Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 1, С. 10–16

УДК **512.552.32**

К ПОНЯТИЮ «СЕРЕДИНА» В АФФИННЫХ ПЛОСКОСТЯХ

Е. П. Емельченков, Н. Л. Шатохин

В работе предлагается несколько подходов к определению понятия «середина» в аффинной плоскости, доказывается, что в левоальтернативной плоскости все введенные определения эквивалентны.

Ключевые слова: аффинная плоскость, плоскость трансляций, аксиома Фано.

В аффинной плоскости можно ввести понятие середины пары точек различными способами.

Определение 1. Серединой пары точек a, b назовем точку $c = ab \cap (M \cap L)(N \cap P)$, где M, N, L, P — прямые, удовлетворяющие условиям: $M, N \,\mathrm{I}\, a$; $L, P \,\mathrm{I}\, b$; $M \| P \nparallel ab$; $N \| L \nparallel M, ab$. Обозначение: $c = S_1[a, b]$.

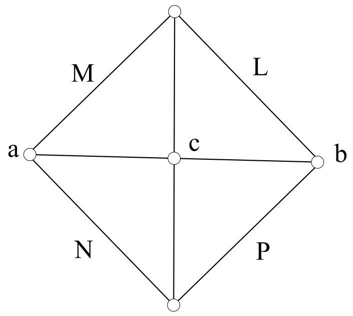

Рис. 1.

Определение 2. Серединой пары точек a, b назовем точку $c = e(af \cap bd) \cap ab$, где e — произвольная точка, не инцидентная прямой ab; $d \,\mathrm{I}\, ae$; $d \neq a, e$; $f \,\mathrm{I}\, be$; $df \| ab$. Обозначение: $c = S_2[a, b]$.

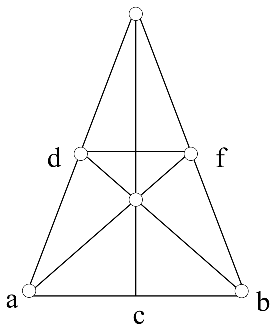

Рис. 2.

Определение 3. Точка c называется серединой пары точек a, b, если существует такой перенос τ плоскости, что $\tau(a) = c$ и $\tau(c) = b$. Обозначение: $c = S_3[a, b]$.

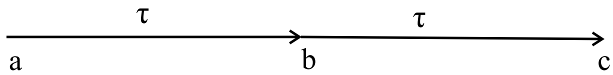

Рис. 3.

Определение 4. Аффинную плоскость $\mathscr{A} = \langle P, L; \mathrm{I}, \| \rangle$ будем называть плоскостью с серединой S, если:

1) $(\forall\, a, b \in P)$ $(\exists!\, c \in P)$ $c = S[a, b]$;

2) $(\forall\, a, c \in P)$ $(\exists!\, b \in P)$ $c = S[a, b]$.

Теорема 1. *Аффинная плоскость $\mathscr{A}$ с серединой S_1 является плоскостью трансляций, удовлетворяющей аксиоме Фано.*

$\lhd$ Докажем сначала, что в плоскости $\mathscr{A}$ для любой точки o существуют инволютивные коллинеации с центром в этой точке. Для этого рассмотрим преобразование α, которое каждой точке a ставит в соответствие точку a' такую, что $o = S_1[a, a']$.

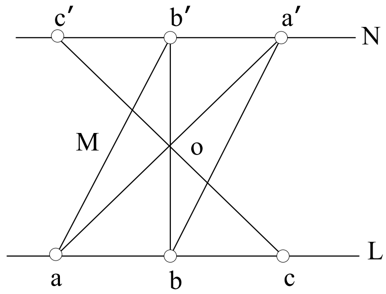

Рис. 4. Преобразование α.

Преобразование сохраняет коллинеарность точек. Действительно, пусть $a, b, c\,\mathrm{I}\,L$ и $b, c \nmid a \uparrow a'$ (в противном случае доказательство очевидно). Тогда $b' = M \cap N$, где $M\,\mathrm{I}\,a$; $M \| ba'$; $N\,\mathrm{I}\,a'$; $N \| ba$. Таким образом, точка b' инцидентна прямой N, проходящей через точку a' и параллельной прямой L. Аналогично доказывается, что и образ c' точки c инцидентен прямой N. Следовательно, α — коллинеация. Инволютивность α следует из условия $S[a, b] = S[b, a]$.

Рассмотрим теперь коллинеацию $\beta \circ \alpha$ плоскости $\mathscr{A}$, где α и β — инволютивные коллинеации с центрами a и $S_1[a, b]$. Коллинеация $\beta \circ \alpha$ не имеет неподвижность точек, так как если бы точка c являлась неподвижной, то $\beta(c) = \alpha(c)$, и, следовательно, пара точек c и $\alpha(c)$ имела бы две различные середины $S_1[a, b]$ и a, что противоречит определению 4. Так как, кроме того, $(\beta \circ \alpha)(L) \| L$ для любой прямой L плоскости $\mathscr{A}$, то коллинеация $\beta \circ \alpha$ — параллельный перенос, переводящий точку a в точку b. Отсюда следует, что плоскость $\mathscr{A}$ является плоскостью трансляций.

В плоскости $\mathscr{A}$ диагонали произвольного параллелограмма $abcd$ всегда пересекаются, так как в противном случае пара точек a, b не имела бы середины.

Поэтому $\mathscr{A}$ является плоскостью трансляций, удовлетворяющей аксиоме Фано. $\rhd$

Теорема 2. *В аффинной плоскости $\mathscr{A}$ с серединой S_2 для любой прямой L и направления Π, $L \notin \Pi$, существует инволютивная коллинеация с осью L и направлением Π.*

$\lhd$ Пусть даны прямая L и направление $\Pi, L \notin \Pi$. Рассмотрим отображение α точек плоскости $\mathscr{A}$ на себя, переводящее точку a в точку a' такую, что $aa' \in \Pi$ и $S_2[a, a']\,\mathrm{I}\,L$. Инволютивиость отображения α следует из условия $S_2[a, b] = S_2[b, a]$.

Докажем, что α сохраняет коллинеарность точек. Пусть x, y, z — три точки, инцидентные одной прямой M. Предположим сначала, что $M \notin \Pi$ и $M \nparallel L$. Положив в определении 2 $a = x$, $b = x'$, $d = y$, $e = M \cap L$, получим, что $S_2[d, f] \in L$ и $df \in \Pi$, т. е. что $y' = \alpha(y) = f$. Следовательно, образ точки y принадлежит прямой $x'(M \cap L)$. Аналогично показывается, что образ точки z принадлежит этой же прямой. Отсюда вытекает, что прямая M, пересекающая прямую L и не принадлежащая направлению Π, переходит в прямую M', также пересекающую прямую L. В случае $M \in \Pi$ доказательство очевидно. Если же теперь $M \| L$, то, предположив, что точки x', y', z' не коллинеарны, получаем, что хотя бы одна из прямых $x'y'$ или $x'z'$ не параллельна L. Однако этого быть не может, так как в силу доказанного выше и инволютивности отображения α отсюда следует, что $M \nparallel L$.

Таким образом, α является инволютивной коллинеацией с осью L и направлением Π.

Замечание 1. Из условия 2) определения 4 следует, что в плоскости с серединой S_2 осевая инволютивная коллинеация однозначно определяется осью и направлением, а в аффинной плоскости с серединой S_1 нейтральная инволютивная коллинеация однозначно определяется центром.

Действительно, пусть α — центральная инволютивная коллинеация с центром o, переводящая точку a в точку a', и M, N — две различные прямые, отличные от прямой aa'. Прямые M и N, очевидно, переходят в прямые M' и N' такие, что $M \| M'$, $N \| N'$, $M'; N' | a'$. Точка a пересечения прямых M и N' переходит в точку пересечения прямых M' и N'. Поэтому точка o инцидентна прямой bb'. Так как, кроме того, точка o инцидентна прямой aa', то по определению 1 следует, что $o = S_1[a, a']$, т. е. для любой инволютивной центральной коллинеации α аффинной плоскости $\mathscr{A}$ с серединой S_1 центр коллинеации является серединой пары a и $\alpha(a)$.

Для случая осевой коллинеации доказательство аналогично.

Замечание 2. Инволютивную центральную коллинеацию с центром o и инволютивную осевую коллинеацию с осью L и направлением Π будем называть также соответственно симметрией с центром в точке o и симметрией с осью L и направлением Π.

Теорема 3. *Аффинная плоскость $\mathscr{A}$ с серединой S_2 является плоскостью с серединой S_1. При этом*

$$(\forall\, a, b \in P) \quad S_1[a, b] = S_2[a, b].$$

$\lhd$ Пусть a, b — произвольные точки плоскости $\mathscr{A}$, L — прямая, инцидентная точке $c = S_2[a, b]$ и не параллельная прямой ab. Рассмотрим симметрию α с осью L и направлением Π_{ab}. Выберем на прямой L точку d, отличную от точки $S_2[a, b]$. Тогда прямая M, $M \|\, ad$; $M \,\mathrm{I}\, b$, пересекающая ось L в точке f, переходит при симметрии α в прямую fa, параллельную прямой bd.

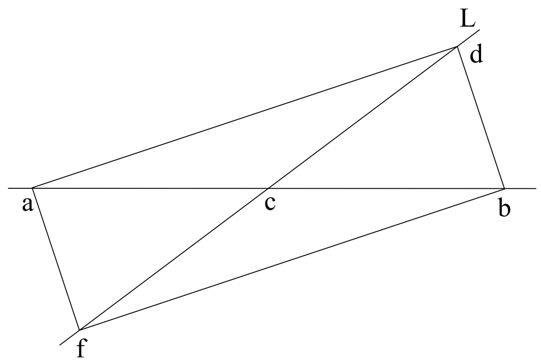

Рис. 5. Симметрия с осью L и направлением Π_{ab}.

Таким образом, точка c является точкой пересечения диагоналей параллелограмма $afbd$ и, следовательно, по определению 1 $c = S_1[a, b]$. Так как выполнение условий 1) и 2) определения 4 для середины S_1 следует из их выполнения для середины S_2, то $\mathscr{A}$ является аффинной плоскостью с серединой S_1.

Теорема 4. *Если $\mathscr{A}$ — аффинная плоскость с серединой S_1, в которой выполняется аксиома Фано, то $\mathscr{A}$ является плоскостью с серединой S_2 и*

$$(\forall\, a, b \in P) \quad S_1[a, b] = S_2[a, b].$$

$\lhd$ Известно [1, теорема 5.7.4], что в плоскости трансляций, в которой выполняется аксиома Фано, выполняется аксиома о четвертой гармонической. Поэтому середина S_2 удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 4, т. е. $\mathscr{A}$ является аффинной плоскостью с серединой S_2. В силу 3 для любой пары точек a и b $S_1[a, b] = S_2[a, b]$. $\rhd$

Теорема 5. *Аффинная плоскость $\mathscr{A}$ с серединой S_2, в которой выполняется аксиома Фано, является левоальтернативной плоскостью.*

$\lhd$ Из теорем 3 и 1 следует, что $\mathscr{A}$ — плоскость трансляций. Из теоремы 2 следует, что для любой прямой L и любого направления Π, $L \notin \Pi$, в плоскости существует симметрия α с осью L и направлением Π.

Докажем теперь, что композиция двух симметрий α_1 и α_2 с общей осью L и различными направлениями Π_1 и Π_2 соответственно является сдвигом с осью L.

Действительно, выберем прямые M и N так, что $M \in \Pi_1$, $N \in \Pi_2$, $M \cap N \,\mathrm{I}\, L$, и рассмотрим параллелограмм oe_1ee_2 такой, что $o = M \cap N$; $e_1 \,\mathrm{I}\, M$; $e_1 \neq o$; $e_1e \| L$; $e \,\mathrm{I}\, N$; $ee_2 \| M$; $e_2 \,\mathrm{I}\, L$ (рис. 6). Три точки o, e_1, e_2 определяют тернар $\mathbb{R}$, координатизирующий аффинную плоскость $\mathscr{A}$. В этом тернаре точки o, e_1, e_2, e имеют соответственно координаты $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.

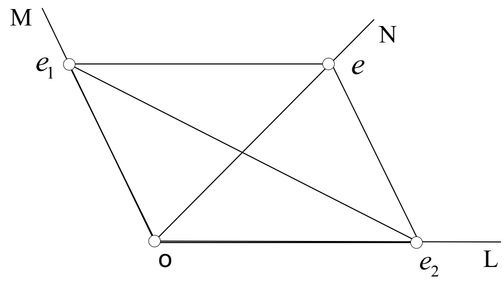

Рис. 6. Система координат.

Так как $\mathscr{A}$ является плоскостью трансляций, то тернар $\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:
1) $T(a, b, c) = a \times b + c$;
2) $\langle R, + \rangle$ — абелева группа;
3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

В плоскости $\mathscr{A}$ существует симметрия α с осью N и направлением $\Pi_{e_1e_2}$. Так как $S_1[e_1, e_2] \,\mathrm{I}\, N$, то $\alpha(e_1) = e_2$. Симметрия α действует на точки и прямые плоскости $\mathscr{A}$ следующим образом:

$$\begin{array}{rcl}
(0,1) & \to & (1,0), \\
(0,0) & \to & (0,0), \\
x = 0 & \to & y = 0, \\
(a,a) & \to & (a,a), \\
x = a & \to & y = a, \\
y = b & \to & x = b, \\
(a,b) & \to & (b,a),
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (0,0) & \to & (0,0), \\ (1,a) & \to & (a,1), \\ y = a \times x & \to & y = a_1^{-1} \times x, \\ (b, a \times b) & \to & (a \times b, b). \end{array}$$

Так как коллинеация α сохраняет инцидентность точек и прямых, то

$$b = a_1^{-1} \times (a \times b).$$

Отсюда, положив $b = a_r^{-1}$, получаем $a_1^{-1} = a_r^{-1} = a^{-1}$. Следовательно, тернар $\mathbb{R}$ обладает свойством:

$$a^{-1} \times (a \times b) = b.$$

Точки $(1,0)$ и $(0,1)$ при симметрии α переходят соответственно в точки $(0,1)$ и $(1,0)$. Поэтому прямая $y = (-1) \times x + 1$ принадлежит направлению Π коллинеации α. Отсюда, в частности, вытекает, что точки $(1,-1)$ и $(-1,1)$ инцидентны прямой $y = (-1) \times x$ и, следовательно, $(0,0) = S_2[(1,-1),(-1,1)]$. Рассматривая теперь параллелограмм $(-1,-1)(1,-1)\ (1,1)(-1,1)$, по определению 1 получаем, что $(0,0) = S_1[(-1,-1),(1,1)]$. Поэтому симметрия α_2 с осью $x = 0$ и направлением $\Pi_{y=x}$ действует на точки и прямые плоскости $\mathscr{A}$ следующим образом:

$$\begin{array}{lcl} (1,1) & \to & (-1,-1), \\ (x=0) & \to & x = 0, \\ x = 1 & \to & x = -1, \\ y = x + a & \to & y = x + a, \\ (1, 1+a) & \to & (-1, -1+a), \\ (1,a) & \to & (-1, -1-1+a), \\ (0,a) & \to & (0,a), \\ y = a & \to & y = (1+1) \times x + a, \\ y = x & \to & y = x, \\ (a,a) & \to & (-a,-a), \\ x = a & \to & x = -a, \\ y = b & \to & y = (1+1) \times x + b, \\ (a,b) & \to & (-a, (1+1) \times (-a) + b). \end{array}$$

Итак, симметрия α_2 произвольную точку (x,y) переводит в точку $(-x, (1+1) \times (-x) + y)$.

Аналогично доказанному выше получаем, что

$$(0,0) = S_1\big[(1,0),(-1,0)\big].$$

Поэтому симметрия α_1 с осью $x = 0$ и направлением $\Pi_{y=0}$ действует на точки и прямые плоскости $\mathscr{A}$ следующим образом:

$$\begin{array}{lcl} (-1,0) & \to & (1,0), \\ (0,1) & \to & (0,1), \\ y = x + 1 & \to & y = (-1) \times x + 1, \\ (0,a) & \to & (0,a), \\ y = x + a & \to & y = (-1) \times x + a, \\ y = b + a & \to & y = b + a, \\ (b, b+a) & \to & (-b, b+a), \end{array}$$

т. е. симметрия α_1 переводит произвольную точку (x,y) в точку $(-x,y)$.

Композиция $\alpha_2 \circ \alpha_1$ симметрии α_1 и α_2 точку (x,y) переводит в точку $(x, (1+1) \times (-x) + y)$. Отсюда следует, что композиция $\alpha_2 \circ \alpha_1$ является сдвигом с осью $x = 0$.

Итак, композиция двух симметрий с общей осью L и различными направлениями является сдвигом с осью L.

Нетрудно доказать теперь, что в плоскости $\mathscr{A}$ для любой прямой L и любых двух точек a и b таких, что $ab \| L$, $a, b \nmid L$, существует сдвиг с осью L, переводящий точку a в точку b. Действительно, пусть α — симметрия с осью L и произвольным направлением, β — симметрия с осью L и направлением $\Pi_{\alpha(a)b}$. Следовательно, композиция $\beta \circ \alpha$ является сдвигом с осью L, переводящим точку a в точку b.

Таким образом, плоскость $\mathscr{A}$ является левоальтернативной.

Теорема 6. *Аффинная плоскость $\mathscr{A}$, в которой выполняется аксиома Фано, является плоскостью с серединой S_2 тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ — левоальтернативная плоскость.*

$\lhd$ *Необходимость* доказана в теореме 4.

Достаточность. Пусть $\mathscr{A}$ — левоальтернативная плоскость, в которой выполняется аксиома Фано. Тогда в этой плоскости выполняется аксиома о четвертой гармонической и поэтому для каждой пары точек a, b середина $c = S_2[a, b]$ существует и определена однозначно. Отсюда же следует и выполнение условия 2) определения 4. Таким образом, $\mathscr{A}$ является аффинной плоскостью с серединой S_2. $\rhd$

Теорема 7. *Аффинная плоскость $\mathscr{A}$, в которой выполняется аксиома Фано, тогда и только тогда является плоскостью с серединой S_3, когда $\mathscr{A}$ является левоальтернативной плоскостью.*

$\lhd$ *Необходимость.* Пусть $\mathscr{A}$ является плоскостью с серединой S_3. Тогда из условия 2) определения 4 следует, что для любых двух точек a и b существует перенос τ, переводящий точку a в точку b. Поэтому $\mathscr{A}$ является плоскостью трансляций. Так как, кроме того, в $\mathscr{A}$ выполняется аксиома Фано, то в плоскости $\mathscr{A}$ выполняется аксиома о четвертой гармонической. Отсюда следует, что $\mathscr{A}$ является аффинной плоскостью, удовлетворяющей аксиоме Фано, и, следовательно, по теореме 5 $\mathscr{A}$ — левоальтернативная плоскость.

Достаточность. Пусть $\mathscr{A}$ — левоальтернативная плоскость. Так как в этой плоскости для любой пары точек a и b существует перенос, переводящий точку a в точку b, то условие 2) определения 4 для середины S_3 выполняется.

Докажем теперь, что для произвольной пары точек a и b существует середина S_3 и причем только одна. Введем тернар $\mathbb{R}$ так, чтобы точки a и b имели соответственно координаты $(0, 0)$ и $(0, 1)$. Тогда перенос τ, действующий следующим образом:

$$(x, y) \to (x, y + (1 + 1)^{-1}),$$

переводит точку $(0, 0)$ в точку $(0, (1+1)^{-1})$, а точку $(0, (1+1)^{-1}$ — в точку $(0, (1+1)^{-1} + (1 + 1)^{-1}) = (0, 1)$. Таким образом, для любой пары точек a и b существует середина $S_3[a, b]$.

Единственность середины $c = S_3[a, b]$ пары точек a, b следует из того, что перенос τ, переводящий точки $a = (a_1, a_2)$ и $c = (c_1, c_2)$ соответственно в точки c и $b = (b_1, b_2)$, однозначно определяется условиями:

$$c_1 = a_1 + x_0, \quad c_2 = a_2 + y_0,$$
$$b_1 = c_1 + x_0, \quad b_2 = c_2 + y_0.$$

Действительно, из этих условий следует:

$$b_1 = a_1 + x_0 + x_0,$$
$$b_1 - a_1 = x_0 + x_0, \quad b_1 - a_1 = (1+1) \times x_0,$$
$$x_0 = (1+1)^{-1} \times (b_1 - a_1).$$

Аналогично получаем: $y_0 = (1+1)^{-1} \times (b_2 - a_2)$. Следовательно, перенос τ однозначно определяется формулами:

$$x' = x + (1+1)^{-1} \times (b_1 - a_1),$$
$$y' = y + (1+1)^{-1} \times (b_2 - a_2). \triangleright$$

Литература

1. *Pickert G.* Projective Ebenen.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1955.—viii+343 p.

Статья поступила 16 мая 2008 г.

Емельченков Евгений Петрович
Смоленский государственный университет,
зав. каф. информатики
РОССИЯ, 214000, Смоленск, ул. Пржевальского, 4
E-mail: ypy1101@gmail.com

Шатохин Николай Леонидович
Смоленский государственный университет,
доцент каф. математики
РОССИЯ, 214000, Смоленск, ул. Пржевальского, 4
E-mail: nik-shatohin@yandex.ru

TO CONCEPT «MIDDLE» OF AFFINE PLANES

Yemelchenkov Y. P., Shatohin N. L.

Some approaches to the definition of «middle» in an affine plane are offered; it is proved that in any leftalternative plane all given definitions are equivalent.

Key words: an affine plane, a plane of translations, Fano axiom.