Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 1, С. 53–67

УДК **539.3**

ОБОСНОВАНИЕ ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ЕСТЕСТВЕННО–ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ[1]

Ю. А. Устинов

В работе дается математическое обоснование принципа Сен-Венана для естественно-закрученного стержня.

Ключевые слова: принцип Сен-Венана, спектральная задача, собственные значения, элементарные решения, обобщенная ортогональность.

Введение

В 1856 г. были опубликованы два знаменитых мемуара Сен-Венана [1, 2], заложившие основы прикладной теории упругости (широкому кругу читателей на русском языке они стали доступны благодаря переводу Г. Ю. Джанелидзе [3]). Результаты исследований, изложенные в этих трудах, под названием «задачи Сен-Венана» вошли практически во все учебники по теории упругости, начиная с изданной в 1862 г. книги Клебша «Теория упругости твердых тел» и переизданной в 1883 г. в переводе Сен-Венана [4] с громадным количеством комментариев, едва не превышающих основной объем. Клебшем же и был введен термин «задачи Сен-Венана», который включает в себя задачи о растяжении, кручении, чистом изгибе и изгибе перерезывающей силой цилиндра (призмы) с произвольным основанием, боковая поверхность которого свободна от напряжений. Следует отметить, что первая попытка исследовать задачу кручения стержня с прямоугольным поперечным сечением на основе уравнений теории упругости принадлежит Коши. Из построенного им приближенного решения вытекает, что поперечные сечения не остаются плоскими. Этот результат был использован Сен-Венаном для построения более полной теории кручения и изгиба призматических стержней. В основе этой теории лежит приближенный полуобратный метод построения решений трехмерных уравнений теории упругости и «принцип упругой равнозначности статически эквивалентных систем сил». Более общая формулировка этого принципа, названного «принципом Сен-Венана», была дана учеником Сен-Венана Буссинеском. Как показывает дальнейшая история развития теории упругости, полуобратный метод и принцип Сен-Венана стали важным инструментом исследования напряженно-деформированного состояния упругих тел.

В современном представлении принцип Сен-Венана состоит в том, что напряженно-деформированное состояние, вызванное системой усилий, распределенных по малой площади поверхности тела или в малом объеме внутри тела, и статически эквивалентное нулю, локализуется в малой окрестности области приложения усилий. Этот принцип

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00065-а.

оказывается полезным, если нас не интересуют детали напряженно-деформированного состояния в окрестности области нагружения, а интересует его асимптотическое поведение вдали от нее. В этом случае, как правило, исходную задачу можно заменить более простой. Для полупространства (или массивного тела) распределенную нагрузку — сосредоточенными силами и моментами; для стержня, загруженного с торцов, применение принципа Сен-Венана эквивалентно замене трехмерного решения, содержащего погранслой, решением Сен-Венана или решением по элементарной теории, основанной на гипотезе плоских сечений.

Математическое обоснование принципа Сен-Венана для призмы была дано в работах [5, 6, 7], в [8] на конкретном примере показан условный характер этого принципа.

В настоящей работе излагается метод построения решений Сен-Венана для естественно закрученного стержня и приводится строгое математическое обоснование принципа Сен-Венана.

1. Геометрическое описание естественно закрученного стержня

Под естественно закрученным стержнем (ЕЗС) принято понимать трехмерное тело, которое получается в результате винтового движения вдоль оси некоторой плоской фигуры. Геометрию такого тела можно описать следующим образом.

Пусть $x_1, x_2, x_3 = x$ — декартова система координат с ортами $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$. Объем, занимаемый ЕЗС, получим в результате винтового движения плоской фигуры S параллельно плоскости x_1x_2 вдоль оси x.

В качестве параметра винта возьмем относительный угол закручивания τ, который принято называть «круткой». Таким образом, угол поворота сечения, находящегося на расстоянии x по оси от начала координат, $\varphi = \tau x$.

Введем также сопутствующую (винтовую) систему координат $\xi_1, \xi_2, \xi_3 = \xi$ так, что оси ξ_1 и ξ_2 жестко связаны с фигурой S в процессе ее движения. Дополнительно предположим, что центр тяжести S расположен на расстоянии r_0 от оси ξ, а оси ξ_α $(\alpha = 1, 2)$ направлены по главным осям инерции. Связь между координатами обеих систем определяется соотношениями

$$\xi_1 = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi, \quad \xi_2 = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi, \quad \xi = x_3. \tag{1.1}$$

Орты, определяющие направление осей ξ_α, обозначим $\boldsymbol{e}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$. Таким образом, $\boldsymbol{R} = \xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \xi\boldsymbol{i}_3$ — радиус-вектор произвольной точки области V.

Обозначим через Γ боковую поверхность ЕЗС, через $\boldsymbol{N}$ — ее внешнюю нормаль. Определим проекции $\boldsymbol{N}$ на оси сопутствующей системы координат. Уравнение контура ∂S области S зададим соотношениями $\xi_{\alpha 0} = \xi_{\alpha 0}(s)$, где $\xi_{\alpha 0}$ — координаты точки контура; s — расстояние по дуге контура от некоторой фиксированной точки.

Следующие соотношения определяют касательный $\boldsymbol{t}$ и нормальный $\boldsymbol{n}$ орты контура ∂S:

$$\boldsymbol{t} = \xi'_{\alpha 0}\boldsymbol{e}_\alpha, \quad \boldsymbol{n} = n_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = \xi'_{20}\boldsymbol{e}_1 - \xi'_{10}\boldsymbol{e}_2, \tag{1.2}$$

где ξ'_{10}, ξ'_{20} — производная ξ_{10}, ξ_{20} по s.

Рассмотрим два сечения ЕЗС, расположенные на расстоянии dx. Точки сечений A и B будем называть эквивалентными, если им соответствуют одни и те же координаты ξ_1, ξ_2. Очевидно, что радиусы-векторы $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$ двух бесконечно близких эквивалентных точек, лежащих на боковой поверхности Γ, связаны соотношением

$$\begin{gathered} \boldsymbol{R}_B = \boldsymbol{R}_A + [\boldsymbol{i}_3 + \tau(\boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{r}_0)]\, dx, \\ \boldsymbol{r}_0 = \xi_{10}\boldsymbol{e}_1 + \xi_{20}\boldsymbol{e}_2. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Очевидно также, что вектор

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{t} \times (\boldsymbol{R}_B - \boldsymbol{R}_A) \tag{1.4}$$

ортогонален поверхности Г.

Подставляя (1.2), (1.3) в (1.4), после преобразований получаем следующие выражения для компонент $\boldsymbol{N}$ в базисе винтовой системы координат:

$$N_1 = n_1 = \xi_{20}', \quad N_2 = n_2 = -\xi_{10}', \quad N_3 = \tau b_n,$$
$$b_n = n_2\xi_1 - n_1\xi_2 = \frac{d}{ds}\left(\frac{r^2}{2}\right). \tag{1.5}$$

2. Операторные формы уравнений равновесия теории упругости

Будем считать, что материал ЕЗС — изотропный, упругие свойства которого определяются двумя упругими постоянными μ, ν — модулем сдвига и коэффициентом Пуассона соответственно; $0 \leqslant x \leqslant l$, где l — длина ЕЗС.

Обозначим через ϱ расстояние между двумя произвольными точками $P_1, P_2 \in \partial S$; $h = \sup(\varrho)$ — диаметр области; через $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ — безразмерный (отнесенный к h) вектор смещений. Введенные выше координаты x_k, ξ_k $(k = 1, 2, 3)$ и «крутку» τ, не меняя обозначений, будем считать безразмерными $(u_k \sim u_k/h, \tau \sim h\tau)$. В дальнейшем компоненты u_k рассматриваются как функции ξ_1, ξ_2, ξ.

На поперечном сечении S введем гильбертово пространство H вектор-функций со скалярным произведением

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int\limits_S (u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3)\, d\xi_1\, d\xi_2. \tag{2.1}$$

Вектор $\boldsymbol{u}$ будем рассматривать как вектор-функцию $\boldsymbol{u}(x)$ со значениями в H. При этом уравнения равновесия теории упругости удобно представить в виде обыкновенного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами

$$L_\tau(\partial)\boldsymbol{u} \equiv \partial^2 C\boldsymbol{u} + \partial B_\tau \boldsymbol{u} + A_\tau \boldsymbol{u} = 0, \tag{2.2}$$

где

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\varkappa) \end{Vmatrix}, \quad B_\tau = B_{3\tau} - B_{3\tau}',$$

$$B_{3\tau} = \begin{Vmatrix} \tau D & -\tau & \partial_1 \\ \tau & \tau D & \partial_2 \\ 2\varkappa\partial_1 & 2\varkappa\partial_2 & 2(1+\varkappa)\tau D, \end{Vmatrix},$$

$$B_{3\tau}' = -\begin{Vmatrix} \tau D & -\tau & 2\varkappa\partial_1 \\ \tau & \tau D & 2\varkappa\partial_2 \\ \partial_1 & \partial_2 & 2(1+\varkappa)\tau D, \end{Vmatrix},$$

$$A_\tau = \|A_{ij}\|, \tag{2.3}$$

$$A_{11} = 2(1+\varkappa)\partial_1^2 + \partial_2^2 + \tau^2(D^2-1), \qquad A_{12} = (1+2\varkappa)\partial_1\partial_2 - 2\tau^2 D,$$
$$A_{13} = \tau(1+2\varkappa)\partial_1 D, \qquad A_{21} = (1+2\varkappa)\partial_1\partial_2 + 2\tau^2 D,$$
$$A_{22} = \partial_1^2 + 2(1+\varkappa)\partial_2^2 + \tau^2(D^2-1), \qquad A_{23} = \tau(1+2\varkappa)\partial_2 D,$$
$$A_{31} = \tau(1+2\varkappa)D\partial_1, \qquad A_{32} = \tau(1+2\varkappa)D\partial_2,$$
$$A_{33} = \partial_1^2 + \partial_2^2 + 2(1+\varkappa)\tau^2 D^2.$$

Здесь
$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial\xi}, \quad D = \xi_2\partial_1 - \xi_1\partial_2, \quad \varkappa = \frac{\nu}{1-2\nu}.$$

Будем считать, что боковая поверхность ЕЗС свободна от напряжений. Это условие можно представить в виде

$$M_\tau(\partial)\boldsymbol{u} = (\partial G_\tau + E_\tau)\boldsymbol{u}\Big|_\Gamma = 0, \tag{2.4}$$

$$G_\tau = \begin{Vmatrix} \tau b_n & 0 & 2\varkappa n_1 \\ 0 & \tau b_n & 2\varkappa n_2 \\ n_1 & n_2 & 2(1+\varkappa)\tau b_n \end{Vmatrix}, \quad E_\tau = \left\|E_{ij}\right\|,$$

$$E_{11} = 2(1+\varkappa)n_1\partial_1 + n_2\partial_2 + n_3\tau^2 b_n D, \qquad E_{12} = 2\varkappa n_1\partial_2 + n_2\partial_1 - \tau^2 b_n,$$
$$E_{13} = 2\varkappa n_1\tau D + \tau b_n\partial_1, \qquad E_{21} = n_1\partial_2 + 2\varkappa n_2\partial_1 + \tau^2 b_n,$$
$$E_{22} = n_1\partial_1 + 2(1+\varkappa)n_2\partial_2 + \tau^2 b_n D, \qquad E_{23} = 2\varkappa n_2\tau D + \tau b_n\partial_2,$$
$$E_{31} = n_1\tau D + n_2\tau + 2\varkappa\tau b_n\partial_1, \qquad E_{32} = -n_1\tau + N_2\tau D + 2\varkappa\tau b_n\partial_2,$$
$$E_{33} = n_1\partial_1 + n_2\partial_2 + 2(1+\varkappa)\tau^2 b_n D.$$

Объединяя уравнение равновесия (2.2) и граничное условие (2.4), получаем:

$$L_{1\tau}(\partial)\boldsymbol{u} \equiv \Big\{L_\tau(\partial)\boldsymbol{u}, M_\tau(\partial)\boldsymbol{u}\Big\} = 0. \tag{2.5}$$

Для обоснования принципа Сен-Венана потребуются некоторые соотношения обобщенной ортогональности, которые наиболее просто можно получить, исходя из представления дифференциального уравнения второго порядка (2.2) и в виде эквивалентного ему дифференциального уравнения первого порядка.

Введем расширенный шестикомпонентный вектор

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma})^T = \left(u_1, u_2, u_3, \sigma_{13}^0, \sigma_{23}^0, \sigma_{33}^0\right)^T, \tag{2.6}$$

где
$$\boldsymbol{\sigma} = C\partial\boldsymbol{u} + B_{3\tau}\boldsymbol{u}. \tag{2.7}$$

Заметим, что $\mu\boldsymbol{\sigma} = (\mu\sigma_{13}^0, \mu\sigma_{23}^0, \mu\sigma_{33}^0)^T$ является вектором напряжений на площадках с нормалями, параллельными оси стержня ($\mathbf{i}_3$).

Из (2.7) выразим $\partial\boldsymbol{u}$ через $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\sigma}$

$$\partial\boldsymbol{u} = -C^{-1}B_{3\tau}\boldsymbol{u} + C^{-1}\boldsymbol{\sigma}. \tag{2.8}$$

Второе уравнение получается на основе векторного вида уравнения равновесия в напряжениях [1, 2]
$$\partial\boldsymbol{\sigma} = -B'_{3\tau}C^{-1}B_{3\tau}\boldsymbol{u} + A_\tau\boldsymbol{u} + B'_{3\tau}C^{-1}\boldsymbol{\sigma}. \tag{2.9}$$

Объединив (2.8) и (2.9), получаем операторное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\boldsymbol{w}$

$$\partial \boldsymbol{w} - T_0 \boldsymbol{w} = 0, \quad T_0 = (T_{\alpha\beta}), \tag{2.10}$$

$$T_{11} = -C^{-1} B_{3\tau}, \quad T_{12} = -C^{-1}, \quad T_{21} = -B'_{3\tau} C^{-1} B_{3\tau} + A_\tau, \quad T_{22} = B'_{3\tau} C^{-1}.$$

Граничное условие (2.4) запишется в виде

$$Z\boldsymbol{w} = 0, \quad Z = (Z_{\alpha\beta}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{2.11}$$

$$Z_{11} = Z_{12} = 0, \quad Z_{21} = -G_\tau C^{-1} B_{3\tau} + E_\tau, \quad Z_{22} = G_\tau C^{-1}.$$

В гильбертовом пространстве $H_1 = H \oplus H$ вектор-функций $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^T$ со скалярным произведением

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) \tag{2.12}$$

на основании дифференциальной формы T_0 и граничного условия (2.11) определим оператор T и запишем уравнения равновесия и граничные условия на боковой поверхности ЕЗС в следующей форме:

$$\partial \boldsymbol{w} - T\boldsymbol{w} = 0, \quad T\boldsymbol{w} = \{T_0 \boldsymbol{w}, Z\boldsymbol{w}\} = 0. \tag{2.13}$$

3. Однородные элементарные решения и их свойства

3.1. В теории упругости широко используется термин *однородные решения.*

Определение. *Однородным решением* будем называть любую вектор-функцию $\boldsymbol{u}$, удовлетворяющую уравнению (2.5), а также любую вектор-функцию $\boldsymbol{w}(x)$, удовлетворяющую уравнению (2.13).

Иными словами в данном случае *однородным* является любое решение однородных уравнений теории упругости, удовлетворяющее условию отсутствия напряжений на боковой поверхности ЕЗС.

Будем искать решение уравнения (2.5) в виде

$$\boldsymbol{u}(\xi) = e^{\gamma \xi} \boldsymbol{a}(\xi_1, \xi_2). \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в уравнение (2.5), получаем спектральную задачу на поперечном сечении ЕЗС

$$L_1(\gamma, \omega) \boldsymbol{a} = 0. \tag{3.2}$$

Некоторые особенности распределения множества собственных значений $\{\gamma_k\}$ и общие свойства собственных и присоединенных векторов описаны в [9–11]. Ниже они приведены в соответствии с введенной системой обозначений.

Если γ_k — простое собственное значение (СЗ) задачи (3.2), $\boldsymbol{a}_k$ — соответствующий ему собственный вектор (СВ), то элементарным решением уравнений (2.5), (2.13), отвечающим СЗ γ_k, называется вектор-функция вида

$$\boldsymbol{u}_k(\xi) = e^{\gamma_k \xi} \boldsymbol{a}_k(\xi_1, \xi_2). \tag{3.3}$$

Соответственно, элементарным решением уравнения (2.13) называется вектор-функция

$$\boldsymbol{w}_k(\xi) = e^{\gamma_k \xi} \boldsymbol{v}_k(\xi_1, \xi_2), \tag{3.4}$$

а собственные значения и собственные векторы определяются при решении спектральной задачи

$$T\boldsymbol{v} - \gamma\boldsymbol{v} = 0. \tag{3.5}$$

Задачи (3.2) и (3.5) эквивалентны, при этом

$$\boldsymbol{v}_k = (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_k)^T, \quad \boldsymbol{b}_k = (\gamma_k C + B_{3\tau})\boldsymbol{a}_k. \tag{3.6}$$

Если γ_k — N-кратное собственное значение задачи, $\boldsymbol{a}^j_{0,k}$ $(j = 1, \ldots, n < N)$ — множество линейно независимых собственных векторов, отвечающих γ_k, при этом каждому СВ соответствует своя система присоединенных векторов $\boldsymbol{a}^j_{\ell,k}$ $(\ell = 1, \ldots, p_j)$, то множество элементарных решений, отвечающих кратному СЗ γ_k, состоит их следующих вектор-функций:

$$\boldsymbol{u}^j_k(x) = e^{\gamma_k x}\left[\frac{x^t}{t!}\boldsymbol{a}^j_{0,k} + \frac{x^{t-1}}{(t-1)!}\,\boldsymbol{a}^j_{1,k} + \cdots + \boldsymbol{a}^j_{t,k}\right], \quad t = 0, \ldots, p^j_k. \tag{3.7}$$

Общее количество таких элементарных решений будет

$$p^1_k + p^2_k + \cdots + p^n_k = N,$$

где N — алгебраическая кратность, а n — собственная кратность СЗ γ_k.

Множество элементарных решений уравнения (2.13), отвечающих кратному собственному значению, имеют вид

$$\boldsymbol{w}^j_k(x) = e^{\gamma_k x}\left[\frac{x^t}{t!}\,\boldsymbol{v}^j_{0,k} + \frac{x^{t-1}}{(t-1)!}\,\boldsymbol{v}^j_{1,k} + \cdots + \boldsymbol{v}^j_{t,k}\right]. \tag{3.8}$$

Собственный и присоединенный векторы определяются решением цепочки задач

$$T\boldsymbol{v}^j_{0,k} - \gamma_k\boldsymbol{v}^j_{0,k} = 0, \quad T\boldsymbol{v}^j_{\ell,k} - \gamma_s\boldsymbol{v}^j_{\ell,k} = \boldsymbol{v}^j_{\ell-1,k}, \quad \ell = 1, \ldots, p^j_k, \tag{3.9}$$

где

$$\boldsymbol{v}^j_{\ell,k} = (\boldsymbol{a}^j_{\ell,k}, \boldsymbol{b}^j_{\ell,k})^T.$$

Компоненты векторов $\boldsymbol{v}^j_{0,k}$ выражаются через векторы $\boldsymbol{a}^j_{0,k}$ по-прежнему соотношением (3.6), а присоединенные векторы $\boldsymbol{v}^j_{\ell,k}$ выражаются через систему векторов $\{\boldsymbol{a}^j_{\ell,k}\}^{p^j_k}_{\ell=1}$ следующим формулами:

$$\boldsymbol{v}^j_{\ell,k} = (\boldsymbol{a}^j_{\ell,k}, (\gamma_k C + B_3)\boldsymbol{a}^j_{\ell,k} + C\boldsymbol{a}^j_{\ell-1,k})^T, \quad \ell = 1, \ldots, p_j. \tag{3.10}$$

3.2. Система собственных и присоединенных векторов оператора T не обладает обычной ортогональностью, поскольку оператор не является самосопряженным. Однако для этой системы справедливы некоторые соотношения обобщенной ортогональности. Для построения таких соотношений определим сопряженный оператор T^*. Имеем

$$(T\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)_1 = (\boldsymbol{v}_1, T^*\boldsymbol{v}_2)_1.$$

Учитывая, что операторы C^{-1}, A — самосопряженные, получаем:

$$T^*\boldsymbol{v} = \{T'_0\boldsymbol{v},\ Z'\boldsymbol{v} = 0\}, \tag{3.11}$$

$$T'_0 = (T'_{\alpha\beta}), \quad Z' = (Z'_{\alpha\beta}) \ \ (\alpha, \beta = 1, 2),$$

$$T'_{11} = -T_{22}, \quad T'_{12} = T_{21}, \quad T'_{21} = T_{12}, \quad T'_{22} = -T_{11},$$
$$Z'_{11} = Z'_{12} = 0, \quad Z'_{21} = -Z_{22}, \quad Z_{22} = Z_{21},$$

где $T_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$ определены соотношениями (2.10), (2.11).

Введем оператор (симплектическую единицу)

$$J = \left\| \begin{matrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{matrix} \right\| = -J^* = -J^{-1},$$

где I — единичная матрица 3×3.

Утверждение 3.1. *Оператор T является гамильтоновым, т. е.*

$$JT = -T^* J. \tag{3.12}$$

$\triangleleft$ С учетом конкретного вида оператора T и самосопряженности операторов C^{-1}, A, имеем:

$$(JT\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)_1 = -(T_{21}\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) - (T_{22}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) + (T_{11}\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) + (T_{12}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$$
$$= \Big((B'_3C^{-1}B_3 - A)\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\Big) - (B'_3C^{-1}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) - (C^{-1}B_3\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) + (C^{-1}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$$
$$= \Big(\boldsymbol{a}_1, (B'_3C^{-1}B_3 - A)\boldsymbol{a}_2\Big) - (\boldsymbol{b}_1, C^{-1}B_3\boldsymbol{a}_2) - (\boldsymbol{a}_1, B'_3C^{-1}\boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{b}_1, C^{-1}\boldsymbol{b}_2).$$

С другой стороны,

$$(JT\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1, (JT)^*\boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1, T^*J^*\boldsymbol{v}_2) = -(\boldsymbol{v}_1, T^*J\boldsymbol{v}_2).$$

Следовательно, оператор

$$-T^*J = \left\| \begin{matrix} B'_3C^{-1}B_3 - A_\omega & -B'_3C^{-1} \\ -C^{-1}B_3 & C^{-1} \end{matrix} \right\|,$$

т. е. $JT = -T^*J$, что и требовалось доказать. $\triangleright$

Так как оператор T является гамильтоновым, то его собственные значения расположены симметрично в комплексной плоскости γ, т. е. каждому СЗ γ_k, расположенному в первом квадранте, соответствуют еще три СЗ $\gamma_{-k} = -\gamma_k$, $\bar{\gamma}_k$, $-\bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}_{-k}$. Следовательно, оператор T^* будет иметь тот же самый спектр (прямое доказательство этого свойства спектра приведено в [11]).

Утверждение 3.2. *Пусть γ_k, γ_m — произвольные СЗ оператора T, $\boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{v}_m$ — соответствующие им собственные векторы. Тогда имеют место следующие соотношения обобщенной ортогональности:*

$$(\boldsymbol{v}_k, J\boldsymbol{v}_m)_1 = 0, \quad \gamma_k \neq -\bar{\gamma}_m. \tag{3.13}$$

$\triangleleft$ Рассмотрим уравнения

$$T\boldsymbol{v}_k = \gamma_k\boldsymbol{v}_k, \quad T\boldsymbol{v}_m = \gamma_m\boldsymbol{v}_m.$$

С учетом (3.13) получаем

$$(T\boldsymbol{v}_k, J\boldsymbol{v}_m)_1 = (\boldsymbol{v}_k, T^*J\boldsymbol{v}_m)_1 = -(\boldsymbol{v}_k, JT\boldsymbol{v}_m)_1 = -(\boldsymbol{v}_k, \gamma_m J\boldsymbol{v}_m)_1$$
$$= -\overline{\gamma}_m(\boldsymbol{v}_k, J\boldsymbol{v}_m)_1 = \gamma_k(\boldsymbol{v}_k, J\boldsymbol{v}_m)_1.$$

Из последнего равенства вытекает соотношение (3.13). $\triangleright$

Утверждение 3.3. *Пусть* γ_k, γ_m — *кратные СЗ,* $\{\boldsymbol{v}_{s,k}\}$, $\{\boldsymbol{v}_{t,m}\}$ $(s = 0,\ldots,p_k,\ t = 0,\ldots,p_m)$ *соответствующие им жордановы цепочки; тогда для любой пары корневых векторов имеют место следующие соотношения обобщенной ортогональности:*

$$(\boldsymbol{v}_{s,k}, J\boldsymbol{v}_{t,m})_1 = 0, \quad \gamma_k \neq -\bar{\gamma}_m. \tag{3.14}$$

$\lhd$ Рассмотрим различные скалярные произведения $(T\boldsymbol{v}_{s,k}, J\boldsymbol{v}_{t,m})_1$, $(\boldsymbol{v}_{s,k}, JT\boldsymbol{v}_{t,m})_1$. Преобразуем их, используя соотношения (3.9), (3.10), следующим образом:

$$(T\boldsymbol{v}_{s,k}, J\boldsymbol{v}_{t,m})_1 = \gamma_k(\boldsymbol{v}_{s,k}, J\boldsymbol{v}_{t,m})_1 + (\boldsymbol{v}_{s-1,k}, J\boldsymbol{v}_{t,m})_1,$$

$$(\boldsymbol{v}_{s,k}, JT\boldsymbol{v}_{t,m})_1 = \overline{\gamma}_m(\boldsymbol{v}_{s,k}, J\boldsymbol{v}_{t,m})_1 + (\boldsymbol{v}_{s,k}, J\boldsymbol{v}_{t-1,m})_1 = (-T\boldsymbol{v}_{s,k}, J\boldsymbol{v}_{t,m})_1.$$

Складывая первое равенство со вторым, получаем

$$(\gamma_k + \overline{\gamma}_m)(\boldsymbol{v}_{s,k}, J\boldsymbol{v}_{t,m})_1 = -(\boldsymbol{v}_{s-1,k}, J\boldsymbol{v}_{t,m})_1 - (\boldsymbol{v}_{s,k}, J\boldsymbol{v}_{t-1,m})_1. \tag{3.15}$$

Пусть $s = 1$, $t = 0$; тогда из соотношений (3.13), (3.19) вытекает

$$(\boldsymbol{v}_{1,k}, J\boldsymbol{v}_{0,m})_1 = 0.$$

Далее по индукции получаем доказательство соотношения (3.14). $\rhd$

Утверждение 3.4. *У гамильтонова оператора при условии, что*

$$(\boldsymbol{v}^j_{0,k}, J\boldsymbol{v}^j_{0,k})_1 \neq 0, \tag{3.16}$$

все комплексные и не равные нулю вещественные собственные значения простые.

$\lhd$ Обратимся к соотношениям (3.14), (3.19) и положим в них $\gamma_m = \gamma_k$, $t = 0$. После элементарных преобразований для элементов конкретной жордановой цепочки получаем:

$$(\gamma_k + \bar{\gamma}_k)(\boldsymbol{v}^J_{m+1,k}, J\boldsymbol{v}^j_{0,k})_1 - (\boldsymbol{v}^J_{m,k}, J\boldsymbol{v}^j_{0,k})_1 = 0. \tag{3.17}$$

Из (3.17) вытекает

$$\boldsymbol{v}_{1,k} = (\gamma_k + \bar{\gamma}_k)^{-1}\boldsymbol{v}_{0,k}, \quad \boldsymbol{v}_{2,k} = (\gamma_k + \bar{\gamma}_k)^{-2}\boldsymbol{v}_{0,k}, \ldots,$$

т. е. все присоединенные векторы пропорциональны собственному и, следовательно, корневое подпространство состоит из одного собственного вектора. $\rhd$

Замечание. Условие (3.16) продиктовано тем, что метрика, порождаемая оператором J — индифинитная [11]. Во всех известных примерах из теории упругости и акустики это условие выполняется.

Рассмотрим отдельно частный случай, когда γ_k — чисто мнимое или нулевое кратное собственное значение и ему отвечают одна или несколько жордановых цепочек $\{\boldsymbol{v}^j_{m,k}\}^{p^j_k}_{m=0}$ $(j = 1,\ldots,n)$. Как будет показано ниже, множество соответствующих ЭР формируют решения Сен-Венана естественно-закрученного стержня.

Из условий (3.17) вытекают следующие соотношения ортогональности элементов жордановой цепочки.

Утверждение 3.5. *Пусть* γ_s — *кратное мнимое (или нулевое) собственное значение оператора* T *и пусть* $\{\boldsymbol{v}^j_{\ell,s}\}^{p^j_s}_{\ell=0}$ — *одна из соответствующих ему жордановых цепочек; тогда справедливы следующие соотношения:*

$$(\boldsymbol{v}^j_{t,s}, J\boldsymbol{v}^j_{q,s})_1 = 0, \quad t + q < p^j_s, \tag{3.18}$$

$$(\boldsymbol{v}^j_{t+m,s}, J\boldsymbol{v}^j_{q-m,s})_1 = (-1)^m d^j_s, \quad t+q=p^j_s. \tag{3.19}$$

Здесь $d^j_s = (\boldsymbol{v}_{p^j_s,s}, J\boldsymbol{v}^j_{0,s})_1 = -(\boldsymbol{a}^j_{p^j_s,s}, \boldsymbol{b}^j_{0,s}) + (\boldsymbol{b}^j_{p^j_s,s}, \boldsymbol{a}^j_{0,s})$ *— инвариант жордановой цепочки.*

4. Общее представление решения трехмерной задачи и обоснование принципа Сен-Венана

4.1. Рассмотрим вектор твердого смещения ЕЗС

$$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{a}^0 + \omega \times \boldsymbol{r}, \tag{4.1}$$

где $\boldsymbol{a}^0 = (a^0_1, a^0_2, a^0_3)^T$ — вектор поступательного смещения; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ — вектор малого поворота; a^0_j, ω_j — проекции на оси основной системы координат x_j. Проектируя (4.1) на оси подвижной системы координат, получаем:

$$\begin{aligned} u^0_{\xi_1} &= C_1 e^{i\tau\xi} + C_2 e^{-i\tau\xi} + C_3 \xi e^{i\tau\xi} + C_4 \xi e^{-i\tau\xi} - C_6 \xi_2, \\ u^0_{\xi_2} &= iC_1 e^{i\tau\xi} - iC_2 e^{i\tau\xi} + iC_3 \xi e^{i\tau\xi} - iC_4 \xi e^{-i\tau\xi} + C_6 \xi_1, \\ u^0_{\xi} &= -C_3 \zeta e^{i\tau\xi} - C_4 \bar{\zeta} e^{-i\tau\xi} + C_5, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\zeta = \xi_1 + i\xi_2, \quad \bar{\zeta} = \xi_1 - i\xi_2,$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(a^0_1 - ia^0_2), \quad C_2 = \overline{C}_1, \quad C_3 = \frac{1}{2}(\omega_2 + i\omega_1), \quad C_4 = \overline{C}_3, \quad C_5 = a^0_3, \quad C_6 = \omega_3.$$

Поскольку любое твердое смещение является однородным решением, а C_ℓ, $\ell = 1,\ldots,6$, — произвольные постоянные, то на основании (4.2) можно сделать следующие выводы:

Утверждение 4.1. $\gamma = \gamma_0 = 0$, $\gamma = \gamma_1 = i\tau$, $\gamma = \gamma_{-1} = -i\tau$ *являются собственными значениями спектральной задачи* (3.2).

Утверждение 4.2. *СЗ* γ_1 *соответствуют собственный и присоединенный векторы*

$$\boldsymbol{a}^1_0 = \boldsymbol{a}_1 = (1, i, 0)^T, \quad \boldsymbol{a}^1_1 = \boldsymbol{a}_3 = (0, 0, -\xi_1 - i\xi_2)^T. \tag{4.3}$$

СЗ γ_{-1} *соответствуют собственный и присоединенный векторы*

$$\boldsymbol{a}^2_0 = \boldsymbol{a}_2 = (1, -i, 0)^T, \quad \boldsymbol{a}^2_1 = \boldsymbol{a}_4 = (0, 0, -\xi_1 + i\xi_2)^T. \tag{4.4}$$

Утверждение 4.3. *СЗ* γ_0 *соответствуют два собственных вектора*

$$\boldsymbol{a}^3_0 = \boldsymbol{a}_5 = (0, 0, 1)^T, \quad \boldsymbol{a}^4_0 = \boldsymbol{a}_6 = (-\xi_2, \xi_1, 0)^T. \tag{4.5}$$

Однако приведенная система собственных и присоединенных векторов не исчерпывает корневые подпространства соответствующих СЗ. В [12] показано:

Утверждение 4.4. *Собственный вектор* $\boldsymbol{a}^1_0$, *помимо присоединенного вектора* $\boldsymbol{a}^1_1$, *имеет еще два присоединенных вектора* $\boldsymbol{a}^1_2$ *и* $\boldsymbol{a}^1_3$, *которые определяются решением следующих краевых задач:*

$$L_\tau(i\tau)\boldsymbol{a}^1_j = \boldsymbol{F}^1_j, \quad M_\tau(i\tau)\boldsymbol{a}^1_j\Big|_{\partial S} = \boldsymbol{f}^1_j \quad (j = 2, 3), \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{F}^1_2 = (2\varkappa, 2\varkappa, 0)^T, \quad \boldsymbol{f}^1_2 = \big(2\varkappa n_1, 2\varkappa n_2, 2\tau(1+\varkappa) b_n \zeta\big)^T,$$

$$\boldsymbol{F}^1_3 = -(2i\tau C + B_\tau)\boldsymbol{a}^1_2 - C\boldsymbol{a}^1_1, \quad \boldsymbol{f}^1_3 = -iG_\tau \boldsymbol{a}^1_2\Big|_{\partial S}.$$

Утверждение 4.5. *Собственный вектор $\boldsymbol{a}_0^2$, помимо присоединенного вектора $\boldsymbol{a}_1^2$, имеет еще два присоединенных вектора $\boldsymbol{a}_2^2$ и $\boldsymbol{a}_3^2$, которые определяются решением следующих краевых задач:*

$$L_\tau(-i\tau)\boldsymbol{a}_j^2 = \boldsymbol{F}_j^2, \quad M_\tau(-i\tau)\boldsymbol{a}_j^2\Big|_{\partial S} = \boldsymbol{f}_j^2 \quad (j = 2,3), \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{F}_2^2 = (2\varkappa, -2\varkappa i, 0)^T, \quad \boldsymbol{f}_2^2 = \big(2\varkappa n_1, -2i\varkappa n_2, 2\tau(1+\varkappa)b_n\bar{\zeta}\big)^T,$$
$$\boldsymbol{F}_3^2 = -(2i\tau C_\tau + B_\tau)\boldsymbol{a}_2^2 - C_\tau \boldsymbol{a}_1^2, \quad \boldsymbol{f}_3^2 = -G_\tau \boldsymbol{a}_2^2\Big|_{\partial S}.$$

Утверждение 4.6. *Собственный вектор $\boldsymbol{a}_0^3 = (a_{0,1}^3, a_{0,2}^3, a_{0,3}^3)^T$ имеет только один присоединенный вектор $\boldsymbol{a}_1^3 = (a_{1,1}^3, a_{1,2}^3, a_{1,3}^3)^T$, который определяется решением следующей краевой задачи:*

$$A_\tau \boldsymbol{a}_1^3 = 0, \quad E_\tau \boldsymbol{a}_1^3\Big|_{\partial S} = \big(2\varkappa n_1,\ 2\varkappa n_2, 2(1+\varkappa)b_n\tau\big)^T. \tag{4.8}$$

Утверждение 4.7. *Собственный вектор $\boldsymbol{a}_0^4$ имеет только один присоединенный вектор $\boldsymbol{a}_1^4$, который определяется решением следующей краевой задачи:*

$$A_\tau \boldsymbol{a}_1^4 = 0, \quad E_\tau \boldsymbol{a}_1^4\Big|_{\partial S} = \big(-\tau b_n \xi_2,\ \tau b_n \xi_1, -b_n\big)^T. \tag{4.9}$$

Таким образом, выбранной группе собственных значений отвечают четыре жордановых цепочки и, соответственно, двенадцать элементарных решений:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{u}_1(\xi) = e^{i\tau\xi}\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{u}_2(\xi) = \overline{\boldsymbol{u}}_1(\xi), \quad \boldsymbol{u}_3(\xi) = e^{i\tau\xi}(\xi\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3), \quad \boldsymbol{u}_4(\xi) = \overline{\boldsymbol{u}}_3(\xi),\\
\boldsymbol{u}_5(\xi) = \boldsymbol{a}_5, \quad \boldsymbol{u}_6(\xi) = \boldsymbol{a}_6, \quad \boldsymbol{u}_7(\xi) = e^{i\tau\xi}\left(\frac{\xi^2}{2}\boldsymbol{a}_1 + \xi\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_9\right), \quad \boldsymbol{u}_8(\xi) = \overline{\boldsymbol{u}}_7(\xi),\\
\boldsymbol{u}_9(\xi) = e^{i\tau\xi}\left(\frac{\xi^3}{6}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\xi^2}{2}\boldsymbol{a}_3 + \xi\boldsymbol{a}_9 + \boldsymbol{a}_7\right), \quad \boldsymbol{u}_{10}(\xi) = \overline{\boldsymbol{u}}_9(\xi),\\
\boldsymbol{u}_{11}(\xi) = \xi\boldsymbol{a}_5 + \boldsymbol{a}_{11}, \quad \boldsymbol{u}_{12}(\xi) = \xi\boldsymbol{a}_6 + \boldsymbol{a}_{12}.
\end{gathered} \tag{4.10}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_0^1 = (1, i, 0)^T, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_0^2 = \overline{\boldsymbol{a}}_1, \quad \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1^1 = (0,0,-\zeta)^T, \quad \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1^2 = \overline{\boldsymbol{a}}_3,\\
\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{a}_0^3 = (0,0,1)^T, \quad \boldsymbol{a}_6 = \boldsymbol{a}_0^4 = (-\xi_2, \xi_1, 0)^T, \quad \boldsymbol{a}_7 = \boldsymbol{a}_3^1, \quad \boldsymbol{a}_8 = \boldsymbol{a}_3^2 = \overline{\boldsymbol{a}}_7,\\
\boldsymbol{a}_9 = \boldsymbol{a}_2^1, \quad \boldsymbol{a}_{10} = \boldsymbol{a}_2^2 = \overline{\boldsymbol{a}}_9, \quad \boldsymbol{a}_{11} = \boldsymbol{a}_1^3, \quad \boldsymbol{a}_{12} = \boldsymbol{a}_1^4.
\end{gathered} \tag{4.11}$$

Поскольку любая линейная комбинация векторов $\boldsymbol{u}_l = 0$ $(l = 1, \ldots, 6)$ относится к классу «твердых смещений», отвечающие им напряженно-деформированные состояния тождественно равны нулю и, соответственно, векторы

$$\boldsymbol{\sigma}_l \equiv 0 \quad (l = 1, \ldots, 6). \tag{4.12}$$

Для векторов $\boldsymbol{\sigma}_l$ $(l = 7, \ldots, 12)$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}_7(\xi) = e^{i\tau\xi}(\xi\boldsymbol{b}_9 + \boldsymbol{b}_7), && \boldsymbol{\sigma}_8(\xi) = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_7(\xi),\\
&\boldsymbol{\sigma}_9(\xi) = e^{i\tau\xi}\boldsymbol{b}_9, && \boldsymbol{\sigma}_{10}(\xi) = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_9(\xi),\\
&\boldsymbol{\sigma}_{11}(\xi) = \boldsymbol{b}_{11}, && \boldsymbol{\sigma}_{12}(\xi) = \boldsymbol{b}_{12},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{b}_l = (b_{13,l}, b_{23,l}, b_{33,l})^T, \\
&\boldsymbol{b}_7 = \boldsymbol{b}_3^1 = (B_{3\tau} + i\tau C)\boldsymbol{a}_7 + C\boldsymbol{a}_9, \qquad \boldsymbol{b}_8 = \boldsymbol{b}_3^2 = \overline{b}_7, \\
&\boldsymbol{b}_9 = \boldsymbol{b}_2^1 = (B_{3\tau} - i\tau C)\boldsymbol{a}_9 + C\boldsymbol{a}_3, \qquad \boldsymbol{b}_{10} = \boldsymbol{b}_2^2 = \overline{b}_9, \\
&\boldsymbol{b}_{11} = \boldsymbol{b}_1^3 = B_{3\tau}\boldsymbol{a}_{11} + C\boldsymbol{a}_5, \qquad \boldsymbol{b}_{12} = \boldsymbol{b}_1^4 = B_{3\tau}\boldsymbol{a}_{12} + C\boldsymbol{a}_6.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

4.2. Как известно [8], решение любой трехмерной краевой задачи для призмы можно представить в виде суммы решения Сен-Венана и решения типа «погранслоя». При этом главный вектор и главный момент напряжений в поперечном сечении призмы, отвечающих решению Сен-Венана, в общем случае отличны от нуля (это свойство и определяет понятие «решение Сен-Венана»), а главный вектор и главный момент напряжений, отвечающий «погранслою», равны нулю.

Решение Сен-Венана для ЕЗС будем называть линейные комбинации вида

$$\boldsymbol{u}_S(\xi) = \sum_{\ell=1}^{6} C_\ell \boldsymbol{u}_\ell(\xi) + \sum_{\ell=7}^{12} C_\ell \boldsymbol{u}_\ell(\xi - L),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_S(\xi) = \mu \sum_{\ell=7}^{12} C_\ell \boldsymbol{\sigma}_\ell(\xi - L). \tag{4.15}$$

Покажем, что постоянные C_ℓ, ($\ell = 7, \ldots, 12$) можно выразить через компоненты главного вектора $\boldsymbol{Q} = (Q_{\xi 1}, Q_{\xi 2}, Q_3)^T = (Q_{x1}, Q_{x2}, Q_3)^T$ и главного момента $\boldsymbol{M} = (M_{\xi 1}, M_{\xi 2}, M_3)^T = (M_{x1}, M_{x2}, M_3)^T$ напряжений $\boldsymbol{\sigma}_3 = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})^T$, действующих в поперечном сечении S.

Действительно,

$$Q_{\xi k} = \int\limits_S \sigma_{k3} dS, \quad M_{\xi 1} = \int\limits_S \xi_2 \sigma_{33} dS,$$

$$M_{\xi 2} = -\int\limits_S \xi_1 \sigma_{33} dS, \quad M_3 = \int\limits_S (\xi_1 \sigma_{23} - \xi_2 \sigma_{13}) dS,$$

где σ_{k3} — проекции вектора напряжений в сечении $\xi = \mathrm{const}$ на оси сопутствующей системы координат;

$$Q_{x1} = Q_{\xi 1} \cos(\tau\xi) - Q_{\xi 2} \sin(\tau\xi),$$

$$Q_{x2} = Q_{\xi 1} \sin(\tau\xi) + Q_{\xi 2} \cos(\tau\xi).$$

Введем расширенные векторы $\boldsymbol{v}_\ell = (\boldsymbol{a}_\ell, \boldsymbol{b}_\ell)^T$, $\boldsymbol{b}_\ell = (b_{13,\ell}, b_{23,\ell}, b_{33,\ell})^T$ и рассмотрим скалярные произведения

$$d_{\ell q} = (\boldsymbol{v}_{q+6}, J\boldsymbol{v}_\ell)_1, \quad q, \ell = 1, \ldots, 6. \tag{4.16}$$

Учитывая, что $\boldsymbol{v}_\ell = (\boldsymbol{a}_\ell, 0)^T$, имеем

$$d_{\ell q} = (\boldsymbol{b}_{q+6}, \boldsymbol{a}_\ell). \tag{4.17}$$

$d_{\ell q}$ будем называть элементами матрицы жесткости D_g. В случае, когда $\tau \neq 0$, опираясь на утверждения 3.3, 3.5, можно показать, что матрица жесткости имеет следующую структуру:

$$D_g = \left\| \begin{matrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{42} & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & d_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{56} & d_{66} \end{matrix} \right\|,$$

где

$$d_{11} = d_{22} = -d_{33} = -d_{44} = -d = \int\limits_S \bar{\zeta} b_{33,9}\, dS,$$

$$d_{31} = \bar{d_{42}} = -\int\limits_S \bar{\zeta} b_{33,7}\, dS,$$

$$d_{55} = \int\limits_S b_{33,11}\, dS, \quad d_{56} = \int\limits_S b_{33,12}\, dS,$$

$$d_{66} = \int\limits_S (\xi_1 b_{23,12} - \xi_2 b_{13,12})\, dS.$$

Рассмотрим скалярные произведения $(\boldsymbol{\sigma}_s, \boldsymbol{a}_q)$ $(q = 1, \ldots, 6)$. С учетом конкретного вида векторов $\boldsymbol{a}_q$, $\boldsymbol{\sigma}_s$ и структуры матрицы жесткости, получаем:

$$\begin{gathered} -e^{i\tau\eta}\mu d C_7 = Q_{\xi 1} - iQ_{\xi 2}, \\ e^{i\tau\eta}\mu\big[(d_{31} + \eta d)C_7 + dC_9\big] = M_{\xi 2} + iM_{\xi 1}, \\ \mu(d_{55}C_{11} + d_{56}C_{12}) = Q_3, \\ \mu(d_{56}C_{11} + d_{66}C_{12}) = M_3. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Здесь $\eta = \xi - l$.

Поскольку

$$\begin{gathered} Q_{\xi 1} - iQ_{\xi 2} = e^{i\tau\eta}(Q_{x1} - iQ_{x2}), \\ M_{\xi 2}(\xi) + iM_{\xi 1} = e^{i\tau\eta}(M_{x2} + iM_{x1}), \\ M_{x1} = M^*_{x1} - \xi Q_{x2}, \quad M_{x2} = M^*_{x2} + \xi Q_{x1}, \end{gathered}$$

где M^*_{x1}, M^*_{x2} — изгибающие моменты в сечении $\xi = l$, получаем

$$\begin{gathered} \mu d C_7 = -Q_{x1} + iQ_{x2}, \\ \mu d C_9 = M^*_{x2} + iM^*_{x1} + d_{31}(Q_{x1} - iQ_{x2}). \end{gathered} \tag{4.19}$$

Формулы (4.18), (4.19) доказывают, что постоянные C_ℓ $(\ell = 7, \ldots, 12)$ определяются только компонентами главного вектора и главного момента напряжений, действующих в поперечном сечении ЕЗС.

4.3. Основываясь на теореме о полноте системы элементарных решений [11], решение трехмерной задачи при отсутствии напряжений на боковой поверхности ЕЗС можно представить в виде

$$\boldsymbol{u}(\xi) = \boldsymbol{u}_S(\xi) + \boldsymbol{u}_P(\xi), \quad \boldsymbol{\sigma}(\xi) = \boldsymbol{\sigma}_S(\xi) + \boldsymbol{\sigma}_P(\xi). \tag{4.20}$$

где $\boldsymbol{u}_S(\xi)$, $\boldsymbol{\sigma}_S(\xi)$ — решения Сен-Венана (4.15),

$$\boldsymbol{u}_P(\xi) = \sum_k \Big[C_k^+ \boldsymbol{u}_k^+(\xi) + C_k^- \boldsymbol{u}_k^-(\xi - l)\Big],$$

$$\boldsymbol{\sigma}_P(\xi) = \sum_k \Big[C_k^+ \boldsymbol{\sigma}_k^+(\xi) + C_k^- \boldsymbol{\sigma}_k^-(\xi - l)\Big].$$

Здесь $\boldsymbol{w}_k^\pm(\xi) = (\boldsymbol{u}_k^\pm(\xi), \boldsymbol{\sigma}_k^\pm(\xi))^T$ — элементарные решения, отвечающие собственным значениям, и отличным от $\gamma_0 = 0$ и $\gamma \pm 1 = \pm i\tau$; $C_\ell^\pm, C_k^\pm$ — произвольные постоянные, которые определяются при удовлетворении граничным условиям на торцах $\xi = 0$, $\xi = l$. При удалении от сечений $\xi = 0$ и $\xi = l$ во внутреннюю часть ЕЗС $\boldsymbol{u}_k^\pm(\xi)$ и $\boldsymbol{\sigma}_k^\pm(\xi)$ экспоненциально убывают:

$$\boldsymbol{u}_k^+(\xi) = e^{\gamma_k^+ \xi} \boldsymbol{a}_k^+, \quad \boldsymbol{u}_k^-(\xi - l) = e^{\gamma_k^-(\xi - l)} \boldsymbol{a}_k^-,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^+(\xi) = e^{\gamma_k^+ \xi} \boldsymbol{b}_k^+, \quad \boldsymbol{\sigma}_k^-(\xi - l) = e^{\gamma_k^-(\xi - l)} \boldsymbol{b}_k^-.$$

Для обоснования принципа Сен-Венана необходимо доказать следующие утверждения:

1) главные векторы и главные моменты напряжений, отвечающие элементарным решениям $\boldsymbol{\sigma}_k^\pm(\xi)$, равны нулю;

2) среди $\gamma_k^\pm$ нет чисто мнимых.

Из первого утверждения вытекает, что напряженное состояние, отвечающее однородному решению $\boldsymbol{u}_P(\xi)$ в любом поперечном сечении стержня, является самоуравновешенным (главный вектор и главный момент напряжений равны нулю), из второго утверждения следует, что оно экспоненциально убывает по мере удаления от торцов $\xi = 0$, $\xi = l$ (имеет характер «погранслоев», локализованных у торцов).

Доказательство первого утверждения вытекает из утверждения 3.3 и следующей цепочки равенств:

$$(\boldsymbol{v}_k^\pm, J\boldsymbol{v}_\ell)_1 = (\boldsymbol{a}_k^\pm, \boldsymbol{b}_\ell) - (\boldsymbol{b}_k^\pm, \boldsymbol{a}_\ell) = -(\boldsymbol{b}_k^\pm, \boldsymbol{a}_\ell) = 0, \quad \ell = 1, \ldots, 6.$$

Здесь учтено, что $\boldsymbol{b}_\ell = 0$ $(\ell = 1, \ldots, 6)$.

Для доказательства второго утверждения умножим уравнение (3.2) скалярно в H на вектор $\boldsymbol{a}$. Получаем относительно γ квадратное уравнение

$$g_0 \gamma^2 + g_1 \gamma - g_2 = 0. \tag{4.21}$$

Здесь $g_0 = (C\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$, $g_1 = (B_\tau \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$, $g_2 = (A_\tau \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$. Преобразуем g_1:

$$g_1 = (B_\tau \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (B_{3\tau} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (B'_{3\tau} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (B_{3\tau} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - \overline{(B_{3\tau} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = 2i \operatorname{Im}(B_{3\tau} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 2ig.$$

Так как g_1 — чисто мнимая величина, то для доказательства второго утверждения достаточно показать, что дискриминант уравнения (4.21) $\Delta = g_1^2 + 4g_0 g_2 = 4(-g^2 + g_0 g_2) > 0$. Представим g_0, g, g_2 в следующем виде:

$$g_0 = c_1^2 + 2c_2^2 + 2c_3^2,$$
$$g = \operatorname{Im}\left[2\left(\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}_0 + \tau D a_3, a_3\right)_{\varkappa} + \left(\overset{\circ}{\nabla} a_3 + \tau \boldsymbol{a}_*, \boldsymbol{a}_0\right) + 2\tau (D a_3, a_3)\right],$$
$$g_2 = 2f_1^2 + f_2^2 + 2f_3^2 + 2d_1^2 + d_2^2.$$

Здесь

$$c_1 = \|\boldsymbol{a}_0\|, \quad c_2 = \|a_3\|, \quad c_3 = \|a_3\|_{\varkappa},$$

$$\boldsymbol{a}_0 = a_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha, \quad \boldsymbol{a}_* = (Da_1 - a_2)\boldsymbol{e}_1 + (Da_2 + a_1)\boldsymbol{e}_2,$$

$$f_1 = \left\|\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}_0 + \tau D a_3\right\|_{\varkappa}, \quad f_2 = \left\|\overset{\circ}{\nabla} a_3 + \tau \boldsymbol{a}_*\right\|, \quad f_3 = \tau \|Da_3\|,$$

$$d_1^2 = \|\partial a_1\|^2 + \|\partial_2 a_2\|^2, \quad d_2^2 = \|\partial_1 a_2 + \partial_2 a_1\|^2, \quad \overset{\circ}{\nabla} = \boldsymbol{e}_1 \partial_1 + \boldsymbol{e}_2 \partial_2,$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})_{\varkappa} = \varkappa \int\limits_S \boldsymbol{a} \cdot \bar{\boldsymbol{b}}\, dS, \quad \|\boldsymbol{a}\|_{\varkappa}^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})_{\varkappa}.$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, получаем следующую оценку для g:

$$|g| \leqslant \left|2(\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}_0 + \tau D a_3, a_3)_{\varkappa} + (\overset{\circ}{\nabla} a_3 + \tau \boldsymbol{a}_*, \boldsymbol{a}_0) + 2\tau(Da_3, a_3)\right|$$
$$\leqslant 2 f_1 \cdot c_3 + f_2 \cdot c_1 + 2 f_3 \cdot c_2.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta}{4} \geqslant -\big(2f_1 \cdot c_3 + f_2 \cdot c_1 + 2f_3 \cdot c_2\big)^2 + \big(c_1^2 + 2c_2^2 + 2c_3^2\big)\big(2f_1^2 + f_2^2 + 2f_3^2 + 2d_1^2 + d_2^2\big)$$
$$= 2\big(f_1 c_1 - f_2 c_3\big)^2 + 4\big(f_1 c_2 - c_3 f_3\big)^2 + 2\big(f_2 c_2 - f_3 c_1\big)^2 + \big(2d_1^2 + d_2^2\big)\big(c_1^2 + 2c_2^2 + 2c_3^2\big) \geqslant 0.$$

Равенство $\Delta = 0$ возможно лишь при условии, что $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, $d_1 = d_2 = 0$, которые выполняются тогда и только тогда, когда вектор $\boldsymbol{a}_0$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_0^1$, $\boldsymbol{a}_0^2$, $\boldsymbol{a}_0^3$, $\boldsymbol{a}_0^4$. Следовательно, дискриминант обращается в ноль только на собственных векторах, соответствующих собственным значениям $\gamma_0 = 0$, $\gamma_{\pm 1} = \pm i\tau$, и, следовательно, остальные собственные значения не могут быть только чисто мнимыми. Из выражений (4.20) вытекает, что

$$\boldsymbol{\sigma}_P = \boldsymbol{\sigma}(\xi) - \boldsymbol{\sigma}_S(\xi) = O(e^{-\gamma_* \theta}), \quad \gamma_* = \min_k(\operatorname{Re} \gamma_k^+), \quad \theta = \min_\xi(\xi, l - \xi),$$

т. е. имеет характер погранслоев, что обосновывает принцип Сен-Венана.

Литература

1. *Saint-Venant B.* Memoire sur la torsin des prisms, avec des conciderations sur leur flexion, ainsi que sur l'equilibre interieur des solides elastiques en general, et des formules pratiques pour le calcul de leur resistance a divers efforts s'exercant simultanement // Mem. Savants Etrang.—1856.—Vol. 14.—P. 233–560.
2. *Saint-Venant B.* Memoire sur la flaxion des prismes, etc. // J. Math.—Liouville, 1856.—Vol. 1.—P. 89–189.
3. *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. «Классики естествознания».—М.: Физматгиз, 1961.—518 с.
4. *Mathieu E. L.* Theorie de l'elasticite des corps solides.—Paris, 1883.
5. *Clebsch R.* Saint-Venant's principle // Arch. Ration. Mech. and Analysis.—1965.—Vol. 18, № 2.—P. 83–96.
6. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Об условиях затухания и предельном поведении на бесконечности решений системы уравнений теории упругости // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 258, № 3.—С. 550–553.
7. *Устинов Ю. А.* К обоснованию принципа Сен-Венана // Изв. вузов Сев.-Кавк. рег.—1994.—С. 91–92.
8. *Устинов Ю. А.* Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров.—М.: Физматлит, 2003.—125 с.

9. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.—М., 1973.—320 с.
10. *Костюченко А. Г., Оразов М. Б.* Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.—1981.—Вып. 6.—С. 97–146.
11. *Гетман И. П., Устинов Ю. А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1993.—144 с.
12. *Друзь А. Н., Поляков Н. А., Устинов Ю. А.* Однородные решения и задачи Сен-Венана для естественно закрученного стержня // ПММ.—1996.—Т. 60, вып. 4.—С. 660–668.

Статья поступила 12 апреля 2009 г.

УСТИНОВ ЮРИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ
Южный федеральный университет,
проф. каф. теории упругости
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
гл. науч. сотр. лаб. мат. методов механики сплошной среды
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `Ustinov@math.rsu.ru`

JUSTIFICATION OF THE PRINCIPLE OF SAINT VENANT FOR A NATURALLY TWISTED ROD

Ustinov Yu. A.

The paper gives the mathematical evidence of the principle of Saint-Venant for a naturally twisted rod.

Key words: principle of Saint-Venant, spectral problem, eigenvalues, elementary solutions, generalized orthogonality.