Vladikavkaz Mathematical Journal
2009, Vol. 11, No 2, pp. 6–18

УДК **517.988, 517.982**

СЛАБАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПЕРАТОРА СУПЕРПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Посвящается 60-летию со дня рождения профессора Safak Alpay

Е. А. Алехно

Изучаются условия слабой непрерывности оператора суперпозиции, действующего в некотором пространстве последовательностей. Даны условия, при которых слабая непрерывность оператора суперпозиции равносильна его аффинности. В то же самое время, в пространстве сходящихся к нулю последовательностей любая ограниченная непрерывная функция порождает слабо непрерывный оператор суперпозиции. Приведены примеры, показывающие существенность предположения об ограниченности. Показывается, что в произвольном бесконечномерном пространстве последовательностей всегда существует оператор суперпозиции, являющийся слабо непрерывным и не представимый в виде суммы аффинного оператора и оператора обладающего конечномерной областью значений.

Ключевые слова: оператор суперпозиции, пространство последовательностей, слабая топология.

При исследовании разрешимости операторных уравнений в банаховых пространствах важную роль играет принцип неподвижной точки Шаудера — Тихонова. Он утверждает, что в локально-выпуклом пространстве непрерывное отображение выпуклого компакта в себя обладает неподвижной точкой. Кроме метрической топологии на банаховом пространстве могут быть определены другие локально-выпуклые топологии, важнейшей из которых является слабая топология. Более того, ослабление топологии приводит к увеличению числа компактных множеств, и, следовательно, расширяются возможности применимости самого принципа Шаудера — Тихонова.

Таким образом, возникает необходимость изучения условий, как необходимых, так и достаточных, слабой непрерывности заданного отображения, действующего в некотором банаховом пространстве Z. Поскольку для линейного оператора ответ хорошо известен, а именно, линейный оператор T, действующий в банаховом пространстве Z, является слабо непрерывным в том и только том случае, когда T является непрерывным в метрической топологии, интерес представляет лишь изучение нелинейных операторов.

Один из важнейших классов нелинейных операторов — это класс операторов суперпозиции. Изучению условий слабой непрерывности оператора суперпозиции в пространствах последовательностей и посвящена настоящая работа. Так, в первой части даны необходимые в дальнейшем определения и результаты, относящиеся к теории оператора суперпозиции или к пространствам последовательностей. Вторая и третья части посвящены, соответственно, необходимым и достаточным условиям слабой непрерывности оператора суперпозиции.

Используемые ниже определения, обозначения и факты, относящиеся к идеальным пространствам, в частности к пространствам последовательностей, взяты из [4] (см. также [5]), а к оператору суперпозиции из [7].

Некоторые определения, обозначения и вспомогательные результаты

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с σ-конечной, неотрицательной мерой μ. Напомним, что измеримое множество A, $\mu(A) > 0$, называется *атомом* [3, с. 82], если для любого измеримого множества B, $B \subseteq A$, либо $\mu(B) = 0$, либо $\mu(B) = \mu(A)$. Множество Ω может быть разбито [3, с. 83–84; 7, с. 8] на два непересекающихся измеримых множества Ω_c и Ω_d, причем на Ω_c мера μ непрерывная, т. е. всякое измеримое множество $B \subseteq \Omega_c$ может быть представлено в виде $B = B_1 \sqcup B_2$, $\mu(B_1) = \mu(B_2) = \frac{1}{2}\mu(B)$, а на Ω_d мера μ дискретная, т. е. Ω_d представимо в виде объединения не более, чем счетного числа атомов.

Через $L_0(\Omega, \mu)$ обозначается пространство, состоящее из эквивалентных классов μ-измеримых на Ω функций. Линейное подпространство X пространства $L_0(\Omega, \mu)$ называется *идеальным* [4], если X является банаховым пространством и соотношения $|y| \leqslant |x|$, $x \in X$, $y \in L_0(\Omega, \mu)$ влекут $y \in X$ (т. е. X — порядковый идеал в $L_0(\Omega, \mu)$) и $\|y\| \leqslant \|x\|$. Всякое идеальное пространство является банаховой решеткой. Для произвольного измеримого множества A, через P_A обозначается порядковый проектор, определенный по правилу $P_A x = \chi_A x$, $x \in L_0(\Omega, \mu)$. В зависимости от необходимости P_A может рассматриваться действующим, как в X, так и в $L_0(\Omega, \mu)$.

Пусть функция f действует из $\Omega \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Говорят, что f определяет *оператор суперпозиции* $\mathbf{f}$ [7, с. 10], действующий в идеальном пространстве X, если оператор $(\mathbf{f}x)(s) = f(s, x(s))$ отображает X в X. При этом, всякая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ может рассматриваться, как функция из $\Omega \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, а значит и определять оператор суперпозиции $\mathbf{f}$ по правилу $(\mathbf{f}x)(s) = f(x(s))$. В общем случае, оператор $\mathbf{f}$ может даже не действовать в $L_0(\Omega, \mu)$, т. е. отображать измеримые функции в измеримые. Говорят, что функция f удовлетворяет *условию Каратеодори* [7, с. 16], если для почти всех s функция $f(s, \cdot)$ непрерывная и для всех u функция $f(\cdot, u)$ измеримая. Если f удовлетворяет условию Каратеодори, то оператор $\mathbf{f}$ действует в $L_0(\Omega, \mu)$.

В дальнейшем, под *непрерывным отображением* одного топологического пространства в другое понимается отображение, при котором прообраз каждого открытого множества открыт; это также равносильно тому, что каждая сходящаяся обобщенная последовательность отображается в сходящуюся. Если отображение переводит каждую сходящуюся последовательность в сходящуюся последовательность, то оно называется *секвенциально непрерывным*. Очевидно, всякое непрерывное отображение является секвенциально непрерывным.

Напомним, что для банахова пространства Z *слабая топология* $\sigma(Z, Z^*)$ на Z — это локально-выпуклая топология, порожденная следующим базисом окрестностей

$$\mathscr{O}(x; z_1^*, \ldots, z_k^*, \epsilon) = \{z : |z_i^* z - z_i^* x| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, k\},$$

где элемент $x \in Z$, функционалы $z_i^* \in Z^*$, число $\epsilon > 0$. Слабая непрерывность оператора $T : Z \to Z$ означает непрерывность T, как отображения пространства Z со слабой топологией в себя.

Пусть X — идеальное пространство, оператор суперпозиции $\mathbf{f}$ действует в X. Обозначим через C_X *носитель* X [5, с. 59], т. е. наименьшее по включению (с точностью до множества нулевой меры) измеримое множество вне которого почти всюду равна нулю любая функция $x \in X$. Тогда $P_{\Omega \setminus C_X}(\mathbf{f}x) = 0$ для всех $x \in X$. Если теперь рассмотреть пространство X, как идеальное пространство на C_X (будем обозначать его через X_0), а через f_X обозначить сужение f на $C_X \times \mathbb{R}$, то оператор суперпозиции $\mathbf{f_X}$, определенный по f_X, будет действовать в X_0 и являться слабо непрерывным тогда и только тогда, когда слабо непрерывным является $\mathbf{f}$. Следовательно, в дальнейшем считаем $C_X = \Omega$.

Это равносильно [5, с. 195] существованию в X функции положительной почти всюду на Ω; такие функции называются *слабыми единицами*. При этом, если A — атом меры μ, то $\chi_A \in X$.

Функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представимая в виде $g(u) = a+bu$, где a и b — некоторые действительные числа, называется *аффинной*. Аналогично, оператор T, действующий в идеальном пространстве X, называется *аффинным*, если для любого элемента $x \in X$ справедливо равенство $Tx = a + bx$ в X, где функции $a, b : \Omega \to \mathbb{R}$. Ясно, что аффинный оператор T является оператором суперпозиции, определяемый функцией $f(s, u) = a_0(s) + b_0(s)u$, где a_0 и b_0 — произвольные представители класса эквивалентности a и b, соответственно. Пусть теперь некоторый оператор суперпозиции $\mathbf{f} : X \to X$ является аффинным, т. е. $\mathbf{f}x = a+bx$. Взяв $x = 0$ получаем $a = \mathbf{f}0 = f(s, 0)$. Поскольку $C_X = \Omega$, существует [5, с. 58, 60] последовательность измеримых множеств A_i таких, что $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ и $\chi_{A_i} \in X$ для всех i. Тогда для почти всех $s \in A_i$ имеем $f(s, 1) = (\mathbf{f}\chi_{A_i})(s) = f(s, 0) + b(s)$, откуда $b(s) = f(s, 1) - f(s, 0)$ для почти всех $s \in \Omega$. Кроме того, функции a и b измеримы. Далее, если f удовлетворяет условию Каратеодори, то оператор суперпозиции $\mathbf{f} : X \to X$ аффинный в том и только том случае, когда для почти всех s функция $f(s, \cdot)$ аффинная. В пояснении нуждается лишь необходимость, и именно она использует условие Каратеодори. Пусть $\mathbf{f}x = a + bx$. Если A — измеримое множество, $\chi_A \in X$, то для рационального числа u и для почти всех $s \in A$ имеем $f(s, u) = \mathbf{f}(u\chi_A)(s) = a(s) + b(s)u$. Следовательно, равенство $f(s, u) = a(s) + b(s)u$ справедливо для почти всех $s \in A$ и $u \in \mathbb{R}$. Как и выше, используя соотношение $C_X = \Omega$, получаем требуемое.

Как показано в [1] слабая непрерывность оператора суперпозиции $\mathbf{f}$, действующего в идеальном пространстве X с непрерывной мерой и определяемого функцией f, удовлетворяющей условию Каратеодори, равносильна его аффинности.

С другой стороны, оператор суперпозиции $\mathbf{f}$, действующий в пространстве L_∞ с произвольной мерой и задаваемый функцией f, удовлетворяющей условию Каратеодори, является [2] слабо секвенциально непрерывным в том и только том случае, когда f задает непрерывную по u кривую в L_∞, т. е. когда из сходимости $u_n \to u_0$ следует сходимость $f(\cdot, u_n) \to f(\cdot, u_0)$ в L_∞. Значит, всякая непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяет слабо секвенциально непрерывный оператор суперпозиции $\mathbf{f}$ в L_∞; в частности, слабо секвенциально непрерывными в L_∞ являются операторы $\mathbf{f}x = |x|$ и $\mathbf{f}x = x^2$. Впрочем, слабая секвенциальная непрерывность первого из них может быть получена и как следствие слабой секвенциальной непрерывности решеточных операций в AM-пространстве [8, с. 106]. Из приведенных примеров видна разница между слабой непрерывностью и слабой секвенциальной непрерывностью. Еще раз подчеркнем, что ниже будет изучаться слабая непрерывность, и именно она, а не слабая секвенциальная непрерывность требуется в различных теоремах, связанных с неподвижными точками, в частности, в теореме Шаудера — Тихонова.

Ясно, что оператор суперпозиции $\mathbf{f}$, действующий в некотором идеальном пространстве X, является слабо непрерывным тогда и только тогда, когда слабо непрерывным будет оператор $\mathbf{g}x = \mathbf{f}x - \mathbf{f}0$. Оператор $\mathbf{g}$ также представляет собой оператор суперпозиции, определяемый функцией $g(s, u) = f(s, u) - f(s, 0)$, причем $g(s, 0) = 0$, а значит $\mathbf{g}0 = 0$. В связи с этим, в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем предполагать $\mathbf{f}0 = 0$. Тогда, очевидно, выполняется следующее свойство дизъюнктной аддитивности: если $x \perp y$ в X, то $\mathbf{f}(x+y) = \mathbf{f}x+\mathbf{f}y$. При этом $\mathbf{f}x \perp \mathbf{f}y$. На самом деле, $\operatorname{supp} \mathbf{f}x \subseteq \operatorname{supp} x$, а значит компонента $B_{\mathbf{f}x}$, порожденная $\mathbf{f}x$ в X, содержится в компоненте B_x, порожденной x в X. Если A — атом меры μ, то $B_{\chi_A} = \{\lambda\chi_A : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Тогда для $u \in \mathbb{R}$ имеем

$\mathbf{f}(u\chi_A) = \lambda_{A,u}\chi_A$, где $\lambda_{A,u} \in \mathbb{R}$. Определим функцию $f_A(u) = \lambda_{A,u}$. Для почти всех $s \in A$ справедливо равенство $f(s,u) = f_A(u)$.

Если Ω состоит из конечного числа различных атомов A_i, $i = \overline{1,k}$, то, очевидно, всякое идеальное пространство X на Ω является конечномерным. Следовательно, слабая непрерывность в X равносильна непрерывности в метрической топологии. Пусть оператор суперпозиции $\mathbf{f}$ действует в X. Тогда, если $x = \sum_{i=1}^{k} a_i\chi_{A_i}$, то

$$\mathbf{f}x = \mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\chi_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{k}\mathbf{f}(a_i\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{k} f_{A_i}(a_i)\chi_{A_i}.$$

Отсюда легко видеть, что, в данном случае, оператор суперпозиции $\mathbf{f}$ является слабо непрерывным в том и только том случае, когда непрерывны функции f_{A_i}. В частности, это верно, когда функция f удовлетворяет условию Каратеодори; но не наоборот. В связи с этим, в дальнейшем мы будем рассматривать лишь бесконечномерные идеальные пространства на множестве с дискретной мерой, т. е. случай, когда Ω состоит из счетного числа атомов.

Всякое идеальное пространство X на множестве с дискретной мерой линейно изометрично и порядково изоморфно идеальному пространству X_∞ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ со «считающей» мерой. Действительно, если $\Omega = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i — атомы, то определим

$$X_\infty = \left\{x = (x_1, x_2, \dots) : \text{ряд } \sum_{i=1}^{\infty} x_i\chi_{A_i} \text{ сходится в } X \text{ по порядку}\right\}$$

и положим $\|x\|_{X_\infty} = \|o\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} x_i\chi_{A_i}\|_X$, где символ o означает порядковую сходимость ряда или последовательности. Теперь требуемый изоморфизм $\Phi : X_\infty \to X$ определяется, как $\Phi(x_1, x_2, \dots) = o\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} x_i\chi_{A_i}$.

Пусть $\mathbf{f}$ — оператор суперпозиции, действующий в X. Тогда, если $x = o\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} x_i\chi_{A_i}$, то $\mathbf{f}x = o\text{-}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{f}(x_i\chi_{A_i})$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{f}(o\text{-}\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i\chi_{A_i})\right| &= \left|\mathbf{f}(o\text{-}\sum_{i=n+2}^{\infty} x_i\chi_{A_i}) + \mathbf{f}(x_{n+1}\chi_{A_{n+1}})\right| \\ &= \left|\mathbf{f}(o\text{-}\sum_{i=n+2}^{\infty} x_i\chi_{A_i})\right| + \left|\mathbf{f}(x_{n+1}\chi_{A_{n+1}})\right| \geqslant \left|\mathbf{f}(o\text{-}\sum_{i=n+2}^{\infty} x_i\chi_{A_i})\right|.\end{aligned}$$

Следовательно, последовательность $\left|\mathbf{f}(o\text{-}\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i\chi_{A_i})\right|$ убывает по n. Отсюда, учитывая соотношение $x_{A_j} \perp \mathbf{f}(o\text{-}\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i\chi_{A_i})$ при $j = \overline{1,n}$, имеем $|\mathbf{f}(o\text{-}\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i\chi_{A_i})| \downarrow 0$. Последнее соотношение вместе с равенством $\mathbf{f}x - \mathbf{f}(\sum_{i=1}^{n} x_i\chi_{A_i}) = \mathbf{f}(o\text{-}\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i\chi_{A_i})$ дают $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}(x_i\chi_{A_i}) = \mathbf{f}(\sum_{i=1}^{n} x_i\chi_{A_i}) \xrightarrow{o} \mathbf{f}x$.

Определим оператор $\mathbf{f}_\infty$, действующий в X_∞, по правилу $\mathbf{f}_\infty = \Phi^{-1}\mathbf{f}\Phi$. Для элемента $x_\infty = (x_1, x_2, \dots) \in X_\infty$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_\infty x_\infty = \Phi^{-1}\mathbf{f}\left(o\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} x_i\chi_{A_i}\right) &= \Phi^{-1}\left(o\text{-}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{f}(x_i\chi_{A_i})\right) \\ &= \Phi^{-1}\left(o\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} f_{A_i}(x_i)\chi_{A_i}\right) = (f_{A_1}(x_1), f_{A_2}(x_2), \dots),\end{aligned}$$

следовательно $(\mathbf{f}_\infty x_\infty)_i = f_{A_i}(x_i)$, а значит оператор $\mathbf{f}_\infty$ является оператором суперпозиции, определяемый функцией $f_\infty(n,u) = f_{A_n}(u)$. Очевидно, $\mathbf{f}_\infty$ является слабо непрерывным в том и только том случае, когда слабо непрерывным является $\mathbf{f}$. Таким образом, в дальнейшем, без ограничения общности, мы будем предполагать все рассматриваемые идеальные пространства определенными на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ со «считающей» мерой. Ниже такие пространства будут просто называться *пространствами последовательностей.*

Пусть X — пространство последовательностей. *Двойственное* к X пространство X' [4] определяется как

$$X' = \left\{ z = (z_1, z_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i z_i < \infty \text{ для всех } x = (x_1, x_2, \dots) \in X \right\}.$$

Каждой последовательности $z \in X'$ можно поставить в соответствие функционал $z^* \in X^*$ по правилу $z^* x = \sum_{i=1}^{\infty} z_i x_i$, при этом, в силу теоремы Лозановского [5, с. 198], z^* будет принадлежать компоненте порядково непрерывных функционалов на X, т. е. $z^* \in X_n^\sim$. Наоборот, всякий функционал $z^* \in X_n^\sim$ может быть представлен в таком виде, где $z \in X'$. С нормой $\|z\|_{X'} := \|z^*\|_{X^*}$ пространство X' будет являться пространством последовательностей. Таким образом, X' может быть отождествлено с $X_n^\sim$. Тогда пространство X^*, сопряженное к пространству X, является банаховой решеткой, представимой в виде суммы двух дизъюнктных компонент $X^* = X' \oplus X^s$, где X^s — пространство *антинормальных* функционалов [4]

$$X^s = \{x^* \in X^* : |x^*|x = 0 \text{ для некоторой слабой единицы } x \in X\}.$$

Например,

$$(\ell_\infty)' = \ell_1, \quad \ell_\infty^s = \{x^* \in \ell_\infty^* : x^*(c_0) = \{0\}\}.$$

Для пространств c_0, ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, двойственное совпадает с сопряженным.

Обозначим через e_n последовательность, в которой элемент с n-ым номером равен единице, а все остальные нулю. *Правильной частью* X° [4] пространства X называется замыкание в X линейной оболочки элементов e_n. Справедливо равенство

$$X^\circ = \{x \in X : x^* x = 0 \text{ для всех } x^* \in X^s\}.$$

Иными словами, X° — это аннулятор X^s.

Функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Каратеодори в том и только том случае, когда для всех n функция $f(n,\cdot)$ непрерывная. Аффинность оператора суперпозиции $\mathbf{f}$, действующего в пространстве последовательностей X, будет равносильна аффинности функции $f(n,\cdot)$ для всех n. Пусть оператор суперпозиции $\mathbf{f} : X \to X$ является слабо непрерывным, $\mathbf{f}0 = 0$. Фиксируем n. Если последовательность действительных чисел $u_k \to u$, то $u_k e_n \to u e_n$ в X, а значит

$$f(n,u_k)e_n = \mathbf{f}(u_k e_n) \xrightarrow{\sigma(X,X^*)} \mathbf{f}(u e_n) = f(n,u)e_n,$$

откуда $\lim\limits_{k\to\infty} f(n,u_k) = f(n,u)$. Следовательно, функция $f(n,\cdot)$ непрерывная, а значит f удовлетворяет условию Каратеодори. Таким образом, условие Каратеодори оказывается необходимым для слабой секвенциальной непрерывности, а значит и для слабой непрерывности $\mathbf{f}$. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы считаем функцию f, определяющую рассматриваемый оператор суперпозиции $\mathbf{f}$, удовлетворяющей условию Каратеодори.

В [6] изучалась слабая непрерывность оператора суперпозиции $\mathbf{f}$ в пространстве ℓ_∞. Так, там было показано, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то слабая непрерывность $\mathbf{f}$ в ℓ_∞ равносильна аффинности f. Найден класс слабо непрерывных в ℓ_∞ операторов суперпозиции «значительно» более широкий, чем класс аффинных операторов.

Ниже будет найден целый класс пространств последовательностей (теорема 1), в которых слабая непрерывность оператора суперпозиции $\mathbf{f}$, определяемого функцией $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, равносильна аффинности f. Не все пространства последовательностей удовлетворяют этому свойству, например, это не верно для c_0 (см. теорему 6 и следствие 7). Тем не менее, ниже будет показано, что в произвольном пространстве последовательностей X всегда можно построить слабо непрерывный оператор суперпозиции $\mathbf{f}$ не являющийся аффинным (см. следствие 10).

Необходимые условия слабой непрерывности

Следующая теорема выделяет класс пространств, в которых слабая непрерывность оператора суперпозиции $\mathbf{f}$, определяемого функцией $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, равносильна аффинности f.

Теорема 1. *Пусть для пространства последовательностей X выполняются условия $X' \nsubseteq c_0$ и $X' \subseteq \ell_\infty$ (оба в теоретико-множественном смысле). Тогда оператор суперпозиции $\mathbf{f}$, определяемый функцией $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, слабо непрерывный в X в том и только том случае, когда f аффинная.*

$\lhd$ В доказательстве нуждается лишь необходимость. Считаем $f(0) = 0$, а значит $\mathbf{f}0 = 0$. Фиксируем ненулевые $a, b \in \mathbb{R}$ и $\epsilon > 0$. В пространстве X' найдется неотрицательная последовательность $x^* = (x_1, x_2, \ldots) \notin c_0$. Можно считать, что для некоторой подпоследовательности x_{n_k} будет

$$x_{n_k} = 1 \tag{$*$}$$

при всех k. В силу слабой непрерывности $\mathbf{f}$ в нуле, найдется $\sigma(X, X^*)$-окрестность $\mathscr{O}(0; x_1^*, \ldots, x_m^*, \delta)$, для которой

$$\mathbf{f}(\mathscr{O}(0; x_1^*, \ldots, x_m^*, \delta)) \subseteq \mathscr{O}(0; x^*, \epsilon). \tag{$**$}$$

Раскладывая каждый функционал x_i^* на сумму $x_i^* = x_{i1}^* + x_{i2}^*$, где $x_{i1}^* \in X'$, $x_{i2}^* \in X^s$, и учитывая включение

$$\mathscr{O}(0; x_{11}^*, \ldots, x_{m1}^*, x_{12}^*, \ldots, x_{m2}^*, \delta/2) \subseteq \mathscr{O}(0; x_1^*, \ldots, x_m^*, \delta),$$

можно считать $x_1^*, \ldots, x_{m_0}^* \in X'$ и $x_{m_0+1}^*, \ldots, x_m^* \in X^s$ для некоторого m_0. Воспользовавшись включением $X' \subseteq \ell_\infty$ и при необходимости перейдя к подпоследовательности будем также предполагать существование пределов $\lim\limits_{k\to\infty} (x_i^*)_{n_k}$, $i = \overline{1, m_0}$. Найдем индекс k_0, для которого

$$|(x_i^*)_{n_{k_0}} - (x_i^*)_{n_{k_0+2}}| < \frac{\delta}{2|a|}, \quad |(x_i^*)_{n_{k_0+1}} - (x_i^*)_{n_{k_0+2}}| < \frac{\delta}{2|b|},$$

при $i = \overline{1, m_0}$. Тогда последовательность

$$ae_{n_{k_0}} + be_{n_{k_0+1}} - (a+b)e_{n_{k_0+2}} \in \mathscr{O}(0; x_1^*, \ldots, x_m^*, \delta),$$

следовательно, учитывая $(*)$ и $(**)$,

$$\begin{gathered}\epsilon > |x^*\mathbf{f}(ae_{n_{k_0}} + be_{n_{k_0+1}} - (a+b)e_{n_{k_0+2}})| \\ = |x^*\mathbf{f}(ae_{n_{k_0}}) + x^*\mathbf{f}(be_{n_{k_0+1}}) + x^*\mathbf{f}(-(a+b)e_{n_{k_0+2}})| = |f(a) + f(b) + f(-(a+b))|.\end{gathered}$$

В силу произвольности ϵ получаем $f(a) + f(b) + f(-(a + b)) = 0$. Устремив b к нулю имеем $f(-a) = -f(a)$, а значит $f(a) + f(b) = f(a + b)$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f(na) = nf(a)$ для $n \in \mathbb{N}$, откуда

$$f\left(\frac{n'}{n''}a\right) = n'f\left(\frac{1}{n''}a\right) = \frac{n'}{n''}n''f\left(\frac{1}{n''}a\right) = \frac{n'}{n''}f(a)$$

при n', $n'' \in \mathbb{N}$. Таким образом, для произвольного рационального q и действительного a будет $f(qa) = qf(a)$. В силу непрерывности f, последнее равенство справедливо для всех $q \in \mathbb{R}$. В итоге, $f(u) = uf(1)$. Мы получили линейность f.

В общем случае, когда $f(0) \neq 0$, рассмотрим функцию $g(u) = f(u) - f(0)$. Она порождает оператор суперпозиции $\mathbf{g}$, действующий в X и являющийся слабо непрерывным. Поскольку $g(0) = 0$, по доказанному выше имеем $g(u) = ug(1)$, откуда $f(u) = f(0) + (f(1) - f(0))u$. Таким образом, f — аффинная функция. $\triangleright$

Следствие 2. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяет оператор суперпозиции $\mathbf{f}$, действующий в пространстве ℓ_1. Тогда $\mathbf{f}$ слабо непрерывный тогда и только тогда, когда f аффинная.*

Условия на функцию $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ гарантирующие, что оператор $\mathbf{f}$ действует в ℓ_1, имеются в [7, с. 94–95].

Решеточные операции $|x|$, x^+, x^-, определенные на произвольном идеальном пространстве X, представляют собой важнейшие примеры оператора суперпозиции. Слабая непрерывность одной из этих операций равносильна слабой непрерывности любой из двух оставшихся. Это сразу следует из равенств $x = x^+ - x^-$, $x^+ = \frac{|x|+x}{2}$, $x^- = \frac{|x|-x}{2}$. Тем не менее, их слабая непрерывность эквивалентна конечномерности данного пространства. Справедливость данного утверждения отмечалась в [8, упр. II.28(c), с. 152]. Для полноты мы приведем схему доказательства.

Лемма 3. *Пусть E — нормированное пространство Рисса. Тогда решеточные операции слабо непрерывны в нуле в том и только том случае, когда пространство E является конечномерным.*

$\triangleleft$ В доказательстве нуждается лишь необходимость. Фиксируем ненулевой функционал $x^* \in (E^*)^+$. Нулевая точка является $\sigma(E, E^*)$-внутренней точкой поляры

$$[-x^*, x^*]^\circ = \{x : |z^*x| \leqslant 1 \text{ при } |z^*| \leqslant x^*\}$$

относительно дуальной пары $\langle E, E^*\rangle$. В самом деле, если $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(E,E^*)} 0$, то $|x_\alpha| \xrightarrow{\sigma(E,E^*)} 0$, а значит существует индекс α_0 такой, что для любого $z^* \in [-x^*, x^*]$ имеем $|z^*x_\alpha| \leqslant 1$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$, откуда $x_\alpha \in [-x^*, x^*]^\circ$. Для некоторых $x_1^*, \ldots, x_k^* \in E^*$ справедливо $U := \mathscr{O}(0; x_1^*, \ldots, x_k^*, 1) \subseteq [-x^*, x^*]^\circ$, следовательно

$$[-x^*, x^*] = [-x^*, x^*]^{\circ\circ} \subseteq U^\circ \subseteq \mathrm{Lin}\{x_1^*, \ldots, x_k^*\}.$$

Таким образом, в банаховой решетке E^* всякий порядковый интервал содержится в конечномерном пространстве, откуда $\dim E^* < \infty$. Значит, $\dim E < \infty$. $\triangleright$

Лемма 4. *Пусть функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда f определяет оператор суперпозиции $\mathbf{f}$, действующий в пространстве c_0, в том и только том случае, когда для любого $\epsilon > 0$ существуют число $\delta > 0$ и натуральное N такие, что для всех $n \geqslant N$, $|u| \leqslant \delta$ имеет место неравенство $|f(n, u)| \leqslant \epsilon$.*

В частности, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *определяет оператор суперпозиции* $\mathbf{f}$*, действующий в* c_0*, в том и только том случае, когда* $f(0) = 0$ *и* f *непрерывна в нуле.*

$\lhd$ Необходимость. Пусть оператор $\mathbf{f}$ действует в c_0. В предположении противного, найдем подпоследовательность натуральных чисел n_i и последовательность u_i, $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = 0$, для которых $|f(n_i, u_i)| > \epsilon > 0$. Последовательность $x = (x_1, x_2, \dots)$ определим, как $x_{n_i} = u_i$ и $x_j = 0$, если $j \notin \{n_1, n_2, \dots\}$. Тогда $x \in c_0$, а значит $\mathbf{f}x \in c_0$. С другой стороны, $|(\mathbf{f}x)_{n_i}| = |f(n_i, x_{n_i})| = |f(n_i, u_i)| > \epsilon$, мы пришли к противоречию.

Достаточность. Пусть элемент $x \in c_0$. Если $\mathbf{f}x \notin c_0$, то существует подпоследовательность натуральных чисел n_i, для которой $0 < \epsilon < |(\mathbf{f}x)_{n_i}| = |f(n_i, x_{n_i})|$, что невозможно при больших i, поскольку $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$.

В случае $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в пояснении нуждается лишь необходимость. Очевидно, $\mathbf{f}0 \in c_0$, а значит, поскольку $\mathbf{f}0 = (f(0), f(0), \dots)$, имеет место равенство $f(0) = 0$. Для $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при больших n справедливы соотношения $\epsilon \geqslant |f(n, u)| = |f(u)|$ для $|u| \leqslant \delta$. Иными словами, f непрерывна в нуле. $\rhd$

Лемма 5. *Пусть функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *выпуклая, положительный функционал* $z^* \in \ell_1$, $\|z^*\| = 1$. *Тогда для* $x \in c_0$ *имеет место неравенство* $f(z^*|x|) \leqslant z^*(\mathbf{f}|x|)$.

$\lhd$ Пусть $z^* = (z_1, z_2, \dots) \geqslant 0$. Прежде всего заметим, что в силу непрерывности выпуклой функции f, последовательность $\mathbf{f}|x|$ ограничена, а значит ряд $\sum_{i=1}^{\infty} z_i f(|x_i|) = z^*(\mathbf{f}|x|)$ сходится. В силу равенства $\sum_{i=1}^{\infty} z_i = 1$ найдется m_0, для которого $\sum_{i=1}^{m_0} z_i > 0$. Тогда для $m \geqslant m_0$ имеем

$$f\left(\left(\sum_{j=1}^{m} z_j\right)^{-1} \sum_{i=1}^{m} z_i|x_i|\right) = f\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{z_i}{\sum\limits_{j=1}^{m} z_j}|x_i|\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{z_i}{\sum\limits_{j=1}^{m} z_j} f(|x_i|) = \left(\sum_{j=1}^{m} z_j\right)^{-1} \sum_{i=1}^{m} z_i f(|x_i|).$$

Устремив m к бесконечности получаем

$$f(z^*|x|) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} z_i|x_i|\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} z_i f(|x_i|) = z^*(\mathbf{f}|x|). \quad \rhd$$

Напомним, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *функцией Орлича* [7, с. 119, 137], если f неотрицательная, выпуклая, четная и $f(0) = 0$.

Теорема 6. *Пусть функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *является функцией Орлича, причем* $f(u) > 0$ *при всех* $u \neq 0$. *Тогда оператор суперпозиции* $\mathbf{f}$*, действующий в* c_0*, не является слабо непрерывным в нуле.*

$\lhd$ В силу леммы 4 оператор $\mathbf{f}$ действует в c_0. Фиксируем положительный функционал $z^* = (z_1, z_2, \dots) \in c_0^* = \ell_1$, $\|z^*\| = 1$, и число $\epsilon > 0$. Найдется $\delta > 0$, для которого неравенство $f(a) < \delta$ влечет $|a| < \epsilon$. Предположим противное, т. е. что оператор $\mathbf{f}$ слабо непрерывен в нуле. Тогда для некоторой $\sigma(c_0, \ell_1)$-окрестности U нуля справедливо включение $\mathbf{f}(U) \subseteq \mathscr{O}(0; z^*, \delta)$. В силу леммы 5 для произвольного $x \in U$ справедливо неравенство $f(z^*|x|) \leqslant z^*(\mathbf{f}|x|)$. Поскольку f четная $\mathbf{f}|x| = \mathbf{f}x$, а значит $f(z^*|x|) < \delta$, откуда $z^*|x| < \epsilon$ для всех $x \in U$. Мы получили слабую непрерывность решеточных операций в нуле. В силу леммы 3 это невозможно. $\rhd$

Следствие 7. *Каждая из функций* $|u|^p$, $(1+|u|^p)^q - 1$, *где* $p, q \geqslant 1$, $e^{|u|} - 1$, *определяет оператор суперпозиции, действующий в пространстве* c_0 *и не являющийся слабо непрерывным в нуле.*

Следующая теорема дает условия, при которых функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяет оператор суперпозиции $\mathbf{f}$, не являющийся слабо непрерывным. Пространство последовательностей X назовем *инвариантным относительно растяжения*, если для любой последовательности $z = (z_1, z_2, \ldots) \in X$ и подпоследовательности натуральных чисел n_k последовательность x, определяемая, как $x_{n_k} = z_k$ и $x_i = 0$ при $i \notin \{n_1, n_2, \ldots\}$, также принадлежит пространству X. Пространства c_0, ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, являются инвариантными относительно растяжения.

Теорема 8. *Пусть неотрицательная функция* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *определяет оператор суперпозиции* $\mathbf{f}$, *действующий в пространстве последовательностей* X, *причем двойственное к* X *пространство* X' *является инвариантным относительно растяжения и для всех* $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{n \geqslant k, u \in \mathbb{R}} f(n, u) = +\infty. \qquad (*)$$

Тогда $\mathbf{f}$ *не является слабо непрерывным ни в одной точке пространства* X.

$\lhd$ Фиксируем слабую единицу $z = (z_1, z_2, \ldots) \in X'$. Найдем последовательность $u_k \in \mathbb{R}$ и подпоследовательность натуральных чисел n_k, для которых $f(n_k, u_k) \geqslant \frac{k}{z_k}$ при всех k. Определим последовательность z', как $z'_{n_k} = z_k$ и $z'_i = 0$ при $i \notin \{n_1, n_2, \ldots\}$. Тогда $z' \in X'$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in X$ и покажем, что оператор $\mathbf{f}$ не является слабо непрерывным в x. В предположении противного найдется $\sigma(X, X^*)$-окрестность $U := \mathscr{O}(x; x_1^*, \ldots, x_m^*, \delta)$ точки x, для которой $\mathbf{f}(U) \subseteq \mathscr{O}(\mathbf{f}x; z', 1)$. Существует элемент $y \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} N(x_i^*)$, где $N(x_i^*)$ — ядра функционалов x_i^*, такой, что носитель $\operatorname{supp} y$ — бесконечное подмножество множества $\{n_1, n_2, \ldots\}$. Для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего неравенству $k_0 \geqslant 1 + |z'\mathbf{f}x|$, будет $y_{n_{k_0}} \neq 0$. Положим $\lambda = \frac{u_{k_0} - x_{n_{k_0}}}{y_{n_{k_0}}}$. Поскольку $x + \lambda y \in U$ имеем

$$1 > |z'\mathbf{f}(x + \lambda y) - z'\mathbf{f}x| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} z'_n f(n, x_n + \lambda y_n) - |z'\mathbf{f}x|$$
$$\geqslant z'_{n_{k_0}} f(n_{k_0}, x_{n_{k_0}} + \lambda y_{n_{k_0}}) - |z'\mathbf{f}x| = z_{k_0} f(n_{k_0}, u_{k_0}) - |z'\mathbf{f}x| \geqslant k_0 - |z'\mathbf{f}x| \geqslant 1,$$

мы пришли к противоречию. $\rhd$

Для случая пространства ℓ_∞ результат аналогичный предыдущей теореме ранее был получен в [6].

Достаточные условия слабой непрерывности

Следующая теорема для произвольного пространства последовательностей X выделяет широкий класс функций, определяющих слабо непрерывный оператор суперпозиции в X. Ниже через $C_b(\mathbb{R})$ обозначается пространство ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с нормой $\|g\|_{C_b(\mathbb{R})} = \sup\limits_{u \in \mathbb{R}} |g(u)|$.

Теорема 9. *Пусть функция* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *определяет оператор суперпозиции* $\mathbf{f}$, *действующий в пространстве последовательностей* X, *причем выполнены следующие условия*:

(a) *Функция* f *удовлетворяет условию Каратеодори*;

(b) *Имеет место включение* $\mathbf{f}(X) \subseteq X^\circ$;

(c) *Существует индекс* $n_0 \in \mathbb{N}$ *такой, что для всех* $n \geqslant n_0$ *функции* $f(n,\cdot)$ *ограничены, и, кроме того, последовательность*

$$\left(\underbrace{0,\ldots,0}_{n_0-1},\ \|f(n_0,\cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})},\ \|f(n_0+1,\cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})},\ \ldots\right) \in X''. \tag{$*$}$$

Тогда оператор суперпозиции $\mathbf{f}$ *является слабо непрерывным в* X.

$\lhd$ Фиксируем последовательность $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$. Для произвольных функционала $z^* \in X^s$ и элемента $z \in X$ справедливо $z^*(\mathbf{f}z) = 0$. Следовательно, учитывая равенство $X^* = X' \oplus X^s$, для доказательства слабой непрерывности $\mathbf{f}$ в точке x достаточно для заданной неотрицательной последовательности $z' = (z_1, z_2, \ldots) \in X'$ и числа $\epsilon > 0$ найти $\sigma(X, X^*)$-окрестность U точки x, для которой $\mathbf{f}(U) \subseteq \mathscr{O}(\mathbf{f}x; z', \epsilon)$. Рассмотрим последовательность $y = (y_1, y_2, \ldots) \in X''$, определенную в $(*)$. В силу сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} z_i y_i$ найдется $N \geqslant n_0$, для которого $\sum_{i=N+1}^{\infty} z_i y_i < \frac{\epsilon}{4}$. Положим $M = \max\{\sum_{i=1}^{N} z_i, 1\}$. Существует $\delta > 0$ такое, что неравенства $|x_i - u| \leqslant \delta$ влекут $|f(i,x_i) - f(i,u)| \leqslant \frac{\epsilon}{2M}$ для всех $i = \overline{1,N}$. Тогда для произвольного $z \in \mathscr{O}(x; e_1, \ldots, e_N, \delta)$ имеем $|x_i - z_i| < \delta$ для $i = \overline{1,N}$, откуда

$$|z'(\mathbf{f}x - \mathbf{f}z)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} z_i (f(i,x_i) - f(i,z_i))\right|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} z_i |f(i,x_i) - f(i,z_i)| + 2\sum_{i=N+1}^{\infty} z_i y_i < \frac{\epsilon}{2M}\sum_{i=1}^{N} z_i + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Таким образом, $\mathbf{f}(\mathscr{O}(x; e_1, \ldots, e_N, \delta)) \subseteq \mathscr{O}(\mathbf{f}x; z', \epsilon)$, что и требовалось. $\rhd$

Будем говорить, что оператор T, действующий в некотором банаховом пространстве Z, *обладает конечномерной областью значений*, если линейная оболочка множества $R(T) = \{Tz : z \in Z\}$ является конечномерным пространством. Пусть функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяет оператор суперпозиции $\mathbf{f}$, действующий в пространстве последовательностей X. Если $f(n,\cdot) = 0$ при больших n, то, очевидно, $\mathbf{f}$ обладает конечномерной областью значений.

Следствие 10. *Для любого бесконечномерного пространства последовательностей* X *существует, действующий в* X, *оператор суперпозиции* $\mathbf{f}$, *являющийся слабо непрерывным и не представимый в виде суммы аффинного оператора и оператора, обладающего конечномерной областью значений.*

$\lhd$ Существует последовательность $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X^\circ \cap X''$, причем $x_n > 0$ при всех n. Действительно, если последовательности y и z — слабые единицы X° и X'', соответственно, то достаточно положить $x_n = \min(y_n, z_n)$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ найдем функцию $f_n \in C_b(\mathbb{R})$ не являющуюся аффинной и такую, что $\|f_n\|_{C_b(\mathbb{R})} \leqslant x_n$; например, $f_n(u) = x_n \sin u$. Положим $f(n,u) = f_n(u)$. В силу предыдущей теоремы, оператор суперпозиции $\mathbf{f}$, определяемый f, является слабо непрерывным. Пусть $\mathbf{g}$ — аффинный оператор суперпозиции, действующий в X и определяемый функцией g. Тогда, как отмечалось выше, $g(n,\cdot)$ аффинная для всех n, а значит функция $h(n,u) = f(n,u) - g(n,u)$

не является константой по u. Следовательно, существует последовательность u_n, для которой $h(n,u_n) \neq h(n,0)$. Тогда $\mathbf{h}(u_n e_n) - \mathbf{h}0 = (h(n,u_n) - h(n,0))e_n$. Таким образом, оператор суперпозиции $\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{g}$ не обладает конечномерной областью значений, как и требовалось. $\rhd$

Следствие 11. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является ограниченной и непрерывной, $f(0) = 0$. Тогда оператор суперпозиции $\mathbf{f}$, определяемый f и действующий в c_0, является слабо непрерывным.*

$\lhd$ Требуемое утверждение сразу вытекает из теоремы 9, если заметить, что $(c_0)^\circ = c_0$ и $(c_0)'' = \ell_\infty$. $\rhd$

В силу следствия 7 предположение об ограниченности f существенно.

Неясно, справедливо ли утверждение обратное к теореме 9, *т. е. вытекает ли из слабой непрерывности* $\mathbf{f}$ *его представление в виде* $\mathbf{f}x = a + bx + \mathbf{f_0}x$, *где* $a = \mathbf{f}0$, b — *некоторая последовательность, а для оператора суперпозиции* $\mathbf{f_0}$ *выполняются условия* **(a)**, **(b)** *и* **(c)** *теоремы* 9. Для пространства ℓ_∞ ответ частично был получен в [6]. В общем случае, положительный ответ на этот вопрос означал бы, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяет в некотором пространстве последовательностей X слабо непрерывный оператор суперпозиции $\mathbf{f}$, то f представима в виде $f(u) = a + bu + g(u)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а g — ограниченная функция, $g(0) = 0$. Причем, в некоторых случаях, как, например, когда для любой $x \in X''$ выполняется $\liminf\limits_{i\to\infty} |x_i| = 0$ (см. следствие 2) или когда последовательность $(1, 1, \ldots) \in X \setminus X^\circ$, было бы $g \equiv 0$. В частности, следствие 11 давало бы не только достаточное, но и «по сути» необходимое условие слабой непрерывности оператора суперпозиции $\mathbf{f}$ в c_0. Тем не менее, *вопрос остается открытым даже для случая пространства c_0 и функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Частичное подтверждение справедливости отмеченной гипотезы дает теорема 8. В самом деле, если двойственное к пространству последовательностей X пространство X' является инвариантным относительно растяжения, то, очевидно, $X'' \subseteq \ell_\infty$. Кроме того, как следует из теоремы 9, теорема 8 не остается справедливой для произвольного X. Достаточно заметить существование пространства последовательностей X, для которого $X = X^\circ$ и $X'' \nsubseteq \ell_\infty$. Например, пространство c_0 с весом,

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \lim_{n\to\infty} n^{-1} x_n = 0 \ \text{ и } \ \|x\| = \sup_n |n^{-1} x_n| < \infty \right\}.$$

Как легко видеть, последовательность $(1, 2, 3, \ldots) \in X''$. Таким образом, равенство $(*)$ в теореме 8 может иметь место для слабо непрерывного оператора суперпозиции $\mathbf{f}$, определяемого функцией $f \geqslant 0$.

То обстоятельство, что для пространства ℓ_∞ и функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ответ получен, а для c_0 еще нет, может быть объяснено более бо́льшим сопряженным к пространству ℓ_∞. Действительно, $c_0^* = \ell_1 \subset \ell_\infty^*$. Пространство ℓ_∞^*, конечно, более сложное, чем ℓ_1, но оно содержит и более специальные функционалы за счет свойств которых можно получить более глубокие результаты о слабой непрерывности оператора суперпозиции $\mathbf{f}$. Так, в [6] при установлении аффинности функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, порождающей слабо непрерывный оператор суперпозиции $\mathbf{f}$, действующий в ℓ_∞, решающую роль играло существование на ℓ_∞ обобщенных пределов, являющихся антинормальными функционалами. Функционалов «такого вида» не существует на c_0.

Следующая теорема дает условия, при которых функция f удовлетворяет предположению **(c)** из теоремы 9. Через s будем обозначать пространство всех последовательностей, а через Γ линейную оболочку множества $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ в s. Если X — некоторое пространство последовательностей, то, очевидно, $\Gamma \subseteq X'$, а значит пара $\langle X, \Gamma \rangle$ образует дуальную пару.

Теорема 12. *Пусть функция* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *определяет оператор суперпозиции* $\mathbf{f}$, *действующий в пространстве последовательностей* X, *причем* $\mathbf{f}0 = 0$. *Рассмотрим следующие утверждения*:

(a) *Оператор* $\mathbf{f}$ *является непрерывным, как отображение топологического пространства* $(X, \sigma(X, \Gamma))$ *в топологическое пространство* $(X, \sigma(X, X'))$;

(b) *Оператор* $\mathbf{f}$ *является непрерывным в нуле, как отображение топологического пространства* $(X, \sigma(X, \Gamma))$ *в топологическое пространство* $(X, \sigma(X, X'))$;

(c) *Имеет место включение* $\mathbf{f}(s) \subseteq X''$;

(d) *Для функции* f *выполнено условие* **(c)** *теоремы* 9.

Тогда **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** $\Rightarrow$ **(c)** $\Rightarrow$ **(d)**.

Если, к тому же, f *удовлетворяет условию Каратеодори, то* **(d)** $\Longrightarrow$ **(a)**.

$\lhd$ **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** Очевидно.

(b) $\Rightarrow$ **(c)** Всякая последовательность x из пространства Рисса s может быть представлена в виде $x = y + z$, $y \perp z$, причем $\mathbf{f}y \geqslant 0$ и $\mathbf{f}z \leqslant 0$. Следовательно, включение $\mathbf{f}x \in s$ достаточно показать в предположении $\mathbf{f}x \geqslant 0$. Определим последовательности $z_n = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in X$ и $z_{k,m} = z_k - z_m$. Очевидно, $z_{k,m} \xrightarrow{\sigma(X,\Gamma)} 0$ при $k, m \to \infty$, а значит $\mathbf{f}z_{k,m} \xrightarrow{\sigma(X,X')} 0$. При этом для $k \geqslant m$ имеем $\mathbf{f}z_{k,m} = \mathbf{f}z_k - \mathbf{f}z_m$. Следовательно, $\mathbf{f}z_k$ является слабой последовательностью Коши, в частности, последовательность $x'\mathbf{f}z_k$ ограничена для произвольного функционала $x' = (x'_1, x'_2, \ldots) \in X'$. Для x' имеет место интегральное представление $x'y = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i y_i = \int\limits_{\mathbb{N}} x'y \, d\mu$ для всех $y \in X$, где μ — «считающая» мера на $\mathbb{N}$. Используя теорему Фату [3, с. 169] и соотношения $0 \leqslant \mathbf{f}z_k \uparrow \mathbf{f}x$ получаем $\sum_{i=1}^{\infty} x'_i(\mathbf{f}x)_i = \int\limits_{\mathbb{N}} x'\mathbf{f}x \, d\mu < \infty$, откуда $\mathbf{f}x \in X''$.

(c) $\Rightarrow$ **(d)** Прежде всего покажем, что начиная с некоторого номера функции $f(n, \cdot)$ ограничены. В предположении противного найдем подпоследовательность n_k натуральных чисел, для которой функции $f(n_k, \cdot)$ неограниченные при всех k. Существует неотрицательная последовательность $x = (x_1, x_2, \ldots) \notin X''$ такая, что $x_i > 0$ в том и только том случае, когда $i = n_k$ при некотором k. Действительно, взяв произвольный элемент $z = (z_1, z_2, \ldots)$, являющийся слабой единицей в X', достаточно положить $x_{n_k} = \frac{1}{z_{n_k}}$ и $x_i = 0$ при $i \notin \{n_1, n_2, \ldots\}$. Существует последовательность u_n, для которой $|f(n_k, u_{n_k})| \geqslant x_{n_k}$ при всех k. Имеем $0 \leqslant x \leqslant |\mathbf{f}u| \in X''$, где $u = (u_1, u_2, \ldots) \in s$. Поскольку X'' — идеал в s, получаем $x \in X''$. Мы пришли к противоречию. Таким образом, существует n_0 такое, что для всех $n \geqslant n_0$ функции $f(n, \cdot)$ ограничены.

Положим $b_n = \|f(n, \cdot)\|_{C_b(\mathbb{R})}$ при $n \geqslant n_0$ и $b_n = 0$ для остальных $n \in \mathbb{N}$. Найдем последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) \in c_0 \cap X''$ такую, что $b_n > \varepsilon_n > 0$, если $b_n > 0$, и $\varepsilon_n = 0$, если $b_n = 0$. Для некоторой последовательности u_n будет $|f(n, u_n)| \geqslant b_n - \varepsilon_n$ при всех n. Тогда $0 \leqslant b - \varepsilon \leqslant |\mathbf{f}u| \in X''$, где $b = (b_1, b_2, \ldots)$, $u = (u_1, u_2, \ldots)$. Значит $b - \varepsilon \in X''$, откуда $b \in X''$.

(d) $\Rightarrow$ **(a)** Доказательство аналогично доказательству теоремы 9. $\rhd$

Предыдущая теорема не противоречит результатам полученным ранее и говорящим, что в некоторых случаях слабая непрерывность равносильна аффинности (например, теорема 1 и следствие 2). На самом деле, *аффинное отображение* $Tx = a + bx$ *будет непрерывным, как отображение* $(X, \sigma(X, \Gamma))$ *в* $(X, \sigma(X, X'))$ *в том и только том случае, когда* $b \in \Gamma$, *т. е.* $b_n = 0$ *при больших* n. В пояснении нуждается лишь необходимость.

В предположении противного положим $z_n = b_n$, если $b_n \neq 0$, и $z_n = 1$, если $b_n = 0$. Тогда последовательность $x_n = \frac{n}{z_n\|e_n\|}e_n \xrightarrow{\sigma(X,\Gamma)} 0$, но неограниченная последовательность Tx_n не может сходится к элементу a в $\sigma(X, X')$-топологии. Для этого достаточно заметить, что иначе мы получили бы и слабую сходимость Tx_n к a, а значит ее ограниченность. В частности, тождественный оператор I не является непрерывным, как отображение $(X, \sigma(X, \Gamma))$ в $(X, \sigma(X, X'))$.

Имеет место также следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству импликации **(b)** $\Longrightarrow$ **(c)** теоремы 12: *Если оператор суперпозиции* $\mathbf{f}$*, действующий в пространстве последовательностей* X*, является слабо непрерывным, то* $\mathbf{f}(X'') \subseteq X''$. На самом деле, справедлив следующий более общий факт: *Если* Y *— идеал в пространстве Рисса* s, $\Gamma \subseteq Y$, *оператор суперпозиции* $\mathbf{f}$ *непрерывен, как отображение* $(X, \sigma(X, Y))$ *в* $(X, \sigma(X, X'))$*, то* $\mathbf{f}(Y') \subseteq X''$. Здесь, по аналогии со случаем пространства последовательностей, $Y' = \{z \in s : \sum_{i=1}^{\infty} z_i y_i < \infty,\ y \in Y\}$.

Отметим, что некоторые результаты статьи без труда могут быть перенесены на случай, когда оператор суперпозиции $\mathbf{f}$ действует из одного пространства последовательностей X в некоторое другое пространство последовательностей Y.

Итак, хотя для случая непрерывной меры ответ полностью получен, в случае дискретной меры при исследовании слабой непрерывности оператора суперпозиции возникают определенные трудности. Данный факт является еще одним подтверждением в пользу точки зрения о том, что дискретное сложнее, чем непрерывное.

Литература

1. *Алехно Е. А., Забрейко П. П.* Слабая непрерывность оператора суперпозиции в идеальных пространствах с непрерывной мерой // Тр. ИМ НАН Беларуси.—2004.—Т. 12, № 1.—С. 21–24.
2. *Алехно Е. А., Забрейко П. П.* О слабой непрерывности оператора суперпозиции в пространстве L_∞ // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук.—2005.—№ 2.—С. 17–23.
3. *Богачев В. И.* Основы теории меры. Т. 1.—М.–Ижевск, 2006.—584 с.
4. *Забрейко П. П.* Идеальные пространства функций // Вестник Ярославского ун-та.—1974.—Вып. 8.—С. 12–52.
5. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D.* An invitation to operator theory // Grad. Stud. in Math., Vol. 50.—Providence (R. I.): Amer. Math. Soc., 2002.—530 p.
6. *Alekhno E. A.* On weak continuity of a superposition operator on the space of all bounded sequences // Methods of Functional Analysis and Topology.—2005.—Vol. 11, № 3.—P. 207–216.
7. *Appell J., Zabrejko P. P.* Nonlinear superposition operators.—Cambridge: Camb. univ. press, 1990.—312 p.
8. *Schaefer H. H.* Banach lattices and positive operators.—B. etc.: Springer, 1974.—376 p.

Статья поступила 27 января 2009 г.

Алехно Егор Александрович
Белорусский государственный университет,
механико-математический факультет, *доцент*
Беларусь, 220030, Минск, пр. Независимости, 4
E-mail: Alekhno@bsu.by