Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 3, С. 15–27

УДК **513.881**

О СВОЙСТВАХ ДОПОЛНЯЕМЫХ БАЗИСНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В БЛОЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА КЁТЕ[1]

В. П. Кондаков

Посвящается 80-летию со дня рождения академика Ю. Г. Решетняка

В статье приводятся замечания о свойствах специальных базисных последовательностей элементов, порождающих дополняемые подпространства в пространствах Фреше из класса, который можно рассматривать как обобщение известного класса пространств Кёте числовых последовательностей. Обсуждается вопрос о характеризации таких последовательностей элементов в блочных пространствах Кёте и приводится обзор имеющихся в этом направлении результатов. Сформированы нерешенные вопросы и отмечена связь рассматриваемой темы с проблемой изоморфной классификации пространств Кёте.

Ключевые слова: базисные последовательности, дополняемые подпространства, пространства Кёте.

1. Предварительные сведения

Пусть заданы счетный набор пространств Фреше $(X_n, (\|\cdot\|_r^{(n)})_{r=1}^{\infty})$ с фиксированными монотонными последовательностями полунорм, задающих топологию, число p, $0 < p \leqslant \infty$, и числовая матрица $[a_r(n)]_{r,n\in\mathbb{N}}$ со свойством монотонности по строкам $(0 \leqslant a_r(n) \leqslant a_{r+1}(n),\ r, n \in \mathbb{N})$.

Блочным пространством типа Кёте [1] называют пространство последовательностей

$$E = l_p\big([a_r(n)], (X_n)\big) = \left\{ x = (x_n) : x_n \in X_n,\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\|_r^{(n)})^p a_r^p(n)\right)^{\frac{1}{p}} = |x|_r < +\infty,\ r \in \mathbb{N} \right\}$$

с топологией, определяемой системой p-полунорм $(|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty}$.

При $p \geqslant 1$ p-полунормы являются обычными (выпуклыми) полунормами, а при $p < 1$ p-полунормы являются однородными функционалами, не удовлетворяющими неравенству треугольника. Поэтому при $p < 1$ блочные пространства типа Кёте не являются локально выпуклыми. В том случае, когда топология пространства может быть задана одной p-нормой с $p < 1$ его называют *локально ограниченным*, поскольку в этом пространстве имеется ограниченная окрестность нуля (см., например, [2]).

[1] Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00329а.

Класс блочных пространств типа Кёте включает в себя не только классические пространства Кёте, появившиеся естественным образом при изучении реализаций пространств аналитических функций (см. [3, 4]), но и пространства более общего вида, имеющие описываемое ниже p-абсолютное разложение.

Пусть в локально выпуклом пространстве $(E, \{\|\cdot\|_i\}_{i\in I})$ задана последовательность $A = (A_k)_{k=1}^{\infty}$ непрерывных линейных отображений $A_k : E \to E$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $A_m \circ A_n = \delta_{mn} A_n$, $m, n = 1, 2, \ldots$, и

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(e) = e \ (\forall\, e \in E), \text{ т. е. при любом } i \in I,\\ \lim_{n\to\infty} \left| e - \sum_{k=1}^{n} A_k(e) \right|_i = 0 \quad \forall\, e \in E.\end{gathered} \tag{1}$$

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $A = (A_k)$ непрерывных линейных отображений с описанными выше свойствами определяет p-абсолютное с $p \geqslant 1$ разложение пространства E, если система полунорм

$$\left\{ \|\cdot\|_i = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(\cdot)|_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}_{i\in I}, \quad \|\cdot\|_i = \sup_k |A_k(\cdot)|_i, \ p = \infty,$$

задает исходную топологию E, т. е. для любого индекса $i \in I$ найдется индекс $j(i) \in I$ такой, что $|e|_i \leqslant \|e\|_{j(i)} \leqslant |e|_{j(j(i))}$ для любого $e \in E$.

Разложение (1) элементов E называют *разложением тождественного отображения*. Разложение будет безусловным, если сходимость ряда в (1) слева безусловна для любого элемента. Очевидно, если последовательность $A = (A_k)$ определяет p-абсолютное разложение, то (1) в этом случае является безусловным разложением.

Термин *«блочные пространства типа Кёте»* использовался значительно раньше в [5] для весьма частного случая, когда $p = 2$, а все X_n являлись конечномерными евклидовыми пространствами, в которых (полу)нормы определялись с помощью монотонных систем строго положительно определенных операторов $A_{r,n}$ в X_n. В [5] построены примеры ядерных пространств указанного вида, не имеющих базисов даже в случае двумерных блоков X_n.

Многие, сравнительно хорошо изученные, классы ядерных пространств Кёте имеют блочные расширения вида $E = l_p\big([a_r(n)], (l_p^{M(n)})\big)$, где $X_n = l_p^{M(n)}$ — координатные банаховы пространства с $\dim X_n = M(n) < +\infty$ (см., например, [1]), которые в случае хотя бы одной бесконечной размерности $M(n)$ не будут ни ядерными, ни монтелевскими. В некоторых случаях их можно рассматривать как тензорные произведения ядерных и банаховых пространств.

Фактически, примерами счетно-гильбертовых пространств такого вида являются произвольные пространства степенных рядов (центров гильбертовых шкал), рассматривавшихся в [6].

В определении пространства типа Кёте X_n можно рассматривать как подпространства $\widetilde{X}_n$ (блоки) в $E = l_p\big([a_r(n)], (X_n)\big)$, образованные элементами вида

$$(\underbrace{0, \ldots, 0, x_n}_{n}, 0, \ldots), \quad x_n \in X_n.$$

Соответствие $Q_n(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (0, \ldots, 0, x_n, 0, \ldots)$, $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in E$, очевидно, определяет непрерывный линейный проектор из E на $\widetilde{X}_n$, т. е. блоки являются дополняемыми подпространствами.

Если задано произвольно дополняемое подпространство F в E, то выбрав непрерывный линейный проектор P из E на F, всегда можно путем удаления части строк определяющей матрицы Кёте, умножения оставшихся строк на подходящие числа с естественной перенумерацией условиям непрерывности проектора P придать вид: $|Px|_r \leqslant |x|_{r+1}$, $x \in E$, $r \in \mathbb{N}$. Базисную последовательность (f_n) в E называют *дополняемой*, если замыкание F ее линейной оболочки есть дополняемое подпространство в E. Это не означает, что (f_n) может быть дополнена до базиса в E. Здесь все зависит от наличия базиса в дополнении к F.

Определение 2. В пространстве Фреше E базисную последовательность $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ будем называть p-абсолютной с некоторым $p > 0$, если она определяет p-абсолютное разложение своей замкнутой линейной оболочке $\overline{\operatorname{span}(f_m)_{m=1}^{\infty}} = F \subset E$ с одномерными операторами $A_k(e) = f'_k(e)f_k$, $e \in F$, $k \in \mathbb{N}$, где f'_k — координатные функционалы базисной последовательности (f_m).

Всякий базис пространства Фреше, как известно (см., например, [2, с. 67]), является равностепенно непрерывной последовательностью, т. е. удовлетворяет условию

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s(r))\ (\exists\, C(r) > 0) \quad \sup_n |f'_n(x)||f_n|_r \leqslant C(r)|x|_{s(r)} \quad (\forall\, x \in F),$$

где f'_n — коэффициентные функционалы базиса (f_n).

Условию равностепенной непрерывности дополняемой базисной последовательности (f_n) при выбранном непрерывном линейном проекторе P из E на $F = \overline{\operatorname{span}(f_n)}$ описанной выше процедурой перехода к новой системе полунорм, эквивалентной исходной, можно придать вид

$$\begin{aligned} &\sup_n |f'_n(Pe)||f_n|_r \leqslant \tfrac{1}{2^r}|e|_{r+1}, \quad e \in E, \text{ и одновременно} \\ &|e|_r \leqslant \tfrac{1}{2^r}|e|_{r+1}, \quad |Pe|_r \leqslant \tfrac{1}{2^r}|e|_{r+1}, \quad e \in E,\ r \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2}$$

Два базиса $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(f_m)_{n=1}^{\infty}$ линейного топологического пространства E называют *квазиэквивалентными*, если они переводятся друг в друга путем умножения на числа, отличные от нуля, перестановки элементов и автоморфизма пространства E на себя.

2. Характеризация дополняемых p-абсолютных базисных последовательностей элементов

Лемма 1. *Пусть в блочном пространстве типа Кёте $E = l_1\big([a_r(n)], (X_n)\big)$ выбраны дополняемая базисная последовательность (f_n), проектор P из E на $F = \overline{\operatorname{span}(f_n)}$ и матрица $[a_r(n)]$ такова, что выполнены условия (2). Тогда для каждого индекса $n \in \mathbb{N}$ (элемента f_n) найдется такой индекс $i(n)$ (индекс проекции f_n на $Q_{i(n)}E$), что*

$$\sup_r \frac{|Q_{i(n)}f_n|_r}{|f_n|_{r+1}} \leqslant \inf_s \frac{|Q_{i(n)}f_n|_{s+1}}{|f_n|_s},$$

т. е. существуют конечные числа

$$0 \neq \frac{1}{\lambda_n} = \inf_s \frac{|Q_{i(n)}f_n|_{s+1}}{|f_n|_s}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

такие, что

$$\lambda_n|Q_{i(n)}f_n|_r \leqslant |f_n|_{r+1} \leqslant \lambda_n|Q_{i(n)}f_n|_{r+2}, \quad r, n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

$\lhd$ Согласно определению пространства типа Кёте в соответствии с условиями (2), для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_i \sup_r \frac{|Q_i f_n|_r}{|f_n|_{r+1}} \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} \leqslant 1.$$

С другой стороны, применение очевидного неравенства вместе с (2) (видом условия равностепенной непрерывности (f_n)) дает:

$$1 \leqslant \sum_i |f_n'(PQ_i f_n)| \leqslant \sum_i \inf_s \frac{|Q_i f_n|_{s+1}}{|f_n|_s}.$$

Заметим, что во всех приведенных оценках суммы берутся по тем индексам i, которым соответствуют отличные от нуля проекции $Q_i f_n$. Именно для таких индексов получаем соединение двух оценок

$$\sum_i \sup_r \frac{|Q_i f_n|_r}{|f_n|_{r+1}} \leqslant 1 = \sum_i f_n'(PQ_i f_n) \leqslant \sum_i \inf_s \frac{|Q_i f_n|_{s+1}}{|f_n|_s},$$

а это значит, что существует $i = i(n)$:

$$\sup_r \frac{|Q_{i(n)} f_n|_r}{|f_n|_{r+1}} \leqslant \inf_s \frac{|Q_{i(n)} f_n|_{s+1}}{|f_n|_s},$$

и условие (3) проверяется непосредственно. $\rhd$

Из леммы 1 непосредственно вытекает следующий факт.

Предложение 1. *Пусть $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ — дополняемая абсолютная последовательность в блочном пространстве Кёте $E = l_1\big([a_r(n)], (X_n)\big)$. Тогда из этой последовательности либо можно выделить подпоследовательность, порождающую подпространство, изоморфное пространству l_1, либо — подпоследовательность $(f_{m(k)})_{k=1}^{\infty}$, квазиэквивалентную базисной последовательности элементов вида $g_{m(k)} = Q_{n(k)} f_{m(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $n(k_1) \neq n(k_2)$ для $k_1 \neq k_2$.*

Из предложения 1, в частности, следует, что в ядерных пространствах Фреше, имеющих абсолютные разложения с двумерными пространствами X_n, описанных в [5] как пространства без базисов, не может быть бесконечных дополняемых базисных последовательностей.

Утверждение леммы 1 распространяется на классы пространств типа Кёте для $1 < p < +\infty$ при дополнительном ограничении на блоки X_n, а именно, когда X_n каждое является банаховым пространством $l_p^{(M_n)}$ с тем же значением p и естественной нормой, $M_n = \dim X_n \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

В этом случае рассматриваются фактически пространства Кёте с p-абсолютным базисом ортов и можно повторить с небольшим добавлением выкладки [7].

Лемма 2 [7, теорема 4]**.** *Пусть в блочном пространстве типа Кёте $E = l_p\big([a_r(n)], (l_p^{M(n)})\big)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, выбраны дополняемая базисная последовательность (f_m), проектор P из E на $F = \overline{\operatorname{span}(f_m)}$ и матрица $[a_r(n)]$ такова, что выполнены условия (2). Тогда выполнены условия:*

$$(\forall\, m \in \mathbb{N})\ (\exists\, i(m) \in \mathbb{N}) \quad \sup_r \frac{|Q_{i(m)} f_m|_r}{|f_m|_{r+1}} \leqslant \inf_s \frac{|Q_{i(m)} f_m|_{s+1}}{|f_m|_s},$$

$$\sup_r \frac{a_r(i(m))}{|f_m|_{r+1}} \leqslant \inf_s \frac{a_{s+1}(i(m))}{|f_m|_s}.$$

$\lhd$ При $0 < p < \infty$, используя условия (2), имеем

$$\left(\sum_i \sup_r \frac{|Q_i f_n|_r^p}{|f_n|_{r+1}^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_j \left[|e'_{ij}(f_n)| \sup_{r:|f_n|_{r+1}\neq 0} \frac{a_r(i)}{|f_n|_{r+1}}\right]^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left\{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{rp}}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant 1 = f'_n(f_n) \leqslant \sum_{i,j} |e'_{ji}(f_n)||f'_n(e_{ji})|$$

$$\leqslant \left(\sum_{i,j} |e'_{ji}(f_n)^p \inf_r \frac{a_{r+1}^p(i)}{|f_n|_r^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i,j}\left[\frac{|f'_n(e_{ji})|}{\inf_r \frac{a_{r+1}(i)}{|f_n|_r}}\right]^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i,j}\left[|e'_{ji}(f_n)| \inf_r \frac{a_{r+1}(i)}{|f_n|_r}\right]^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_i \inf_r \frac{|Q_i f_n|_{r+1}^p}{|f_n|_r^p}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{где} \ \ q = \frac{p}{p-1}$$

и суммирование в $\sum_{i,j}$ ведется по всем индексам базиса ортов (e_{ji}, $1 \leqslant j \leqslant M(i)$, $i = 1, 2, \ldots$). Понятно, что в суммах принимаются во внимание только слагаемые, отличные от нуля. Утверждение леммы 2 следует прямо из сравнения крайних и внутренних выражений в написанных неравенствах. $\rhd$

В лемме 2, таким образом, устанавливается некоторое соответствие элементам f_m элементов базиса ортов $e_{i(m),j}$ с возможными повторениями и оценками $|\lambda_m a_r(i(m))| \leqslant |f_m|_{r+1} \leqslant \lambda_m a_{r+2}(i(m))$, $m, r \in \mathbb{N}$.

Замечание. Как и в теореме 4 из [7] в доказательстве леммы 2 не используется базисность системы (f_n) в полной мере, а только «выступающий» характер элементов, заключающийся в существовании функционалов f'_n : $f'_n(f) \geqslant 1$ с оценками условия равностепенной непрерывности.

При изучении свойств базисов в декартовых произведениях конечного числа блочных пространств типа Кёте бывает необходимо произвести разбиение произвольного базиса на части, определенным образом связанные с базисами сомножителей. Для этой цели может быть полезно следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть в декартовом произведении $E = E_1 \times E_2$ счетно-нормированных пространств E_i, $i = 1, 2$, заданы элемент f_0 и функционал f'_0 такой, что $f'_0(f_0) \geqslant 1$. Если система норм $(|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty}$, определяющая топологию E такова, что*

$$|e|_r = |P_1 e|_r + |P_2 e|_r, \quad |e|_r \leqslant \frac{1}{2}|e|_{r+1}, \quad |f'_0(e)||f_0|_r \leqslant |e|_{r+1}, \quad e \in E, \ r = 1, 2, \ldots,$$

где P_i — проекции E на E_i, $i = 1, 2$, то существует число $\lambda_0 > 0$ и индекс $i(0)$:

$$f'_0(P_{i(0)} f_0) \geqslant \frac{1}{2},$$

с которыми справедливы неравенства

$$\lambda_0 |P_{i(0)} f_0|_r \leqslant |f_0|_{r+1} \leqslant \lambda_0 |P_{i(0)} f_0|_{r+2}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

$\triangleleft$ Поскольку

$$\sup_r \frac{|P_{i(0)}f_0|_r}{|P_{i(0)}f_0|_{r+1} + |P_{3-i(0)}f_0|_{r+1}} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant |f_0'(P_{i(0)}f_0)| \leqslant \inf_s \frac{P_{i(0)}f_0|_{s+1}}{|f_0|_s},$$

то положив

$$\frac{1}{\lambda_0} = \inf_s \frac{P_{i(0)}f_0|_{s+1}}{|f_0|_s},$$

приходим к неравенствам утверждения леммы. $\triangleright$

Заметим, что для элемента $\lambda_0 P_{i(0)}f_0$, определенного в лемме 3, и функционала f_0' выполняются неравенства

$$|f_0'(e)||\lambda_0||P_{i(0)}f_0|_r \leqslant |f_0'(e)||f_0|_{r+1} \leqslant |e|_{r+2}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

которые аналогичны неравенствам для пары (f_0, f_0') со сдвигом индексов норм на единицу.

Так как любая базисная последовательность в пространстве Фреше равностепенно непрерывна, для базисной последовательности (f_n), порождающей дополняемое подпространство в декартовом произведении $E = E_1 \times E_2$ счетно-нормированных пространств Фреше E_i, $i = 1, 2$, можно выбрать систему норм в E так, чтобы выполнялись условия (2) для системы норм $(|e|_r = |P_1 e|_r + |P_2 e|_r)_{r=1}^{\infty}$. В этом случае для каждого элемента f_m определяются, согласно лемме 3, число m и индекс $i(m)$ проекции с двусторонними оценками норм

$$\lambda_m |P_{i(m)}f_m|_r \leqslant |f_0|_{r+1} \leqslant \lambda_m |P_{i(m)}f_m|_{r+2}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Элемент f_m в этом случае будем считать подчиненным сомножителю $E_{i(m)}$.

Из леммы 3 и сказанного непосредственно следует простое утверждение.

Лемма 4. *Всякую дополняемую базисную последовательность (f_m) в декартовом произведении $E = E_1 \times E_2$ счетно-нормированных пространств E_i можно разбить не более чем на три части, элементы каждой из которых подчинены одному или одновременно двум сомножителям.*

При некоторых ограничениях на сомножители E_i декартова произведения $E = E_1 \times E_2$ произвольный базис дополняемого подпространства разбивается по указанному выше правилу на две части, подчиненные каждому из сомножителей, а элементов, подчиненных одновременно двум сомножителям, может быть не более конечного числа. Прежде чем сформулировать такого сорта ограничения, напомним определение важного класса пространств Кёте, определяемых правильными матрицами.

Определение 3 [8]. Последовательность элементов $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ счетно-нормированного пространства E называют *правильной в смысле Драгилева*, если имеется система норм $(|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty}$, определяющая исходную топологию в E, для которой

$$\frac{|x_n|_r}{|x_n|_{r+1}} \downarrow 0 \text{ при } n \uparrow \infty,\ r = 1, 2, \ldots$$

Также следуя [8], пространство Кёте $l_p[a_r(n)]$ будем называть *правильным*, если его базис ортов $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ является правильным в смысле Драгилева.

В этом случае можно считать матрицу Кёте правильной, т. е.

$$\frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} = \frac{|e_n|_r}{|e_n|_{r+1}} \downarrow 0 \text{ при } n \uparrow \infty,\ r = 1, 2, \ldots$$

Предложение 2. *Для двух произвольных пространств Кёте $E_i = l_p[a_r^{(i)}(n)]$, $i = 1, 2$, следующие условия равносильны:*

1°. *Базисы ортов $(e_n^{(i)})_{n=1}^\infty$ в E_i, $i = 1, 2$, не имеют квазиэквивалентных подпоследовательностей $(e_{n_k}^{(1)})_{k=1}^\infty$ и $(e_{m_k}^{(2)})_{k=1}^\infty$.*

2°. *Пространства E_i, $i = 1, 2$, не содержат изоморфных друг другу дополняемых подпространств, каждое из которых изоморфно правильному пространству Кёте.*

$\lhd$ Если выполнено условие 1°, то и 2° должно выполняться, поскольку, согласно [9], у изоморфных правильных пространств Кёте базисы ортов квазиэквивалентны и, согласно лемме 2, в них должны быть подпоследовательности, квазиэквивалентные двум подпоследовательностям в базисах ортов $(e_n^{(1)})_{n=1}^\infty$ и $(e_n^{(2)})_{n=1}^\infty$, чего не может быть, согласно 1°.

С другой стороны, если выполнено условие 2°, то и квазиэквивалентных подпоследовательностей в базисах ортов пространств E_i быть не может, поскольку, согласно [10], из каждой подпоследовательности базиса ортов можно выделить правильную подпоследовательность, порождающую дополняемое (координатное) подпространство, изоморфное правильному пространству Кёте. $\rhd$

Определение 4. Будем называть пространства Кёте $E_i = l_p[a_r^{(i)}(n)]$, $i = 1, 2$, *структурно различными*, если для них выполнены эквивалентные условия 1°, 2° предложения 2.

Теорема 1. *Пусть в декартовом произведении структурно различных пространств Кёте $E_i = l_p[a_r^{(i)}(n)]$, $i = 1, 2$, рассматривается дополняемая базисная последовательность $(f_m)_{m=1}^\infty$. Существует разбиение этой последовательности на две части $(f_m)_{m\in\mu_1}$, $(f_m)_{m\in\mu_2}$ ($\mu_1 \cup \mu_2 = \mathbb{N}$) так, что все элементы каждой части подчинены сомножителю с соответствующим индексом, т. е. часть $(f_m)_{m\in\mu_i}$ подчинена E_i, $i = 1, 2$, и при этом только конечное число элементов f_m может быть одновременно подчинено каждому сомножителю.*

$\lhd$ Согласно выкладкам, проведенным при доказательстве леммы 2, подчиненность элемента f_m сомножителю E_i фактически означает наличие двусторонних неравенств для норм элемента f_m и норм нормированного некоторым множителем $\lambda_m > 0$ элемента базиса ортов E_i. Если теперь предположить бесконечность множества элементов f_m, подчиненных сразу E_1 и E_2, то переходя к подпоследовательности (f_{m_k}), квазиэквивалентной частям базисов ортов E_i, легко получить противоречие с условием структурного различия E_i, сопоставляя подпоследовательности ортов, квазиэквивалентные (f_{m_k}), а значит, и квазиэквивалентные друг другу. $\rhd$

Очевидно, что из двух структурно различных пространств Кёте $l_p[a_r^{(i)}(n)]$, $i = 1, 2$, хотя бы одно не содержит дополняемых подпространств, изоморфных бесконечномерным банаховым пространствам l_p. Бывает полезно некоторое ослабление этого ограничения.

Будем говорить, что блочные пространства Кёте $E_i = l_p\big([a_r^{(i)}(n)], (l_p^{M(n,i)})_{n=1}^\infty\big)$, $i = 1, 2$, *структурно различны* с точностью до нормируемых дополняемых подпространств, изоморфных пространствам Кёте, если в них нет изоморфеных друг другу дополняемых подпространств $F_i \subset E_i$, $i = 1, 2$, каждое из которых изоморфно ненормируемому пространству Кёте. В этом случае при разбиении произвольной дополняемой базисной последовательности $(f_m)_{m=1}^\infty$ декартова произведения $E_1 \times E_2$, согласно лемме 4, множество элементов $(f_m)_{m\in\mu_3}$, подчиненных одновременно обоим сомножителям, может быть бесконечным и соответствующие, согласно лемме 2, подпоследовательности (или конечные наборы) базисов ортов сомножителей порождают нормируемые подпространства, изоморфные пространствам l_p (или конечномерным пространствам).

Пусть в блочном пространстве Кёте $E = l_p\big([a_r(n)], (l_p^{M(n)})_{n=1}^{\infty}\big)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, задана дополняемая p-абсолютная базисная последовательность $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ и выбран непрерывный линейный проектор P, действующий из E на дополняемое подпространство $F = \overline{\operatorname{span}(f_m)_{m=1}^{\infty}}$. Матрицу Кёте $[a_r(n)]$ можно предполагать выбранной так, чтобы выполнялись неравенства

$$|Pe|_r^p \leqslant \frac{1}{2^{rp}} \sum_{m=1}^{\infty} |f_m'(Pe)|^p |f_m|_{r+1}^p \doteq \frac{1}{2^{rp}} \|e\|_{r+1}^p \leqslant \frac{|e|_{r+2}^p}{2^{(2r+1)p}},$$

$r \in \mathbb{N}$, $e \in E$. Этого всегда можно добиться переходом от произвольной исходной матрицы Кёте к эквивалентной путем удаления некоторых строк, естественной перенумерацией и умножением оставшихся строк на числа. Условия (2), очевидно, будут выполняться для $(f_m)_{m=1}^{\infty}$.

Лемма 5. *При сделанных предположениях для любых наборов ν, μ натуральных индексов и любых последовательностей положительных чисел (c_r), (d_r) справедливы неравенства*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |f_m'(Pe)|^p \left[\inf_{r\in\nu} \frac{|f_m|_{r+1}^p}{c_r^p} - \sup_{s\in\mu} \frac{|f_m|_{s+1}^p}{d_s^p}\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |e_n'(Pe)|^p \left[\inf_{r\in\nu} \frac{|e_n|_{r+2}^p}{c_r^p} - \sup_{s\in\mu} \frac{|e_n|_s^p}{d_s^p}\right], \quad e \in E.$$

$\lhd$ Покажем сначала выполнение цепочки неравенств для нижних граней. Выбрав для произвольного $e \in E$ и $\varepsilon > 0$ числа $\varepsilon_n > 0$:

$$\sum_n \varepsilon_n = \varepsilon$$

и разбиение натурального ряда

$$N = \bigcup_{s\in S} \nu_s^e: \ \nu_s^e = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|e_n|_{s+2}^p}{c_s^p} \leqslant \inf_{r\in\nu} \frac{|e_n|_{r+2}^p}{c_r^p} + \varepsilon_n \right\}$$

($S = \{s : \nu_s^e \neq \varnothing\}$) с соответствующими проекторами

$$P_s(e) = \sum_{n\in\nu_s^e} e_n'(e) e_n, \quad s \in S,$$

получаем с использованием неравенства треугольника и того же выбора полунорм

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} |f_m'(Pe)|^p \inf_{r\in\nu} \frac{|f_m|_{r+1}^p}{c_r^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_s \left(\sum_{m=1}^{\infty} |f_m'(PP_s e)|^p \inf_{r\in\nu} \frac{|f_m|_{r+1}^p}{c_r^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \sum_s \left(\sum_{m=1}^{\infty} |f_m'(PP_s e)|^p \frac{|f_m|_{s+1}^p}{c_s^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_s \frac{1}{2^{s+1}} \frac{|P_s e|_{s+2}}{c_s}$$

$$\leqslant \sum_s \frac{1}{2^{s+1}} \left(\sum_{n\in\nu_s^e} |e_n'(e)|^p \frac{|e_n|_{s+2}^p}{c_s^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |e_n'(e)|^p \inf_{r\in\nu} \frac{|e_n|_{r+2}^p}{c_r^p} + \varepsilon\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Согласно неравенствам, обеспеченным выбором полунорм, имеем для произвольного элемента $e \in F$ (т. е. $e = Pe$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e_n'(e)|^p \sup_{s\in\mu} \frac{|e_n|_s^p}{d_s^p} \leqslant \sup_{s\in\mu} 2^s \frac{|e|_s^p}{d_s^p} \leqslant \sup_{s\in\mu} \frac{\|e\|_{s+1}^p}{d_s^p} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |f_m'(e)|^p \sup_{s\in\mu} \frac{|f_m|_{s+1}^p}{d_s^p}.$$

Неравенства формулировки леммы 5 получаются вычитанием доказанных неравенств после предельного перехода при $\varepsilon \to 0$. $\rhd$

Теорема 2. *Пусть пространство Фреше F с p-абсолютным базисом $(f_m)_{m=1}^\infty$ изоморфно дополняемому подпространству блочного пространства Кёте $E = l_p\bigl([a_r(n)], (l_p^{M(n)})\bigr)$. Тогда F изоморфно блочному пространству Кёте вида $l_p\bigl([a_r(k(n))], (l_p^{L(n)})\bigr)$, где размерности $L(n)$ удовлетворяют оценкам*

$$L(n) \leqslant M(k(n)) + \sum_{j\in\nu(n)} M(j),$$

$$\nu(n) = \left\{ j \in \mathbb{N} : \frac{a_{r+2}(j)}{a_{r+1}(k(n))} \geqslant \frac{a_s(j)}{a_{s+1}(k(n))},\ r, s \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\lhd$ Согласно лемме 2 при надлежащем выборе полунорм в E и F имеем

$$(\forall\, m \in \mathbb{N})\ (\exists\, i(m) \in \mathbb{N})\ (\exists\, \lambda_m > 0) \quad \lambda_m a_r(i(m)) \leqslant |f_m|_{r+1} \leqslant \lambda_m a_{r+2}(i(m)), \quad r \in \mathbb{N}.$$

В последовательности $(i(m))_{m=1}^\infty$ натуральные индексы могут повторяться и можно обозначить $(k(n))_{n=1}^\infty$ возрастающую последовательность всех встречающихся индексов без повторений. Не исключается и случай конечного числа индексов, когда какой-то из них соответствует бесконечному блоку в представлении E. Таким образом, с помощью умножения элементов f_m на числа λ_m^{-1} и возможной перестановки последовательности $\lambda_m^{-1} f_m$ приходим к представлению пространства F в виде блочного пространства Кёте $l_p\bigl([a_r(k(n))], (l_p^{L(n)})\bigr)$, где $L(n)$ — количество повторений индекса $k(n)$ в последовательности $(i(m))_{m=1}^\infty$. Оценки размерностей $L(n)$ выводятся с использованием леммы 5. В условии этой леммы полагаем $|f_m|_r = a_r(i(m))$ и для каждого фиксированного блока элементов базиса ортов с нормами $a_r(k(n))$ (изоморфного $l_p^{L(n)}$) выбираем $c_r = a_{r+1}(k(n))$, $d_s = a_{s+1}(k(n))$, $r, s \in \mathbb{N}$ и $\nu = \mu = \mathbb{N}$. Для простоты считаем, что F отождествлено с дополняемым подпространством E. Если предположить, что

$$L(n) > M(k(n)) + \sum_{j\in\nu(n)} M(j),$$

то в указанном блоке ортов из F размерности $L(n)$ найдется линейная комбинация $f_0 = Pf_0$, у которой в разложении по базису ортов пространства E будет $e'_j(Pf_0) = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\inf_r \frac{a_{r+2}(j)}{a_{r+1}(k(n))} \geqslant \sup_s \frac{a_s(j)}{a_{s+1}(k(n))}.$$

Это противоречит неравенствам леммы 5, поскольку для этого элемента $f_0 = Pf_0$ левая часть неотрицательна, а правая — строго меньше нуля. $\rhd$

Следствие. *Пусть пространство Фреше F с p-абсолютным базисом (f_m) изоморфно дополняемому подпространству блочного пространства Кёте $E = l_p\bigl([a_r(n)], (l_p^{M(n)})\bigr)$. Тогда из каждой бесконечной подпоследовательности элементов $(f_{m(k)})_{k=1}^\infty$ базиса (f_m) можно извлечь подпоследовательность квазиэквивалентную некоторой подпоследовательности базиса ортов пространства E.*

Убедиться в справедливости этого утверждения можно путем сравнения условия квазиэквивалентности p-абсолютных базисов (x_n) и (y_n) счетнонормированных пространств

$(X, (|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty})$, $(Y, (\|\cdot\|_{r=1}^{\infty})$, выражающихся с помощью неравенств при некотором выборе констант $\varepsilon_1(r) > 0$, $c_2(r) > 0$ и функции $s(\cdot)$ натурального аргумента

$$c_1(r)|x_n|_r \leqslant \lambda_n \|y_{\sigma(n)}\|_{s(r)} \leqslant c_2(r)|x_n|_{s(s(r))}, \quad r, n \in \mathbb{N},$$

где $(\sigma(n))$ — перестановка $\mathbb{N}$, $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и оценок леммы 2. В самом деле, если в подпоследовательности $(f_{m(k)})$ бесконечное число элементов $f_{m(k)}$ соответствующих $e_{i(m(k))}$ из разных блоков, то оценки леммы 2 сразу дают требуемую квазиэквивалентность $(f_{\widetilde{m}(k)})_{k=1}^{\infty}$ и $(e_{i(\widetilde{m}(k))})_{k=1}^{\infty}$, где $\widetilde{m}(k)$ выбраны так, что $i(\widetilde{m}(k))$ и $i(\widetilde{m}(j))$ из разных блоков при $k \neq j$, а в остальных случаях выделяются нормированные подпоследовательности эквивалентные базису ортов пространства l_p, и квазиэквивалентности такой подпоследовательности части базиса ортов E обеспечивается оценками $L(n)$, проведенными в доказательстве теоремы.

3. Нерешенные вопросы и обзор наиболее известных результатов

Следующая проблема остается открытой, хотя ее положительные решения в частных случаях известны с 60-х годов прошлого столетия (см., например, [11, 12]).

Проблема. *Будет ли любая дополняемая p-абсолютная базисная система $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ в блочном пространстве Кёте $E = l_p\big([a_r(n)], (l_p^{M(n)})\big)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $M(n) \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{N}$, квазиэквивалентна подпоследовательности канонического базиса ортов пространства E?*

Рассмотрим классы блочных пространств Кёте, в которых положительное решение проблемы получается либо просто, либо известно из других источников.

Следующие два класса блочных пространств Кёте являются в некотором смысле крайними случаями.

Пусть блочное пространство Кёте имеет представление вида $E = l_p\big([a_r(n)], (l_p^{M(n)})\big)$, $0 < p \leqslant \infty$, где все размерности $M(n)$ бесконечны, т. е. $l_p^{M(n)} \approx l_p$, за исключением, возможно, конечного числа индексов n, соответствующих конечным $M(n)$. В этом случае легко построить инъективное отображение произвольной дополняемой p-абсолютной базисной последовательности на некоторую подпоследовательность канонического базиса ортов всего пространства E в соответствии с леммой 2 путем использования оценок (размерностей $L(n)$) леммы 5 теоремы 2. При этом конечные наборы элементов базисов можно сопоставлять произвольно, так как в конечномерных пространствах, очевидно, все базисы квазиэквивалентны. Рассматриваемые пространства Кёте можно назвать густыми или насыщенными банаховыми пространствами и в них сформулированная выше проблема имеет положительное решение. В частности, когда два густых пространства изоморфны, то их канонические базисы квазиэквивалентны, поскольку конструкция известной теоремы Кантора — Бернштейна позволяет построить по двум инъективным отображениям базисов ортов биективное отображение с оценками норм элементов, требуемыми для квазиэквивалентности.

Приведем описание еще одного класса блочных пространств Кёте, в которых сформулированная выше проблема решается положительно средствами, использованными в доказательстве теоремы 2.

Определение 5 (см. [1, 13]). Определяющую матрицу $[a_r(n)]$ пространства Кёте $E = l_p[a_r(n)]$ назовем *неоднородной* (*разреженной*), если в каноническом базисе единичных ортов нельзя выделить двух бесконечных непересекающихся квазиэквивалентных друг другу подпоследовательностей.

Общее условие неоднородности матрицы Кёте имеет вид (см., например, [1, 9])

$$\forall\,(n(k))_{k=1}^{\infty}\cap(m(k))_{k=1}^{\infty}=\varnothing\ \ \exists\,r(1)\ \ \forall\,r(2)\ \ \exists\,r(3)\ \ \forall\,r(4)$$

$$\sup_k\left\{\frac{a_{r(3)}(n(k))a_{r(1)}(m(k))}{a_{r(4)}(m(k))a_{r(2)}(n(k))},\ \frac{a_{r(3)}(m(k))a_{r(1)}(n(k))}{a_{r(4)}(n(k))a_{r(2)}(m(k))}\right\}=\infty.$$

В частном случае пространств степенных рядов $E=l_p[\exp\lambda_r b_n]$ ($\lambda_r\uparrow\lambda\leqslant\infty$) неоднородность матрицы Кёте равносильна выполнению условия

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}}=0.$$

Пространства лакунарных степенных рядов с отмеченным условием однородности были обнаружены автором при решении поставленной М. М. Драгилевым задачи описания группы общих автоморфизмов вложенных друг в друга пространств степенных рядов при более слабых ограничениях на лакуны. Описание непрерывных линейных отображений неоднородных лакунарных пространств степенных рядов было получено в [14] и из него, в частности, следовало, что в дополняемых подпространствах таких пространств есть абсолютные базисы.

Последний факт не был явно отмечен в [14] и спустя некоторое время Дубинский и Фогт в [15] ввели и исследовали так называемые «ручные» пространства степенных рядов. Они показали наличие абсолютного базиса в каждом дополняемом подпространстве «ручных» пространств степенных рядов. Эти пространства являются некоторым блочным расширением класса неоднородных пространств лакунарных пространств степенных рядов. Более общим образом можно рассматривать класс блочно-неоднородных пространств Фреше как класс пространств, изоморфных блочным пространствам Кёте $E=l_p\big([a_r(n)],(l_p^{M(n)})\big)$, $M(n)\leqslant\infty$, определяемым неоднородными матрицами Кёте $[a_r(n)]$.

Обобщения результатов [15] на случай блочно-неоднородных пространств Кёте имеются в [16], а здесь остановимся на характеризации дополняемых p–абсолютных базисных последовательностей в блочных пространствах Кёте $E=l_p\big([a_r(n)],\ (l_p^{M(n)})\big)$, определяемых неоднородными матрицами $[a_r(n)]$.

Пусть $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ — дополняемая p-абсолютная базисная последовательность в блочном пространстве Кёте $E=l_p\big([a_r(n)],(l_p^{M(n)})\big)$, где размерности $M(n)$ — произвольны, матрица $[a_r(n)]$ — неоднородна и $p\geqslant 1$ (p-абсолютность $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ с тем же значением p). Согласно лемме 2 и оценкам леммы 5, все условия для построения инъективного отображения последовательности $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ на подпоследовательность базиса ортов пространства E имеются. С некоторого номера $m(0)$ для каждого конечного набора различных индексов $m_1,m_2,\ldots,m_k$ последовательности $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ набор подходящих индексов $i(m_j)$, $j=1,2,\ldots,k$, с оценками леммы 2 содержит более k представителей, так как предположение о противном дает последовательность пар индексов таких, что каждая пара $m_{j_1}^{(n)}\neq m_{j_2}^{(n)}$ соответствует одному индексу $i(m_{j_1}^{(n)})$, а это невозможно ввиду однородности матрицы $[a_r(n)]$.

Перечислим теперь наиболее важные, на наш взгляд, случаи, в которых сформулированная в начале этого пункта проблема имеет положительное решение.

Предположение о положительном решении этой проблемы в ядерных пространствах Кёте — Фреше называют *гипотезой Бессаги* (после появления работы [11]). Так как не построены контрпримеры, естественно рассматривать обобщенную версию этой гипотезы о том, что каждая дополняемая p-абсолютная базисная последовательность в блочном пространстве Кёте $E = l_p\big([a_r(n)], (l_p^{M(n)})\big)$, $M(n) \leqslant \infty$ с тем же значением $p \geqslant 1$, квазиэквивалентна некоторой подпоследовательности канонического базиса ортов. Другими словами, каждое дополняемое подпространство с p-абсолютным базисом в указанном пространстве Кёте изоморфно некоторому координатному подпространству (порождаемому частью базиса ортов). Эта версия доказана для следующих классов пространств:

1. блочные пространства Кёте вида $E = l_p\big([a_r(n)], (l_p^{M(n)})\big)$, $p \geqslant 1$, $M(n) = \infty$, $n > n_0$;

2. блочно-неоднородные пространства Кёте (показано выше и см. [1]);

3. пространства Кёте $E = l_p[a_r(n)]$, $p \geqslant 1$, определяемые правильными матрицами $[a_r(n)]$ и изоморфные своему декартову квадрату, т. е. $E \cong E \times E$ (см., например, [7–8]);

4. блочные пространства Кёте, определяемые правильными матрицами $[a_r(n)]$, удовлетворяющие одному из следующих условий, введенных в [8]:

$$a)\ (\exists\, r)\ (\forall\, s)\ (\exists\, t) \quad \sup_n \frac{a_s^2(n)}{a_r(n)a_t(n)} < +\infty,$$

$$b)(\forall\, r)\ (\exists\, s)\ (\forall\, t) \quad \sup_n \frac{a_r(n)a_t(n)}{a_s^2(n)} < +\infty$$

(эти случаи рассматривались в [7]).

Пространства класса 4 включают все блочные пространства, определяемые функциями Драгилева. Так называют блочные пространства вида $E = l_p\big([\exp f(\lambda_r b_n)], l_1^{M(n)}\big)$, где $M(n)$ — произвольны, $\lambda_r \uparrow \lambda \leqslant \infty$, а f — нечетная, возрастающая, логарифмически выпуклая функция [8]. Можно рассматривать отдельные декартовы произведения пространств указанных классов и убедиться в справедливости обобщенной версии гипотезы Бессаги. Вопрос о характеризации дополняемых p-абсолютных базисных последовательностей в декартовых произведениях пространств Кёте из разных классов Драгилева, например, вида

$$E = l_1\left(\left[\exp f_1\left(\left(1 - \frac{1}{r}\right) b_n\right)\right], \left(l_1^{M(n)}\right)\right) \times l_1\left(\Big[\exp f_2(rb_n)\Big], \left(l_1^{L(n)}\right)\right),$$

где размерности блоков $M(n)$ и $L(n)$ произвольны, не является таким простым (см., например, [17, 18]).

Представляет интерес и решение проблемы для класса пространств Кёте $E = l_p[a_r(n)]$, определяемых правильными матрицами Кёте $[a_r(n)]$ (без ограничения изоморфизма E своему декартову квадрату) и, более общим образом, для класса блочных пространств Кёте, определяемых правильными матрицами.

Напомним (см., например, [1]), что положительное решение обсуждаемой проблемы влечет квазиэквивалентность p-абсолютных базисов в перечисленных классах и изоморфизм двух пространств одного класса влечет наличие простейшего (квазидиагонального) изоморфизма. Добавим, что в пространствах Кёте, определяемых правильными матрицами, доказано, что все p-абсолютные базисы квазиэквивалентны и изоморфизм таких пространств влечет квазиэквивалентность базисов ортов. Однако проблема описания дополняемых p-абсолютных базисных последовательностей пока остается открытой.

Вопросы изоморфной классификации декартовых произведений пространств Кёте из отдельных указанных классов рассматривались в [7, 17] и др.

В заключение можно выразить надежду, что проведенные в работах [19–21] исследования дополняемых безусловных базисных последовательностей позволяют описать свойства аналогичных последовательностей в F-пространствах типа Кёте и Лоренца при $p < 1$.

Литература

1. *Кондаков В. П.* Об изоморфной классификации и свойствах базисов пространств Кёте // Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2004.—С. 218–240.
2. *Rolewicz S.* Metric linear spaces.—Warszawa etc.: D. Reidel Publishing Company, 1984.—459 p.
3. *Köthe G.* Die Stufenränme, eine einfache Klasse linear vollkommener Räume // Math. Zeitschr.—1948.—Vol. 51.—P. 317–345.
4. *Köthe G., Toeplitz O.* Lineare Räume mit unendlichvielen koordinaten und ringe unendlichen matrizen // J. Reine Angew. Math.—1934.—Vol. 171.—P. 193–226.
5. *Митягин Б. С.* Геометрия линейных пространств и линейных операторов // Теория операторов в функциональных пространствах.—Новосибирск: Наука, 1977.—С. 212–239.
6. *Митягин Б. С.* Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Studia Math.—1971.—Т. 37, № 2.—С. 111–137.
7. *Кондаков В. П.* Вопросы геометрии ненормируемых пространств.—Ростов-на-Дону: ИРУ, 1983.—72 с.
8. *Драгилев М. М.* О правильных базисах в ядерных пространствах // Матем. сб.—1965.—Т. 68, № 2.—С. 153–173.
9. *Кондаков В. П.* О квазиэквивалентности правильных базисов в пространствах Кёте // Математический анализ и его приложения.—Ростов-на-Дону: ИРУ, 1974.—Т. 5.—С. 210–213.
10. *Драгилев М. М.* О бинарных отношениях между пространствами Кёте // Математический анализ и его приложения.—Ростов-на-Дону: ИРУ, 1974.—Т. 6.—С. 112–135.
11. *Bessaga C.* Some remarks on Dragilev‘s theorem // Studia Math.—1968.—Vol. 31.—P. 307–318.
12. *Кондаков В. П.* О строении безусловных базисов некоторых пространств Кёте // Studia Math.—1983.—Vol. 76, № 2.—P. 137–151.
13. *Кондаков В. П.* О проблеме изоморфной классификации пространств Кёте и эквивалентности базисов // Тезисы докл. Междун. шк.-сем. по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова.—Ростов-на-Дону, 2000.—С. 119–120.
14. *Драгилев М. М., Кондаков В. П.* Об одном классе ядерных пространств // Мат. заметки.—1970.–Т. 8, вып. 2.—С. 169–177.
15. *Dubinsky E., Vogt D.* Complemented subspaces in tame of power series spaces // Studia Math.—1989.—Vol. 93, № 1.—P. 71–85.
16. *Кондаков В. П.* О блочных пространствах Кёте, в которых образ каждого непрерывного оператора имеет базис // Функцион. анализ и его прил.—1993.—Т. 4.—С. 74–77.
17. *Chalov P. A., Djakov P. B., Zahariuta V. P.* Compound invariants and embeddings of cartesian products // Studia Math.—1999.—Vol. 137.—P. 33–47.
18. *Кондаков В. П., Ефимов А. И.* О классах пространств Кёте, в которых каждое дополняемое подпространство имеет базис // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 2.—С. 21–29.
19. *Kalton N. J.* Orlicz sequence spaces without local convexity // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1977.—Vol. 81, Issu 2.—P. 253–277.
20. *Kalton N. J., Leranoz C., Wojtaszczyk P.* Uniqueness of unconditional bases in quasi-Banach spaces with applications to Hardy spaces // Israel J. Math.—1990.—Vol. 72, № 3.—P. 299–311.
21. *Albiac F., Leranoz C.* Uniqueness of unconditional basis in Lorentz sequence spaces // Proc. Amer. Math. Soc.—2008.—Vol. 136, № 5.—P. 1643–1647.

Статья поступила 29 января 2009 г.

Кондаков Владимир Петрович
Южный федеральный университет,
зав. каф. теории функций и функцион. анализа
Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
зав. лабораторией вещественного анализа
E-mail: kond@sfedu.ru