Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 1, С. 54–62

УДК **517.958**

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ*

А. Ю. Родионов

Метод голоморфных разложений применяется к линейной связанной системе уравнений термоупругости. Получены и исследованы явные решения в виде рядов функций трех комплексных переменных, а также решения, получающиеся в результате вырождения упомянутых рядов в конечные суммы.

Ключевые слова: связанные задачи линейной термоупругости, системы линейных уравнений в частных производных, явные решения, голоморфные разложения.

1. Введение

Система уравнений термоупругости описывает взаимосвязь между упругими напряжениями и изменениями температуры в теплопроводящей среде. В ней сочетаются эллиптические и параболические уравнения, что усложняет как численное, так и аналитическое исследование.

В этой работе мы рассматриваем связанную статическую систему [1] и получаем для нее класс формальных решений в виде рядов, известных как голоморфные разложения [2]. Их члены зависят от четырех начальных, произвольно выбранных голоморфных функций трех комплексных переменных. Свойства голоморфных разложений, изученные в [3], позволяют доказать две теоремы сходимости. Кроме того, найдено семейство начальных функций, для которых формальные решения содержат лишь конечное число отличных от нуля членов. Мы называем такие решения конечными. В приведенных примерах все они выражены через алгебраические операции над элементарными функциями. Класс конечных решений достаточно широк для использования его в вычислительных методах типа Трефтца и для проверки эффективности любых других численных процедур.

Попытка решения системы уравнений термоупругости схожими методами предпринималась в [4]. В этой работе, однако, использовались ряды, свойства которых не были достаточно изучены. Из-за этого теоремы сходимости доказать не удалось. Существование класса конечных решений, который представляется нам весьма интересным, также не было замечено.

2. Система уравнений термоупругости и ее комплексный аналог

Рассматривается классическая статическая система уравнений термоупругости [1].

$$\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta(u)}{\partial x_j}+\mu\Delta u_j-\beta\frac{\partial T}{\partial x_j}=0, \quad j=1,2,3,\\
&\rho c\frac{\partial T}{\partial t}-\Lambda\Delta T+\beta T_*\frac{\partial\Theta(u)}{\partial t}=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

*При выполнении этого исследования не использовались ресурсы университета Антиокии

В этих уравнениях $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений. Его компоненты суть функции $x = (x_1, x_2, x_3)$ и времени t. От тех же переменных зависит температура T. Постоянные λ, μ, ρ, c, Λ и T_* обозначают соответственно постоянные Ламе, плотность, теплоемкость, коэффициент теплопроводности и температуру среды; $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, где α — коэффициент теплового расширения. Все константы подчиняются естественным ограничениям: $\rho > 0$, $c > 0$, $\alpha > 0$, $\Lambda > 0$, $T_* > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$. Переменная x изменяется в односвязной области D, вложенной в R^3, а время t может принимать любые действительные значения; Δ обозначает оператор Лапласа, а $\Theta(u) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$. Построим комплексный аналог системы (1), следуя идеям, развитым в [3].

Считая функции $w_k(x, x_4, t, t_1)$ заданными в области $G = \{(x, x_4, t, t_1) : x \in D, x_4 \in R, t \in R, t_1 \in R\}$, запишем для них уравнения

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta(w)}{\partial x_j} + \mu \Delta w_j - \beta \frac{\partial w_4}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

$$\rho c \frac{\partial w_4}{\partial t} - \Lambda \Delta w_4 + \beta T_* \frac{\partial \Theta(w)}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial x_4} = \frac{\partial w_k}{\partial t_1} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{4}$$

Они эквивалентны (1), поскольку w_k удовлетворяют этой системе и не зависят от x_4 и t_1, что обеспечено уравнениями (4). Определим комплексные переменные $z_1 = x_1 + \iota x_2$, $z_2 = x_3 + \iota x_4$, $z_3 = t + \iota t_1$ и станем рассматривать G как область в $\mathbb{C}^3$. Определим операторы Коши $d_z = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \iota \frac{\partial}{\partial y})$, $d_{\bar z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \iota \frac{\partial}{\partial y})$, если $z = x + \iota y$, и перепишем (2)–(4) в виде:

$$\begin{gathered}
2(a + 2b) d_{\bar z_1} d_{z_1} w_1 + a d_{\bar z_1}^2 (w_1 - \iota w_2) + 2a d_{\bar z_1} d_{z_2} w_3 + a d_{z_1}^2 (w_1 + \iota w_2) \\
+4b d_{z_2}^2 w_1 + 2a d_{z_1} d_{z_2} w_3 - r d_{\bar z_1} w_4 - r d_{z_1} w_4 = 0, \\
2(a + 2b) d_{\bar z_1} d_{z_1} w_2 - \iota a d_{\bar z_1}^2 (w_1 - \iota w_2) - 2\iota a d_{\bar z_1} d_{z_2} w_3 + a\iota d_{z_1}^2 (w_1 + \iota w_2) \\
+4b d_{z_2}^2 w_2 + 2\iota a d_{z_1} d_{z_2} w_3 + r\iota d_{\bar z_1} w_4 - r\iota d_{z_1} w_4 = 0, \\
a d_{\bar z_1} d_{z_2} (w_1 - \iota w_2) + 2b d_{\bar z_1} d_{z_1} w_3 + a d_{z_1} d_{z_2} (w_1 + \iota w_2) + 2(a + b) d_{z_2}^2 w_3 - r d_{z_2} w_4 = 0, \\
p d_{\bar z_1} d_{z_3} (w_1 - \iota w_2) - q d_{\bar z_1} d_{z_1} w_4 + d_{z_3} w_4 - q d_{z_2}^2 w_4 + p d_{z_1} d_{z_3} (w_1 + \iota w_2) 2p d_{z_2} d_{z_3} w_3 = 0, \\
d_{\bar z_2} w_k = d_{z_2} w_k, \quad d_{\bar z_3} w_k = d_{z_3} w_k, \quad k = 1, 2, 3, 4.
\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь и далее считаем, что функции w_k принимают комплексные значения. Новые константы суть $a = \lambda + \mu$, $b = \mu$, $p = \beta T_*/c/\rho$, $q = 2\Lambda/c/\rho$, $r = \beta$. Действительные и мнимые части w_k удовлетворяют (1), что дает основание называть (5) ее комплексным аналогом.

3. Формальное решение комплексного аналога

Определим новые неизвестные функции $V^1 = w_1 + \iota w_2$, $V^2 = w_1 - \iota w_2$, $V^3 = 2w_3$, $V^4 = w_4$ и преобразуем (5) в

$$\begin{gathered}
a d_{\bar z_1}^2 V^2 + (a + 2b) d_{\bar z_1} d_{z_1} (V^1 + V^2) + a d_{\bar z_1} d_{z_2} V^3 + a d_{z_1}^2 V^1 \\
+2b d_{z_2}^2 (V^1 + V^2) + a d_{z_1} d_{z_2} V^3 - r d_{\bar z_1} V^4 - r d_{z_1} V^4 = 0,
\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}
a d_{\bar z_1}^2 V^2 + (a + 2b) d_{\bar z_1} d_{z_1} (V^1 - V^2) + a d_{\bar z_1} d_{z_2} V^3 - a d_{z_1}^2 V^1 \\
+2b d_{z_2}^2 (V^1 - V^2) - a d_{z_1} d_{z_2} V^3 - r d_{\bar z_1} V^4 + r d_{z_1} V^4 = 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

$$a d_{\bar z_1} d_{z_2} V^2 + b d_{\bar z_1} d_{z_1} V^3 + a d_{z_1} d_{z_2} V^1 + (a + b) d_{z_2}^2 V^3 - r d_{z_2} V^4 = 0, \tag{8}$$

$$pd_{\bar z_1}d_{z_3}V^2-qd_{\bar z_1}d_{z_1}V^4+d_{z_3}V^4-qd^2_{z_2}V^4+pd_{z_1}d_{z_3}V^1+pd_{z_1}d_{z_3}V^3=0, \tag{9}$$

$$d_{z_2}V^k=d_{\bar z_2}V^k,\quad d_{z_3}V^k=d_{\bar z_3}V^k,\quad k=1,2,3,4. \tag{10}$$

Уравнения (6)–(9) влекут явные выражения для $d_{\bar z_1}V^k$. Действительно, вычитая (7) из (6), получим $d_{\bar z_1}V^2$. Уравнение (8) дает выражение для $d_{\bar z_1}V^3$, из (9) выразится $d_{\bar z_1}V^4$. Наконец, подставив $d^2_{\bar z_1}V^2$ в (6), найдем $d_{\bar z_1}V^1$:

$$\begin{aligned}d_{\bar z_1}V^1&=\frac{-1}{a+2b}\left(2bJd^2_{z_2}V^1+aJ^3d^4_{z_2}V^2-aJ^2d^3_{z_2}V^3+rJ^2d^2_{z_2}V^4\right)+\frac{1}{q(a+2b)(a+b)}\\&\times\left(brp(Jd_{z_3}V^1-J^3d^2_{z_2}d_{z_3}V^2+J^2d_{z_2}d_{z_3}V^3)+\frac{1}{2}r(rp+a+2b)J^2d_{z_3}V^4\right),\end{aligned} \tag{11}$$

$$d_{\bar z_1}V^2=\frac{-1}{a+2b}\left(ad_{z_1}V^1+2bJd^2_{z_2}V^2+ad_{z_2}V^3-rV^4\right), \tag{12}$$

$$d_{\bar z_1}V^3=\frac{-1}{a+2b}\left(2ad_{z_2}V^1-2aJ^2d^3_{z_2}V^2+(3a+2b)Jd^2_{z_2}V^3-2rJd_{z_2}V^4\right), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}d_{\bar z_1}V^4&=\frac{1}{q(a+2b)}\left(2bp(d_{z_3}V^1-J^2d^2_{z_2}d_{z_3}V^2+Jd_{z_2}d_{z_3}V^3)\right.\\&\left.+(rp+a+2b)Jd_{z_3}V^4\right)-Jd^2_{z_2}V^4,\end{aligned} \tag{14}$$

где $J\phi(z)=\int_0^{z_1}\phi(\xi,z_2,z_3)\,d\xi$. Корректность приведенного определения оператора J вызывает справедливые сомнения и нуждается в комментарии.

До записи выражений (11)–(14) мы могли считать $V^k(z)$ произвольными функциями, имеющими нужное число частных производных. Теперь же мы будем считать их суммами голоморфных разложений, т. е. равномерно сходящихся рядов вида

$$V^k=\sum_{|n|=0}^{\infty}\bar z^nV^k_n(z), \tag{15}$$

где функции $V^k_n(z)$ голоморфны в G. Здесь и далее $n=(n_1,n_2,n_3)$, $|n|=n_1+n_2+n_3$, $z=(z_1,z_2,z_3)$, $z^n=z_1^{n_1}z_2^{n_2}z_3^{n_3}$.

В [3] доказана единственность голоморфного разложения функции и возможность его кратного почленного дифференцирования и интегрирования. Смысл оператора J для сумм голоморфных разложений очевиден.

Чтобы получить рекуррентные соотношения для $V^k_n(z)$ подставим (15) в (10)–(14):

$$V^k_{n_1,n_2+1,n_3}=\frac{1}{n_2+1}d_{z_2}V^k_n,\qquad V^k_{n_1,n_2,n_3+1}=\frac{1}{n_3+1}d_{z_3}V^k_n,$$

$$\begin{aligned}V^1_{n_1+1,n_2,n_3}&=-\frac{2bJd^2_{z_2}V^1_n+aJ^3d^4_{z_2}V^2_n-aJ^2d^3_{z_2}V^3_n+rJ^2d^2_{z_2}V^4_n}{(a+2b)(n_1+1)}\\&+\frac{brp(Jd_{z_3}V^1_n-J^3d^2_{z_2}d_{z_3}V^2_n+J^2d_{z_2}d_{z_3}V^3_n)+\frac{1}{2}r(rp+a+2b)J^2d_{z_3}V^4_n}{q(a+2b)(a+b)(n_1+1)},\end{aligned}$$

$$V^2_{n_1+1,n_2,n_3}=-\frac{ad_{z_1}V^1_n+2bJd^2_{z_2}V^2_n+ad_{z_2}V^3_n-rV^4_n}{(a+2b)(n_1+1)},$$

$$V^3_{n_1+1,n_2,n_3}=-\frac{2ad_{z_2}V^1_n-2aJ^2d^3_{z_2}V^2_n+(3a+2b)Jd^2_{z_2}V^3_n-2rJd_{z_2}V^4_n}{(a+2b)(n_1+1)},$$

$$V^4_{n_1+1,n_2,n_3}=\frac{2bp(d_{z_3}V^1_n-J^2d^2_{z_2}d_{z_3}V^2_n+Jd_{z_2}d_{z_3}V^3_n)+(rp+a+2b)Jd_{z_3}V^4_n}{q(a+2b)(n_1+1)}-\frac{Jd^2_{z_2}V^4_n}{n_1+1}.$$

Эти соотношения позволяют найти все коэффициенты голоморфных разложений формальных решений комплексного аналога по произвольно заданным голоморфным функциям $V^k_{0,0,0}$, удовлетворяющим условию $V^1_{0,0,0}(0,z_2,z_3)=0$. Положив $V_n=(V^1_n,V^2_n,V^3_n,V^4_n)$ и используя матричные обозначения, найдем

$$V_n=\frac{(-1)^{n_1}}{n!}d^{n_2}_{z_2}d^{n_3}_{z_3}\left(\sum_{k=1}^{15}L_k\right)^{n_1}V_0,\quad n!=n_1!n_2!n_3!, \tag{16}$$

$$\begin{array}{lll}
L_1=A^1, & L_2=d_{z_3}A^2, & L_3=d_{z_2}A^3,\\
L_4=d_{z_1}A^4, & L_5=Jd_{z_3}A^5, & L_6=Jd_{z_2}A^6,\\
L_7=Jd_{z_2}d_{z_3}A^7, & L_8=Jd^2_{z_2}A^8, & L_9=J^2d_{z_3}A^9,\\
L_{10}=J^2d_{z_2}d_{z_3}A^{10}, & L_{11}=J^2d^2_{z_2}A^{11}, & L_{12}=J^2d^2_{z_2}d_{z_3}A^{12},\\
L_{13}=J^2d^3_{z_2}A^{13}, & L_{14}=J^3d^2_{z_2}d_{z_3}A^{14}, & L_{15}=J^3d^4_{z_2}A^{15}.
\end{array}$$

Числовые матрицы $(a{+}2b)A^k$ размерности $4{\times}4$ имеют, в основном, нулевые элементы. Отличны от нуля лишь

$$\begin{array}{llll}
a^1_{2,4}=r; & & & \\
a^2_{4,1}=-2bp/q; & a^3_{2,3}=a, & a^3_{3,1}=2a; & a^4_{2,1}=a;\\
a^5_{1,1}=\dfrac{-brp}{q(a+b)}, & a^5_{4,4}=-\dfrac{a+2b+rp}{q}; & a^6_{3,4}=-2r; & a^7_{4,3}=-\dfrac{2bp}{q};\\
a^8_{1,1}=2b, & a^8_{2,2}=2b, & a^8_{3,3}=3a+2b, & a^8_{4,4}=a+2b;\\
a^9_{1,4}=\dfrac{-r(a+2b+rp)}{2q(a+b)}; & a^{10}_{1,3}=\dfrac{-brp}{q(a+b)}; & a^{11}_{1,4}=r; & a^{12}_{4,2}=\dfrac{2bp}{q};\\
a^{13}_{1,3}=-a, & a^{13}_{3,2}=-2a; & a^{14}_{1,2}=\dfrac{brp}{q(a+b)}; & a^{15}_{1,2}=a.
\end{array}$$

Выражение (15) в дальнейшем нам будет удобнее рассматривать в матричной форме:

$$V=\sum_{|n|=0}^{\infty}\bar z^nV_n(z),\quad V=(V^1,V^2,V^3,V^4). \tag{17}$$

4. Сходимость формальных решений

В этом параграфе мы рассматриваем вопросы сходимости голоморфных разложений с коэффициентами, определяемыми функцией V_0 по формулам (16). Символом $H(\Omega)$ обозначается пространство вектор-функций, голоморфных в области Ω. Размерность вектора может быть равна единице или четырем, что всегда будет ясно из контекста. Нам понадобятся три леммы, относящиеся к теории функций комплексного переменного.

Лемма 1. *Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, содержащая начало координат, L_ξ — множество спрямляемых кривых, соединяющих его с точкой $\xi\in\Omega$ и лежащих в Ω. Обозначим через $|l|$ длину кривой l. Тогда функция $l(\xi)=\inf_{l\in L_\xi}|l|$ непрерывна в Ω.*

$\lhd$ Для любых $\xi\in\Omega$ и $\epsilon>0$ существует $l\in L_\xi$ такой, что $|l|<l(\xi)+\epsilon$. В окрестности ξ, целиком лежащей в Ω, произвольно возьмем точку ξ_1 такую, что $|\xi-\xi_1|<\epsilon$. Для нее верно $l(\xi_1)\leqslant|l|+\epsilon$, поскольку в правой части неравенства стоит длина кривой, лежащей в Ω и соединяющей начало координат с точкой ξ_1. В таком случае $l(\xi_1)-l(\xi)\leqslant2\epsilon$. Меняя ролями точки ξ_1 и ξ, придем к неравенству $l(\xi_1)-l(\xi)\geqslant-2\epsilon$. $\rhd$

Следствие 1. *На всяком компакте Λ, вложенном в Ω, функция $l(\xi)$ достигает своего максимума M.*

Лемма 2. *Для всех $\xi \in \Lambda$ и $\epsilon > 0$ существует $l \in L_\xi$ такой, что $|l| < M + \epsilon$.*

$\lhd$ Пусть, напротив, найдутся $\xi \in \Lambda$ и $\epsilon > 0$ такие, что для любого $l \in L_\xi$ верно $|l| > M + \epsilon$. Тогда для этой точки $l(\xi) \geqslant M + \epsilon$, что противоречит определению M. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть Ω — односвязная область, Λ — вложенный в нее компакт и $f(\eta) \in H(\Omega)$; $|f(\eta)| \leqslant R$ для всех $\eta \in \Lambda$. Тогда для любого $\xi \in \Lambda$ $|\int_0^\xi f(\eta)\, d\eta| \leqslant MR$.*

$\lhd$ Достаточно перейти к пределу при $\epsilon \to 0$ в неравенстве $|\int_0^\xi f(\eta)\, d\eta| \leqslant (M + \epsilon)R$, обеспеченном леммой 2. $\rhd$

Перейдем к исследованию оператора (16), без ограничения общности считаем $M \geqslant 1$.

Пусть G_1 — ограниченная односвязная область, компактно вложенная в G. В дальнейшем рассматриваем кривые из L_ξ в области G_1, а нормы функций — на компакте $\bar{G}_1$. Нормы матриц рассчитываются по формуле $|A| = \max_i \sum_j |a_{i,j}|$, а нормы функций — $|V| = \max_{j \leqslant 4;\, z \in \bar{G}_1} |V^j(z)|$.

Лемма 4. *Для оператора $T_s = \prod_{k=1}^m d_{z_1}^{i(k)} J^{j(k)}$, где $s = \sum_{k=1}^m i(k) + j(k)$, найдутся i и j такие, что выполнится одно из равенств: $T_s = d_{z_1}^{i-j}$, $T_s = J^{j-i}$ или $T_s = J^j d_{z_1}^i$, причем $i + j \leqslant s$.*

$\lhd$ Для всякого сомножителя в T_s верно

$$d_{z_1}^{i(k)} J^{j(k)} = \begin{cases} d_{z_1}^{i(k)-j(k)}, & \text{если } \ i(k) \geqslant j(k), \\ J^{j(k)-i(k)}, & \text{если } \ i(k) < j(k), \end{cases}$$

так что $T_s = \prod_{k=1}^l d_{z_1}^{i(k,l)} J^{j(k,l)}$ и $l \leqslant [m/2] + 1$. Для сохранения формы оператора добавлено, в случае необходимости, $d_{z_1}^0$ в начало и (или) J^0 в конец произведения. Верна оценка $\sum_{k=1}^l i(k,l) + j(k,l) \leqslant s$.

Процесс «сокращения» оператора T_s продолжим до тех пор, пока он не примет вид $T_s = d_{z_1}^i J^j$ или $T_s = J^j d_{z_1}^i$, где $i + j \leqslant s$.

В первом случае

$$T_s = d_{z_1}^i J^j = \begin{cases} d_{z_1}^{i-j}, & \text{если } \ i \geqslant j, \\ J^{j-i}, & \text{если } \ i < j. \end{cases}$$

Второй случай в дальнейших преобразованиях не нуждается. $\rhd$

Перейдем к оценке нормы V_n.

Лемма 5. *Пусть $V_0(z) \in H(G)$ такова, что $|d_z^n V_0(z)| \leqslant |V_0| (\alpha |n|)^{\beta |n|}$ для фиксированных постоянных α и β и $|n|$ достаточно больших. Положим $A = \max_k |A_k|$. Тогда верна оценка $|V_n| \leqslant \frac{1}{n!} |V_0| (15A)^{n_1} (7\alpha |n|)^{7\beta|n|}$.*

$\lhd$ Умножив (16) на $(-1)^{n_1} n!$ и раскрыв скобки, получим сумму 15^{n_1} слагаемых, каждое из которых имеет вид

$$S_l = d_{z_2}^{n_2} d_{z_3}^{n_3} \prod_{k=1}^{n_1} L_{i(k,l)} V_0,$$

где $i(k,l)$ может принимать значения от 1 до 15. Будем считать, что оператор L_j встречается i_j раз в выражении для S_l. Очевидно, $\sum_{j=1}^{15} i_j = n_1$.

Поскольку операторы дифференцирования и интегрирования коммутируют с матрицами, все операторы дифференцирования — между собой, а операторы d_{z_2} и d_{z_3} коммутируют еще и с J, имеем:

$$S_l = \prod_{k=1}^{n_1} A^{i(k,l)} T_s d_{z_2}^{q_2} d_{z_3}^{q_3} V_0.$$

В этом выражении $s = i_4 + i_5 + i_6 + i_7 + i_8 + 2i_9 + 2i_{10} + 2i_{11} + 2i_{12} + 2i_{13} + 3i_{14} + 3i_{15}$, $q_2 = n_2 + i_3 + i_6 + i_7 + 2i_8 + i_{10} + 2i_{11} + 2i_{12} + 3i_{13} + 2i_{14} + 4i_{15}$, $q_3 = n_3 + i_2 + i_5 + i_7 + i_9 + i_{10} + i_{12} + i_{14}$.

Рассмотрим три возможные формы оператора T_s в соответствии с леммой 4, принимая во внимание неравенство $s + q_2 + q_3 \leqslant 7|n|$:

1) $T_s = d_{z_1}^{i-j}$ и

$$|T_s d_{z_2}^{q_2} d_{z_3}^{q_3} V_0| \leqslant |V_0| \big(\alpha(s + q_2 + q_3)\big)^{\beta(s+q_2+q_3)} \leqslant |V_0| (7\alpha|n|)^{7\beta|n|}.$$

2) $T_s = J^{j-i}$ и

$$|T_s d_{z_2}^{q_2} d_{z_3}^{q_3} V_0| \leqslant |V_0| M^{j-i} \big(\alpha(q_2 + q_3)\big)^{\beta(q_2+q_3)} \leqslant |V_0| (7\alpha|n|)^{7\beta|n|}.$$

Последняя оценка является следствием очевидных неравенств $q_2 + q_3 \leqslant 7|n|$ и $M^{j-i} \leqslant M^s \leqslant \big(M^{1/\beta}\big)^{\beta s} \leqslant (7\alpha|n|)^{\beta s}$.

3) $T_s = J^j d_{z_1}^i$ и

$$|T_s d_{z_2}^{q_2} d_{z_3}^{q_3} V_0| \leqslant |V_0| M^j \big(\alpha(i + q_2 + q_3)\big)^{\beta(i+q_2+q_3)} \leqslant |V_0| (7\alpha|n|)^{7\beta|n|},$$

поскольку $i + q_2 + q_3 \leqslant 7|n|$ и $M^j \leqslant M^{s-i} \leqslant \big(M^{1/\beta}\big)^{\beta(s-i)} \leqslant (7\alpha|n|)^{\beta(s-i)}$.

Доказательство завершается применением неравенства

$$\left| \prod_{k=1}^{n_1} A_{i(k,l)} V_0 \right| \leqslant |V_0| \prod_{j=1}^{15} |A_j|^{i_j} \leqslant A^{n_1} |V_0|. \ \triangleright$$

Сформулируем достаточное условие сходимости (17) в виде

Теорема 1. *Пусть $V_0 \in H(G)$ такова, что $|d_z^n V_0(z)| \leqslant |V_0| (\alpha|n|)^{\beta|n|}$ для фиксированных положительных постоянных α и β. Тогда ряд (17) сходится абсолютно и равномерно на $\bar{G}_1$, если $\beta < 1/7$, и расходится для всех z, отличных от нуля, если $\beta > 1/7$.*

$\triangleleft$

$$\frac{1}{|V_0(z)|} \sum_{|n|=0}^{\infty} |\bar{z}^n V_n| \leqslant \sum_{|n|=0}^{\infty} \frac{(15A)^{n_1}}{n!} (7\alpha|n|)^{7\beta|n|} |z|^{|n|}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(7\alpha k)^{7\beta k} |z|^k}{k!} \sum_{n_1=0}^{k} \frac{(15A)^{n_1} k!}{n_1!(k-n_1)!} \sum_{n_2=0}^{k-n_1} \frac{(k-n_1)!}{n_2!(k-n_1-n_2)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(7\alpha k)^{7\beta k} |z|^k}{k!} \sum_{n_1=0}^{k} \frac{k!}{n_1!(k-n_1)!} (15A)^{n_1} 2^{k-n_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(7\alpha k)^{7\beta k}}{k!} \Big(|z|(15A+2)\Big)^k.$$

Последний ряд расходится при всех z, отличных от нуля, если $\beta > 1/7$, и сходится при всех z, если $\beta < 1/7$. $\triangleright$

Замечание 1. Можно продолжить исследование и доказать, что при $\beta = 1/7$ и $z \in \bar{G}_1$ для сходимости достаточно $|z| \leqslant [7e\alpha(15A+2)]^{-1}$.

В приложениях может оказаться более удобной

Теорема 2. *Пусть $V_0 \in H(G)$ такова, что $|d_z^n V_0(z)| \leqslant |V_0|\alpha^{|n|}$ для фиксированной постоянной α. Тогда ряд (17) сходится абсолютно и равномерно на компакте $\bar{G}_1$.*

$\lhd$ В условиях теоремы верна оценка $|S_l| \leqslant (n!)^{-1} A^{n_1} |V_0| \beta^{|n|}$, где $\beta = \max\{\alpha^7, M^7\}$ и $|V_n| \leqslant (n!)^{-1}|V_0|(15A)^{n_1}\beta^{|n|}$.

Для ряда из абсолютных величин (15) получаем

$$\frac{1}{|V_0(z)|}\sum_{|n|=0}^{\infty} |\bar{z}^n V_n| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\beta|z|(15A+2)\Big)^k.$$

Последний ряд сходится при всех z, что и завершает доказательство. $\rhd$

Замечание 2. Используя более общий, чем J, оператор взятия первообразной, можно получить отличные от (11)–(14) выражения для $d_{\bar{z}_1} V^k$. Они будут включать в себя несколько произвольных функций, допускающих голоморфные разложения. Класс формальных решений системы (5) при этом существенно расширится, но формулировки и доказательства теорем сходимости станут слишком громоздкими для журнальной статьи.

5. Конечные решения

Решения рассматриваемой системы уравнений термоупругости представляются рядами (17), функциональные коэффициенты $V_n(z)$ которых генерируются произвольной начальной функцией $V_0(z)$. Определим класс начальных функций, для которых ряды (17) вырождаются в конечные суммы.

Очевидно, для этого необходимо равенство нулю всех $V_n(z)$ для $|n|$ достаточно больших. Покажем, что это имеет место для всех начальных функций вида

$$V_0 = \big(\phi_1(z_1)P_1(z_2,z_3), \phi_2(z_1)P_2(z_2,z_3), \phi_3(z_1)P_3(z_2,z_3), \phi_4(z_1)P_4(z_2,z_3)\big), \tag{18}$$

где $\phi_j(z_1)$ — голоморфные функции z_1, а $P_j(z_2,z_3)$ — полиномы.

Пусть N_2 и N_3 — максимальные степени z_2 и z_3 в полиномах P_j. Тогда, если зафиксировать n_1 в (16), для равенства нулю V_n достаточно выполнения одного из неравенств: $n_2 > N_2$ или $n_3 > N_3$. Заканчивает решение проблемы

Теорема 3. *Пусть $V_0(z)$ имеет вид (18). Тогда $V_{n_1,0,0} = 0$ для всех n_1 достаточно больших.*

$\lhd$ Положим $M_1 = A^1 + A^4 d_{z_1}$ и определим M_2 так, чтобы выполнялось $V_{k,0,0} = (-1)^k (k!)^{-1}(M_1+M_2)^k V_0$. Раскрывая скобки, видим, что выражение для $V_{k,0,0}$ состоит из 2^k слагаемых, представляющих собой композиции M_1 и M_2, причем, если M_2 встречается в композиции k_2 раз, то M_1 встретится $k_1 = k - k_2$ раз.

В каждом из операторов L_j, составляющих M_2, присутствует дифференцирование по z_2 и (или) z_3, так что все слагаемые, в которых $k_2 > N_2 + N_3$, равны нулю.

Анализируя оставшиеся слагаемые, заметим, что матрицы A^1 и A^2 таковы, что $A^1A^1 = A^2A^1 = A^1A^2 = A^2A^2 = 0$, поэтому равны нулю все слагаемые, в которых оператор M_1 встречается два или более раз подряд. Но такая ситуация неизбежна, если $k_1 > k_2 + 1$, т. е. $V_{k,0,0} = 0$, если $k > 2(N_2 + N_3) + 1$. $\rhd$

Приведем примеры элементарных решений системы (1), полученных методом голоморфных разложений. Будем указывать начальные функции, использованные в (16) для решения комплексного аналога и соответствующие им решения (1), опуская тривиальные, хотя и громоздкие промежуточные преобразования.

1. Начальным функциям $V^1_{0,0,0} = 0$, $V^2_{0,0,0} = 0$, $V^3_{0,0,0} = z_1^2 z_2^2 z_3^2$, $V^4_{0,0,0} = 0$ соответствует полиномиальное решение

$$u_1 = \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1 x_3}{\lambda + 3\mu}\left(-8(\lambda+\mu)t^2 + \frac{\mu\beta^2 T_*}{3\Lambda(\lambda+2\mu)}\Big((3x_1^2 - x_2^2)t + \frac{1}{60\Lambda}\left(c\rho + \frac{\beta^2 T_*}{\lambda+2\mu}\right)(4x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^4)\Big)\right),$$

$$u_2 = \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1 x_3}{\lambda + 3\mu}\left(8(\lambda+\mu)t^2 + \frac{\mu\beta^2 T_*}{3\Lambda(\lambda+2\mu)}\Big((x_1^2 - 3x_2^2)t + \frac{1}{60\Lambda}\left(c\rho + \frac{\beta^2 T_*}{\lambda+2\mu}\right)(2x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - 4x_2^4)\Big)\right),$$

$$u_3 = 8(x_1^2 - x_2^2)x_2^2 t^2 + \frac{(x_1^4 - x_2^4)}{3(\lambda+3\mu)}\Big(-4(3\lambda+5\mu)t^2 + \frac{\mu\beta^2 T_*(x_1^2+x_2^2)}{2\Lambda(\lambda+2\mu)}\Big(t + \frac{1}{60\Lambda}\left(c\rho + \frac{\beta^2 T_*}{\lambda+2\mu}\right)(x_1^2+x_2^2)\Big)\Big),$$

$$T = \frac{\mu\beta T_*(x_1^4 - x_2^4)x_3}{3\Lambda(\lambda+3\mu)}\left(16t + \frac{1}{2\Lambda}\left(c\rho + \frac{\beta^2 T_*}{\lambda+2\mu}\right)(x_1^2+x_2^2)\right).$$

2. Начальным функциям $V^1_{0,0,0} = 0$, $V^2_{0,0,0} = 0$, $V^3_{0,0,0} = 0$, $V^4_{0,0,0} = z_2^2 z_3 / z_1^{1/2}$ соответствует решение, имеющее особенность при $x_1 = x_2 = 0$.

$$u_1 = \frac{x_1(C_1+x_1)P_1 + x_2^2 P_2}{C_1 C_2}, \quad u_2 = \frac{x_2(C_1+x_1)P_1 - x_1 x_2 P_2}{C_1 C_2},$$
$$u_3 = P_3 C_1 C_2, \quad T = \frac{(\lambda+2\mu)P_4 C_2}{C_1},$$

где

$$C_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad C_2 = \Big((x_1^2+x_2^2)^{1/2} + x_1\Big)^{1/2},$$
$$P_1 = -\frac{\beta}{15}\Big(40A(5x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2)t + B(x_1^2+x_2^2)(11x_1^2 + 11x_2^2 - 35x_3^2)\Big),$$
$$P_2 = \frac{\beta}{15}\Big(40A(x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2)t - B(x_1^2+x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2)\Big),$$
$$P_3 = \frac{4\beta}{3}x_3\Big(24At + B(x_1^2+x_2^2)\Big),$$
$$P_4 = -\frac{16\Lambda(\lambda+3\mu)}{c\rho}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)t - \frac{8}{3}B(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_2^2-3x_3^2),$$
$$A = \frac{\Lambda(\lambda+2\mu)}{c\rho}, \quad B = \lambda + 3\mu + \frac{\beta^2 T_*}{c\rho}.$$

3. Этот пример содержит решение с рациональными и логарифмическими особенностями. Оно соответствует начальным функциям $V^1_{0,0,0} = 0$, $V^2_{0,0,0} = z_2^2 z_3^2 (z_1 - 1)^{-4}$, $V^3_{0,0,0} = 0$, $V^4_{0,0,0} = 0$. Системе (1) удовлетворяют действительные и мнимые части функций

$$w_1 = x_3\Bigg(t^2\left(\frac{B|z_1|^2(z_1^2 - 3z_1 + 3)}{(z_1-1)^3} + \frac{Cx_3^2}{(z_1-1)^4}\right) + tD|z_1|^2\left(\frac{|z_1|^2(2z_1-3)}{(z_1-1)^2} + \frac{2z_1^2}{z_1-1}\right) + A\Big(6\bar{z}_1^2\ln(z_1-1) + \frac{2|z_1|^6}{z_1-1} + \bar{z}_1^2\big(z_1(2z_1^2+3z_1+6) - 6\iota\pi\big)\Big)\Bigg),$$

$$
w_2 = \iota x_3\left(t^2\left(\frac{B|z_1|^2(z_1^2-3z_1+3)}{(z_1-1)^3}+\frac{Cx_3^2}{(z_1-1)^4}\right)+tD|z_1|^2\left(\frac{|z_1|^2(2z_1-3)}{(z_1-1)^2}-\frac{2z_1^2}{z_1-1}\right)\right.
$$

$$
\left.-A\left(6\bar z_1^2\ln(z_1-1)-\frac{2|z_1|^6}{z_1-1}+\bar z_1^2\big(z_1(2z_1^2+3z_1+6)-6\iota\pi\big)\right)\right),
$$

$$
w_3 = \frac{t^2|z_1|^2z_1(3-2z_1)E}{(z_1-1)^2}+\frac{t|z_1|^4z_1D}{z_1-1}+2A\ln(z_1-1)\bar z_1^3
$$

$$
+\frac{1}{3}A\bar z_1^2|z_1|^2(2z_1^2+3z_1+6)-2A\iota\pi\bar z_1^3,
$$

$$
T = \frac{8(\lambda+2\mu)}{\beta}x_3|z_1|^2z_1\left(\frac{Dt(2z_1-3)}{(z_1-1)^2}+3\frac{A|z_1|^2}{z_1-1}\right).
$$

Здесь

$$
A=\frac{1}{6}\mu\beta^2T_*\left(c\rho+\frac{\beta^2T_*}{\lambda+2\mu}\right),\quad B=64\mu\Lambda^2(\lambda+2\mu),
$$

$$
C=64\Lambda^2(\lambda+2\mu)(\lambda+3\mu),\quad D=4\Lambda\mu\beta^2T_*,\quad E=16\Lambda^2(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu).
$$

Все конечные решения полиномиально зависят от x_3 и t. Частично избавиться от этого ограничения можно за счет иной организации комплексных переменных.

Литература

1. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.—1990.—310 с.
2. *Александрович А. И.* Применение теории функций двух комплексных переменных к теории упругости // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 232, № 5.—Р. 542–544.
3. *Rodionov A.* An Interesting Case of Variables Separation // Appl. Math. Lett.—2000.—Vol. 13, № 5.—P. 33–39.
4. *Александрович А. И., Родионов А. Ю.* Исследование анизотропных и термоупругих задач методами комплексного анализа // Вопросы механики твердого и деформируемого тела.—М., 1987.—Р. 74–84.

Статья поступила 14 сентября 2008 г.

Родионов Алексей Юрьевич
Departamento de matemáticas, Universidad de Antioquia,
Profesor titular
Medellin, Colombia, America Sur, AA1226
E-mail: alexeirodionov@yahoo.com