Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 4, С. 11–15

УДК **512.542**

ЛОКАЛЬНАЯ КОНЕЧНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ГРУПП С ЗАДАННЫМИ ПОРЯДКАМИ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

А. Х. Журтов, В. Д. Мазуров

Найдены достаточные условия, при которых группа с элементарными абелевыми централизаторами элементов порядка 2 является локально конечной.

Ключевые слова: локально конечная группа, спектр, централизатор инволюции.

Спектром периодической группы G называется множество $\omega(G)$ порядков ее элементов. В работе дается обзор результатов, связанных с доказательством локальной конечности периодических групп, имеющих определенный спектр, устанавливается, что любая группа G, для которой $2 \in \omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 5, 9, 15\}$, локально конечна и описывается ее строение.

Теорема 1. *Пусть G — группа, для которой*

$$2 \in \omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 5, 9, 15\}.$$

Тогда верно одно из следующих утверждений.

1. *Группа G — расширение абелевой группы периода 3, 5, 9 или 15 посредством группы $\langle t\rangle$ порядка 2, и $a^t = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$.*

2. *Группа G — расширение элементарной абелевой 2-группы A посредством циклической группы B порядка 1, 3, 5, 9 или 15, действующей свободно на A.*

3. $\omega(G) = \{1, 2, 3, 5\}$ *и* $G \simeq A_5$.

В частности, G локально конечна.

Здесь действие группы B на группе A называется *свободным действием*, если A нетривиальна и $a^b \neq a$ для неединичных $a \in A$ и $b \in B$.

Доказательство теоремы 1 основано на результатах работ [1–3]. Аналогично доказываются и следующие факты.

Теорема 2. *Пусть G — группа, для которой $\omega(G) = \{2, 3\} \cup \omega$, где каждый элемент из ω либо взаимно прост с числом 6, либо равен 9. Тогда верно одно из следующих утверждений.*

1. *Группа G — расширение абелевой группы периода 3 или 9 посредством группы $\langle t\rangle$ порядка 2, и $a^t = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 08-01-00322-а, № 10-01-00026-а, Программы государственной поддержки ведущих научных школ, проект НШ–344.2008.1, и АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1.419.

2. *Группа G — расширение элементарной абелевой 2-группы A посредством циклической группы B порядка* 1, 3 *или* 9, *действующей свободно на A.*

3. $\omega(G) = \{1, 2, 3, 5\}$ *и* $G \simeq A_5$.

4. $\mu(G) = \{2, 7, 9\}$ *и* $G \simeq L_2(8)$.

В частности, G локально конечна.

Теорема 3. *Пусть G — группа, для которой $\omega(G) = \{2, 3\} \cup \omega$, где каждое число из ω нечетно. Если $\omega(G)$ содержит такое простое число $p \geqslant 5$, что $3p \notin \omega(G)$, то G локально конечна и изоморфна простой группе $L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики* 2.

Отметим, что группа $L_2(Q)$ удовлетворяет условию теоремы 3 для любого локально конечного поля Q характеристики 2.

Основные определения и обозначения

Спектр периодической группы G — это множество $\omega(G)$ порядков элементов группы G: натуральное число n содержится в $\omega(G)$ тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка n. Если множество $\omega(G)$ конечно, то оно однозначно определяется множеством $\mu(G)$ своих максимальных по делимости элементов.

Пусть группа B действует на группе A. Будем говорить, что B действует *свободно*, а само действие называть *свободным действием*, если $A \neq 1$ и равенство $a^b = a$ для $a \in A$, $b \in B$ выполняется только при $a = 1$ или $b = 1$.

Известные результаты

На перечисленные ниже известные факты будем в дальнейшем ссылаться, как на предложения с соответствующими номерами.

1. Вопрос о локальной конечности групп периода n решен положительно только для небольших n.

Группы периода 2 абелевы: из равенств $x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1$ с очевидностью вытекает, что $xy = yx$.

Локальная конечность групп периода 2 и 3 была известна еще Бернсайду. Позднее Леви и Ван-дер-Варден [4, 5] показали, что любая группа периода 3 трехступенно нильпотентна.

Как показал Санов [6], группы периода 4 локально конечны. С ростом числа образующих ступень разрешимости конечных групп периода 4 неограниченно растет [7].

Локально конечны и группы периода 6 [8]. Их 2-длина и 3-длина не превосходит единицы. В частности, все они разрешимы ступени разрешимости, не большей четырех.

До сих пор ничего не известно о локальной конечности групп периода 5.

Группа, период которой достаточно большое натуральное число, может не быть локально конечной [9–12]. В частности, в [9] доказывается существование группы периода n, не являющейся локально конечной, для любого нечетного $n \geqslant 665$, а в [12] — для любого $n \geqslant 8000$.

2. Пусть G — группа, для которой $\mu(G) = \{2, 3\}$. Тогда G — расширение элементарной абелевой p-группы A посредством циклической q-группы, действующей свободно на A. Здесь $\{p, q\} = \{2, 3\}$ [13].

3. Если $\mu(G) = \{3, 4\}$, то G локально конечна [6] и выполнено одно из следующих утверждений:

(3.1) $G = VQ$, где V — нетривиальная нормальная элементарная абелева 3-подгруппа, Q является 2-группой, которая действует свободно на V и изоморфна либо циклической группе порядка 4, либо группе кватернионов порядка 8;

(3.2) $G = T\langle a \rangle$, где T — нормальная нильпотентная 2-подгруппа ступени нильпотентности 2, а порядок a равен 3;

(3.3) $G = TS$, где T — элементарная нормальная 2-подгруппа, а S изоморфна симметрической группе степени 3.

В частности, G разрешима и ее ступень разрешимости не больше, чем 3 [14].

4. Если группа P периода 5 действует свободно на абелевой $\{2, 3\}$-группе, то $|P| = 5$ [15].

5. Пусть $\mu(G) = \{2, 5\}$. Тогда G — либо расширение элементарной абелевой 2-группы A посредством группы P периода 5, действующей свободно на A, либо расширение элементарной абелевой 5-группы посредством группы порядка 2 [16]. В первом случае по предложению 4 $|P| = 5$, поэтому G во всех случаях локально конечна.

6. Пусть $\mu(G) = \{2, 2^m + 1, 2^m - 1\}$, где $m \geqslant 2$. Тогда $G \simeq L_2(2^m)$ [17].

7. Пусть $\omega(G) = \{2\} \cup \omega'$, где ω' состоит из нечетных чисел. Тогда верно одно из утверждений:

(7.1) G — расширение абелевой группы A посредством группы $\langle t \rangle$ порядка 2 и $a^t = a^{-1}$ для любого $a \in A$.

(7.2) G — расширение элементарной абелевой 2-группы A посредством группы без инволюций, действующей свободно на A при сопряжении в G.

(7.3) $G \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2 [1].

Группы из пунктов (7.1) и (7.3) локально конечны. Существуют группы из пункта (7.2), не являющиеся локально конечными [18].

8. Если $\mu(G) = \{3, 5\}$, то либо $G = FT$, где F — двуступенно нильпотентная нормальная 5-подгруппа, а $|T| = 3$, либо G — расширение трехступенно нильпотентной 3-группы посредством группы порядка 5 ([19] с учетом предложения 4). В частности, G локально конечна.

9. Если $\mu(G) = \{4, 5\}$, то выполняется одно из следующих утверждений:

(9.1) $G = TD$, где T — нормальная элементарная абелева 2-группа, а D — неабелева группа порядка 10.

(9.2) $G = FT$, где F — элементарная абелева нормальная 5-подгруппа, а T изоморфна подгруппе группы кватернионов порядка 8.

(9.3) $G = TF$, где T — нильпотентная ступени 6 нормальная 2-подгруппа, а F — группа порядка 5 ([19] с учетом предложения 4). В частности, G локально конечна.

10. Если $\mu(G) = \{3, 4, 5\}$, то G локально конечна и либо изоморфна A_6, либо $G = VC$, где V — нетривиальная элементарная абелева нормальная 2-подгруппа, а $C \simeq A_5$ [20].

11. Если $\{1, 5\} \neq \omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, то G локально конечна. Это вытекает из предложений 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 и 10 [20].

12. Если периодическая группа G, действующая свободно на абелевой группе, содержит неинвариантную подгруппу X порядка 3, то $\langle X^G \rangle$ изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$ [2, 3].

13. Пусть $\mu(G) = \{5, 6\}$. Тогда G — разрешимая локально конечная группа и справедливо одно из следующих утверждений:

(13.1) G — расширение элементарной абелевой 5-группы посредством циклической группы порядка 6;

(13.2) G — расширение трехступенно нильпотентной 3-группы посредством группы диэдра порядка 10;

(13.3) G — расширение прямого произведения трехступенно нильпотентной 3-группы и элементарной абелевой 2-группы посредством группы порядка 5 [21].

14. Если $\mu(G) = \{3, 4, 7\}$, то $G \simeq L_2(7)$ [22].

Доказательство теорем

Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям одной из теорем 1–3. Тогда для нее выполнены условия предложения 7. Если G изоморфна $L_2(Q)$ для локально конечного поля Q характеристики 2, то при условиях теоремы 1 или 2 Q конечно порядка 2^m для некоторого m и $\mu(G) = \{2, 2^m - 1, 2^m + 1\}$, откуда либо $m = 2$ и $G \simeq A_5$, либо выполнены условия теоремы 2, $m = 3$ и $G \simeq L_2(8)$. Так как пункт (7.1) предложения 7 в условиях теорем 1 и 2 совпадает с пунктом 1 этих теорем и несовместим с условием теоремы 3, то можно считать, что G — расширение элементарной абелевой 2-группы V посредством группы $H = G/V$ нечетного периода, действующей свободно на V при сопряжении в G.

Если выполнены условия теоремы 1 и H не содержит элементов порядка 3, то $\mu(G) = \{2, 5\}$ и пункт 2 теоремы 1 выполнен по предложению 4. Поэтому можно считать, что H содержит элемент r порядка 3. Так как H не содержит инволюций, то по предложению 12 r принадлежит центру H. В условиях теоремы 3 это невозможно и, таким образом, теорема 3 доказана. Если же выполнены условия теоремы 2, то H является 3-группой.

Если $\overline{R}$ — конечная 3-подгруппа из H, порожденная элементами $r_1V, \ldots, r_mV$, то $F = \langle r_1, \ldots, r_m \rangle$ — конечная группа, силовская 3-подгруппа R которой изоморфна $\overline{R}$. Если v — нетривиальный элемент из V, то $\langle R, v \rangle$ — конечная группа Фробениуса с дополнением R, поэтому R — циклическая группа. Отсюда следует, что $\langle r \rangle$ содержит все элементы порядка 3 из H, поэтому в $H/\langle r \rangle$ нет элементов порядка 9.

По предложению 1 силовская 3-подгруппа из H локально конечна и, поскольку любая ее конечная подгруппа является циклической, она сама обязана быть циклической. Это, в частности, заканчивает доказательство теоремы 2, поэтому в дальнейшем считаем, что выполнены условия теоремы 1.

По предложению 4 любая силовская 5-подгруппа из H также является циклической. Поэтому, если $\mu(H/\langle r \rangle \neq \{3, 5\}$, то выполнено заключение теоремы 1.

Предположим, что $\mu(H/\langle r \rangle = \{3, 5\}$. По предложению 8 H локально конечна. Поскольку H является $\{3, 5\}$-группой и ее силовские подгруппы циклические, она сама — циклическая группа. Так как минимальный период H равен 45, она содержит элемент порядка 45, что по предположению не верно. Это противоречие заканчивает доказательство теоремы 1.

Открытые вопросы

1. Пусть $\mu(G) = \{5, 6, 11\}$. Верно ли, что $G \simeq L_2(11)$?
2. Пусть $\mu(G) = \{6, 7, 13\}$. Верно ли, что $G \simeq L_2(13)$?
3. Пусть $\mu(G) = \{8, 9, 17\}$. Верно ли, что $G \simeq L_2(17)$?
4. Пусть $\mu(G) = \{6, p\}$, где p — простое число. Верно ли, что G локально конечна?

Литература

1. *Мазуров В. Д.* О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика.—2000.—Т. 39, № 1.—С. 74–86.
2. *Журтов А. Х.* О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 41, № 2.—С. 329–338.

3. *Журтов А. Х.* О квадратичных автоморфизмах абелевых групп // Алгебра и логика.—2000.—Т. 39, № 3.—С. 320–328.
4. *Levi F., van der Waerden B. L.* Über eine besondere Klasse von Gruppen // Abh. Math. Semin. Hamburg Univ.—1932.—Vol. 9.—P. 154–158.
5. *Levi F. V.* Groups in which the commutator operations satisfy certain algebraical conditions // J. Indian Math. Soc.—1942.—Vol. 6.—P. 87–97.
6. *Санов И. Н.* Решение проблемы Бернсайда для экспоненты 4 // Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та. Мат. сер.—1940.—Т. 10.—С. 166–170.
7. *Размыслов Ю. П.* Проблема Холла — Хигмана // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1978.—Т. 42, № 4.—С. 833–847.
8. *Hall Jr. M.* Solution of the Burnside problem for exponent six // Illinois J. Math.—1958.—Vol. 2.—P. 764–786.
9. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах.—М.: Наука, 1975.—336 с.
10. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах.—М.: Наука, 1989.—448 с.
11. *Ivanov S. V.* The free Burnside groups of sufficiently large exponents // Internat. J. Algebra Comput.—1994.—Vol. 4.—P. 3–308.
12. *Лысёнок И. Г.* Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. мат.—1996.—Т. 60, № 1.—С. 3–224.
13. *Neumann B. H.* Groups whose elements have bounded orders // J. London Math. Soc.—1937.—Vol. 12.—P. 195–198.
14. *Лыткина Д. В.* Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4 // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 2.—С. 353–358.
15. *Jabara E.* Fixed point free action of groups of exponent 5 // J. Austral. Math. Soc.—2004.—Vol. 77.—P. 297–304.
16. *Newman M. F.* Groups of exponent dividing seventy // Math. Scientist.—1979.—Vol. 4.—P. 149–157.
17. *Журтов А. Х., Мазуров В. Д.* О распознавании конечных простых групп $L_2(2^m)$ в классе всех групп // Сиб. мат. журн.—1999.—Т. 40, № 1.—С. 75–78.
18. *Созутов А. И.* О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 4.—Р. 893–901.
19. *Gupta N. D., Mazurov V. D.* On groups with small orders of elements // Bull. Austral. Math. Soc.—1999.—Vol. 60.—P. 197–205.
20. *Мазуров В. Д.* О группах периода 60 с заданными порядками элементов // Алгебра и логика.—2000.—Т. 39, № 3.—С. 329–346.
21. *Мазуров В. Д., Мамонтов А. С.* О периодических группах с элементами малых порядков // Сиб. мат. журн.—2009.—Т. 50, № 2.—С. 397–404.
22. *Lytkina D. V., Kuznetsov A. A.* Recognizability by spectrum of the group $L_2(7)$ in the class of all groups // Siberian Electronic Math. Rep.—2007.—Vol. 4.—P. 136–140.

Статья поступила 5 ноября 2009 г.

Журтов Арчил Хазешович
Кабардино-Балкарский госуниверситет,
заведующий кафедрой
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 175
E-mail: `sabinkristina@mail.ru`

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
заведующий отделом;
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4
Новосибирский государственный университет,
заведующий кафедрой
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
E-mail: `mazurov@math.nsc.ru`