Im}(z) < -4.5. \end{cases} \quad (33)$$

Эту аппроксимацию интересно сравнить с результатами, опубликованными ранее. Ниже анализируется отклонение $fse(z) - F_4(z)$, где $F_4(z)$ есть аппроксимация, полученная с помощью контурного интеграла [8]. В левой части рис. 8 показано согласие

$$D_8 = -\lg |fse(z) - F_4(z)| \quad (34)$$

аппроксимации fse с аппроксимацией F_4 тетрации через контурный интеграл [8].

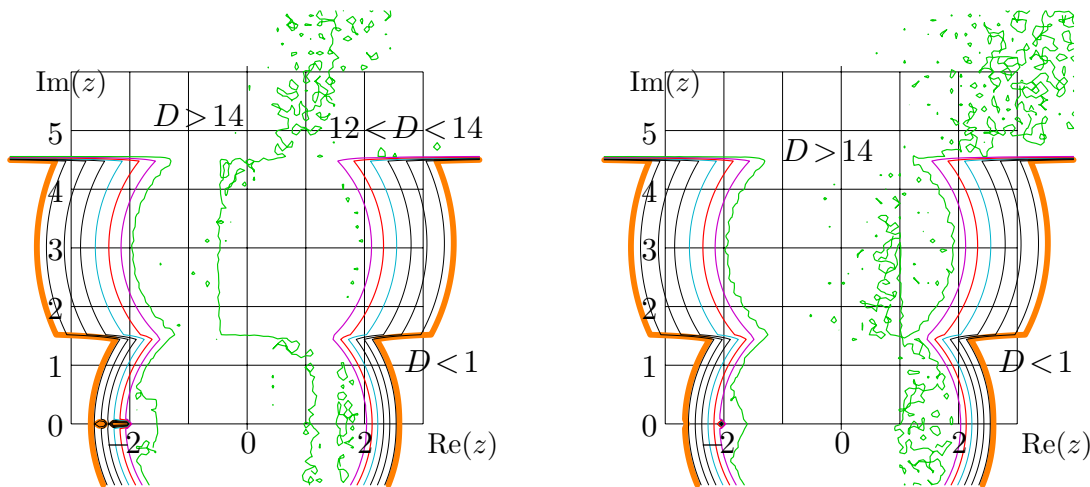


Рис. 8. Согласие $D = D_8$ по формуле (34), слева; аналогичное согласие для контурного интеграла со сдвинутой на -0.5 базовой областью, справа.

Рис. 8 выявляет дефекты каждой из аппроксимаций. Скачки при $\text{Im}(z) = 1.5$ и при $\text{Im}(z) = 2.5$ вызваны переходом от функции *maclo* к функции *tai* и от функции *tai* к функции *fima* в комбинации FSE. Скачки при полуцелых значениях $\text{Re}(z)$ вызваны разрывами функции F_4 , которая расширяет начальное приближение, справедливое для $|\text{Re}(z)| < 1$, используя $|\text{Re}(z)| \leq 1/2$ в качестве базового интервала. Ошибки округления приводят к нерегулярной структуре. По крайней мере внутри полосы $|\text{Re}(z)| < 1.5$ взаимные отклонения этих аппроксимаций имеют порядок величины 10^{-14} .

В правой части рис. 8 построено согласие для функции F_5 , которая аналогична функции F_4 , но базовый интервал сдвинут на $-1/2$. Аппроксимация F_5 имеет скачки при целых значениях вещественной части. Эти скачки тоже малы; согласие во всяком случае не хуже, чем для функции F_4 .

Таким образом, различие всех трех аппроксимаций имеет порядок величины 10^{-14} . На основе рис. 7, 8 я предлагаю финальную аппроксимацию FSE (Fast Super Exponential) тетрации *tet*:

$$FSE(z) = \begin{cases} FIMA(z), & 4.5 < \text{Im}(z), \\ TAI(z), & 1.5 < \text{Im}(z) \leq 4.5, \\ MACLO(z), & -1.5 \leq \text{Im}(z) \leq 1.5, \\ TAI(z^*)^*, & -4.5 \leq \text{Im}(z) < -1.5, \\ FIMA(z^*)^*, & \text{Im}(z) < -4.5, \end{cases} \quad (35)$$

где

$$\text{FIMA}(z) = \begin{cases} \text{fima}(z), & \text{Im}(z) > 4 + 0.2379 \text{Re}(z), \\ \exp(\text{FIMA}(z - 1)), & \text{Im}(z) \leq 4 + 0.2379 \text{Re}(z), \end{cases} \quad (36)$$

$$\text{TAI}(z) = \begin{cases} \text{tai}(z), & |\text{Re}(z)| \leq 0.5, \\ \log(\text{TAI}(z + 1)), & \text{Re}(z) < -0.5, \\ \exp(\text{TAI}(z - 1)), & \text{Re}(z) > 0.5, \end{cases} \quad (37)$$

$$\text{MACLO}(z) = \begin{cases} \text{tai}(z), & |\text{Re}(z)| \leq 0.5, \\ \log(\text{MACLO}(z + 1)), & \text{Re}(z) < -0.5, \\ \exp(\text{MACLO}(z - 1)), & \text{Re}(z) > 0.5. \end{cases} \quad (38)$$

Эта аппроксимация дает по меньшей мере 14 верных десятичных знаков голоморфной тетрации tet и согласуется с результатами [8].

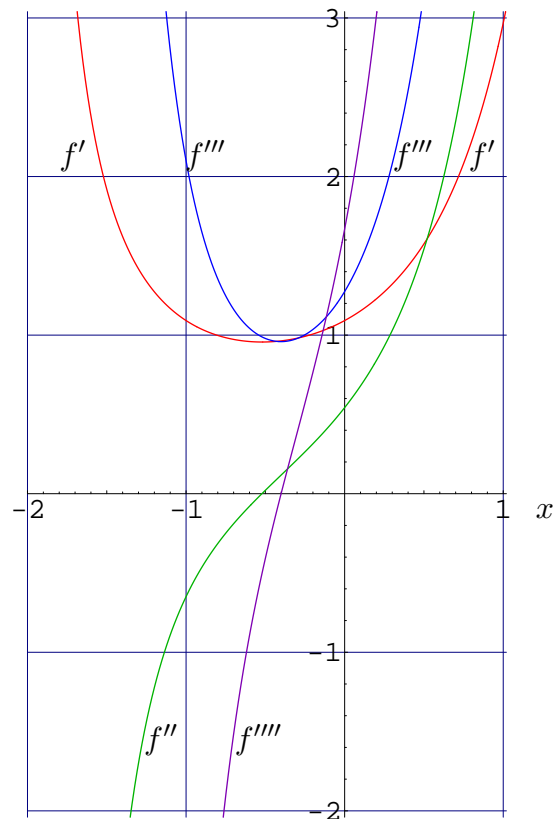


Рис. 9. Первые четыре производные функции $f = \text{tet}(x)$ для вещественных значений x .

Насколько я могу судить, эта аппроксимация быстрее и точнее всех аппроксимаций голоморфной тетрации, публиковавшихся ранее. Большое число слагаемых сохранено в аппроксимациях (29) и (25) для того, чтобы обеспечить их хорошее перекрытие на рис. 7 и 8. На конечной стадии имплементации количество слагаемых в аппроксимациях рядов может быть уменьшено без потери точности. Особенно это относится к вычислению тетрации на вещественной оси: достаточно обеспечить хорошую аппроксимацию функции $\text{tet}(z)$ для $|z| \leq 1/2$, что составляет всего четвертую часть от радиуса круга, в котором аппроксимация тетрации функцией maclo дает 14 знаков.

По просьбе коллег, я перевел алгоритм быстрого вычисления тетрадии и арктетрадии с языка C++ на язык Mathematica. В качестве примера использования, на рис. 9 с этим алгоритмом построены первая, вторая, третья и четвертая производные тетрадии, как функции вещественного аргумента. Код, генерирующий этот рисунок, доступен на ситизендиуме [16]. В принципе, с тем же кодом (т. е. на языке Mathematica) можно получать и другие рисунки для тетрадии и арктетрадии по основанию e и, в частности, карты этих функций в комплексной плоскости.

6. Аппроксимация арктетрадии ate , функция FSL

Обратная функция тетрадии, т. е. арктетрадия $\text{ate} = \text{tet}^{-1}$, удовлетворяет уравнениям:

$$\text{ate}(z) = \text{ate}(\exp(z)) - 1, \quad (39)$$

$$\text{ate}(z) = \text{ate}(\log(z)) + 1, \quad (40)$$

по крайней мере, пока $z \in G$. Кроме того, $\text{ate}(1) = 0$. Эта функция может быть представлена как численное решение уравнения $\text{tet}(\text{ate}(z)) = z$; однако, такое представление существенно медленнее, чем аппроксимация с помощью подходящих элементарных функций.

Первая (и наивная) попытка численного представления функции ate — это, естественно, разложение Тэйлора в единице. Коэффициенты такого разложения можно найти, обращая ряд paiv по формуле (22). Радиус сходимости такого обращенного ряда есть $|L| \approx 1.5$, причем аппроксимация особенно плоха в окрестности стационарных точек L и L^* логарифма. Лучше разложить функцию

$$\text{ate}(z) - \frac{\log(z - L)}{L} - \frac{\log(z - L^*)}{L^*} \quad (41)$$

в точке $z = 1$. Такое разложение ведет к аппроксимации

$$\text{fsl}(z) = \frac{\log(z - L)}{L} + \frac{\log(z - L^*)}{L^*} + \sum_{n=0}^{N-1} u_n (z - 1)^n; \quad (42)$$

$$\text{ate}(z) = \text{fsl}(z) + \mathcal{O}((z-1)^N) \quad (43)$$

Приближенные значения первых коэффициентов u этого разложения представлены в таблице 2. Аппроксимация fsl при $N = 70$ показана на рис. 10.

Формально, разложение Тэйлора функции (41) в точке $z = 1$ имеет тот же радиус сходимости, что и разложение Тэйлора функции ate . Однако практически, при численном представлении функции, аппроксимация по формуле (42) сходится существенно быстрее, чем непосредственное разложение Тэйлора функции ate . Функция fsl аппроксимирует ate даже на границе круга сходимости ряда и, в частности, вблизи концов серпа G , т. е. вблизи точек L и L^* . Функция fsl имеет те же точки ветвления L и L^* , что и функция ate , и тоже принимает бесконечные значения в этих точках.

Таблица 2

Коэффициенты u_n в разложении (42)

n	u_n	n	u_n	n	u_n
0	1.41922521550451	10	0.00000003111805	20	0.00000000002293
1	-0.02606629029752	11	0.00000002940887	21	-0.00000000002462
2	0.00173304781808	12	-0.00000001896929	22	0.00000000000666
3	-0.00001952130725	13	0.00000000351784	23	0.00000000000322
4	-0.00006307006450	14	0.00000000204270	24	-0.00000000000354
5	0.00002567895998	15	-0.00000000171995	25	0.00000000000096
6	-0.00000559010027	16	0.00000000039882	26	0.00000000000051
7	-0.00000007279712	17	0.00000000019328	27	-0.00000000000055
8	0.00000065148872	18	-0.00000000019113	28	0.00000000000014
9	-0.00000027698138	19	0.00000000004947	29	0.00000000000009

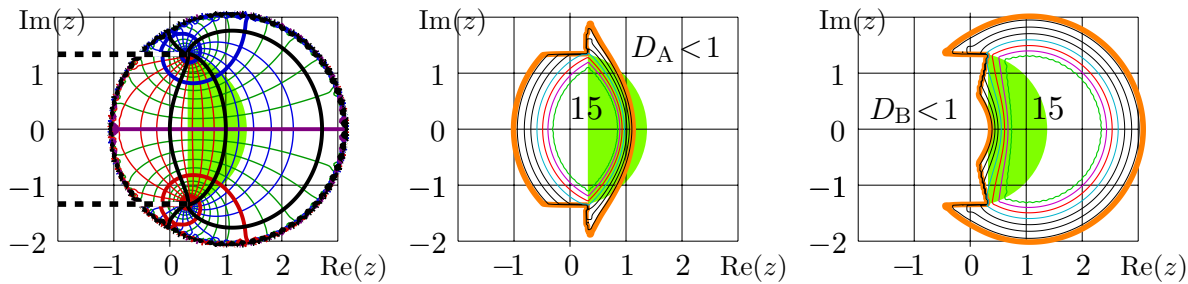


Рис. 10. Функция $fsl(z)$ по формуле (42), слева; согласия по формулам (44) и (45), центр и справа; область G по формуле (7) затенена.

Чтобы оценить невязки при подстановке $ate \rightarrow fsl$ в уравнения (39), (40) согласия

$$D_A = -\lg \left| fsl(\exp(z)) - 1 - fsl(z) \right|, \quad (44)$$

$$D_B = -\lg \left| fsl(\log(z)) + 1 - fsl(z) \right| \quad (45)$$

построены на центральном и правом графиках рис. 10. Как и раньше, символ «15» указывает область, где согласие лучше четырнадцати. (Внутри внутренних контуров, невязки не превышают 10^{-14} .)

Область аппроксимации может быть расширена с помощью функции

$$FSE(z) = \begin{cases} fsl(z), & |\operatorname{Im}(z)| < \operatorname{Im}(L) \ \&, \\ & |z-1| \leq |\log(z) - 1| \ \& \ |z-1| \leq |\exp(z) - 1|, \\ FSL(\exp(z)) - 1, & |\operatorname{Im}(z)| < \operatorname{Im}(L) \ \& \ |z-1| > |\exp(z) - 1|, \\ FSL(\log(z)) + 1, & |\operatorname{Im}(z)| \geq \operatorname{Im}(L) \ \text{or} \ |z-1| > |\log(z) - 1|. \end{cases} \quad (46)$$

Расширение (46) позволяет накрыть всю комплексную плоскость с помощью одной единственной аппроксимации элементарной функцией (42). Чтобы проверить взаимное соответствие аппроксимаций FSE и FSL, рассмотрим согласия:

$$D_c = -\lg \left| FSL(FSE(z)) - z \right|, \quad (47)$$

$$D_d = -\lg \left| FSE(FSL(z)) - z \right|. \quad (48)$$

Эти согласия показаны на рис. 11.

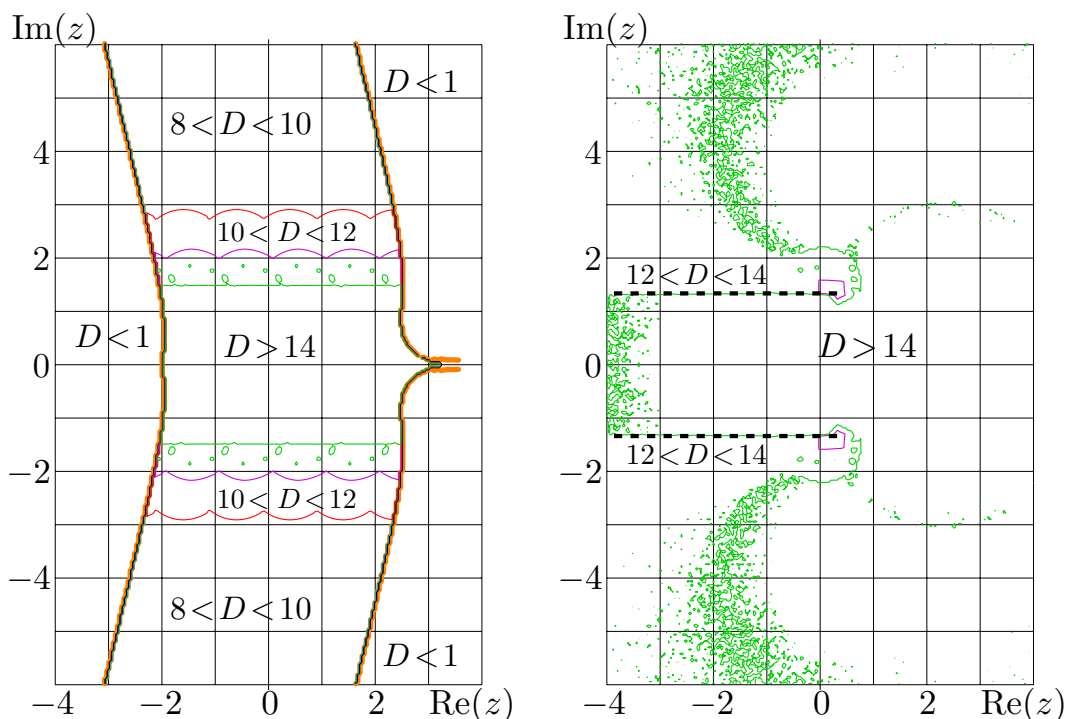


Рис. 11. Согласия аппроксимаций FSE and FSL по формуле (47), слева, и по формуле (48), справа.

Рисунок подтверждает хорошую точность аппроксимации; ее погрешность сравнима с ошибками округления при использовании переменных `complex(double)`.

Заключение

Разработан численный алгоритм FSE по формуле (35) для вычисления голоморфной тетрации (суперэкспоненты) по основанию e . Предложен также алгоритм FSL по формуле (46) для вычисления обратной функции. Пока эти алгоритмы самые точные и самые быстрые; они могут быть прототипами для численной реализации тетрации и арктетрации в компиляторах следующего поколения.

Благодарность. Генрику Траппманну (Henryk Trappmann) за помощь и критику.

Литература

1. Kneser H. Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\varphi(\varphi(x)) = e^x$ und verwandter Funktionalgleichungen // J. für die reine und angewandte Math.—1950.—Vol. 187.—P. 56–67.
2. Szekeres G. Regular iteration of real and complex functions // Acta Math.—1958.—Vol. 100.—P. 203–258.
3. Szekeres G. Fractional iteration of exponentially growing function // J. Austral. Math. Soc.—1961.—Vol. 2.—P. 301–320.
4. Knoebel R. A. Exponential reiterated // Amer. Math. Monthly.—1981.—Vol. 88.—P. 235–252.
5. Bromer N. Superexponentiation // Math. Mag.—1987.—Vol. 60, № 3.—P. 169–174.
6. Walker P. Infinitely differentiable generalized logarithmic and exponential functions // Math. of Comp.—1991.—Vol. 196.—P. 723–733.
7. Walker P. On the solutions of an Abelian functional equation // J. Math. Anal. and Appl.—1991.—Vol. 155, № 1.—P. 93–110.

8. Kouznetsov D. Solution of $F(z+1) = \exp(F(z))$ in complex z -plane // Math. of Comp.—2009.—Vol. 78.—P. 1647–1670.
9. Kouznetsov D., Trappmann H. Portrait of the four regular super-exponentials to base $\sqrt{2}$ // Math. of Computation.—2010.—Vol.79.—P. 1727–1756.
10. Trappmann H., Kouznetsov D. Uniqueness of analytic Abel functions in absence of a real fixed point.—2010.—(to appear). Preprint: URL<http://www.ils.uec.ac.jp/dima/PAPERS/2009uniabel.pdf>
11. Кузнецов Д., Траппманн Г. Суперфункции и квадратный корень из факториала // Вестн. Московского университета. Сер. 3. Физика и Астрономия.—2010.—Т. 65, № 1.—С. 8–14.
12. Кузнецов Д. Континуальное обобщение логистического отображения // Вест. Московского университета. Сер. 3. Физика и астрономия.—2010.—Vol. 65, № 2.—С. 24–31.
URL: <http://www.springerlink.com/content/u712vtp4122544x4>
13. Код для рис. 4:
<http://protect\kern-.1667em\relax/en.citizendium.org/wiki/TetrationPolynomial25power.jpg/code>.
14. Код для рис. 5:
<http://protect\kern-.1667em\relax/en.citizendium.org/wiki/TetrationApproLP100.jpg/code>.
15. Код для рис. 6:
<http://protect\kern-.1667em\relax/en.citizendium.org/wiki/TetrationTailorExpansion3ipower25.jpg/code>.
16. Код для рис. 9:
<http://protect\kern-.1667em\relax/en.citizendium.org/wiki/TetrationDerivativesReal.jpg/code>.
17. Код для рис. 10:
<http://protect\kern-.1667em\relax/en.citizendium.org/wiki/SLOGappro50.jpg/code>.

Статья поступила 16 февраля 2009 г.

КУЗНЕЦОВ ДМИТРИЙ ЮРЬЕВИЧ
Институт лазерных наук
Университет электро-коммуникаций,
научный сотрудник
1-5-1 Chofugaoka, Chofushi, Tokyo, 182-8585, Japan
E-mail: [dima\(at\)ils.uec.ac.jp](mailto:dima(at)ils.uec.ac.jp)

TETRATIONAL AS SPECIAL FUNCTION

Kouznetsov D.

Holomorphic tetrational (superexponential) to the base e and its inverse function (arctetrational) are approximated with elementary functions.

Key words: tetrational, superfunction, Abel equation, Abel function, holomorphic extension, analytic continuation, numerical implementation, special functions, Taylor expansion, superexponential, arctetrational, superlogarithm, non-integer iteration.