Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 1, С. 29–42

УДК **519.14**

О РЕБЕРНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С $b_1 = 5$[1]

В. И. Казарина, А. А. Махнев

Неориентированный v-вершинный граф, в котором степени всех вершин равны k, а каждое ребро принадлежит точно λ треугольникам, называется реберно регулярным с параметрами (v, k, λ). Положим $b_1 = k - \lambda - 1$. В книге Броувера, Коэна и Ноймайера «Дистанционно регулярные графы» доказано, что связный реберно регулярный граф с $b_1 = 1$ является многоугольником или полным многодольным с долями порядка 2. Махневым А. А. получено описание реберно регулярных графов с $b_1 \leqslant 3$ и с $b_1 = 4$, $k \geqslant 10$. В данной работе классифицированы связные реберно регулярные графы с $b_1 = 5$ с одним из дополнительных условий: граф сильно регулярен или $k \geqslant 14$.

Ключевые слова: реберно регулярный граф, треугольный граф, граф Клейна.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a. Под собственными значениями графа понимаются собственные значения его матрицы смежности. В дальнейшем слово «подграф» будет означать индуцированный подграф. Пусть $\mathscr{F}$ — семейство графов. Граф Γ называется локально $\mathscr{F}$ графом, если $[a] \in \mathscr{F}$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро графа Γ лежит точно в λ треугольниках. Граф Γ называется *кореберно регулярным графом с параметрами* (v, k, μ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин для любых несмежных вершин a, b. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для вершин a, b с $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем λ-подграфом (μ-подграфом). Подграф

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальный исследований, проект № 08-01-00009, РФФИ-БРФФИ, проект № 08-01-90006 и РФФИ-ГФЕН Китая, проект № 08-01-92200.

Σ графа Γ назовем μ-замкнутым, если $[a] \cap [b] \subset \Sigma$ для любых вершин a, $b \in \Sigma$, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Для подграфа Δ графа Γ через $X_i(\Delta)$ обозначим множество всех вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, и положим $x_i(\Delta) = |X_i(\Delta)|$.

Через $K_{m_1,\ldots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф, с долями порядков $m_1, \ldots, m_n$. Если $m_1 = \ldots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой. Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$m \times n$ решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Граф Пэли $P(q)$ в качестве вершин имеет элементы поля F_q, $q \equiv 1 \pmod 4$, и две вершины a, b смежны, только если $b - a$ является ненулевым квадратом в F_q. Граф Петерсена — это дополнительный граф для треугольного графа $T(5)$ (он имеет параметры (10,3,0,1)). Граф Клебша (Шлефли) — это единственный сильно регулярный граф с параметрами (16,10,6,6) (с параметрами (27,16,10,8)). Граф Шрикханде — это единственный сильно регулярный локально шестиугольный граф с параметрами (16,6,2,2). Имеется точно 3 сильно регулярных графа, имеющих параметры графа $T(8)$, но не изоморфных $T(8)$. Эти графы называются графами Чанга.

Полный (вполне несвязный) подграф данного графа называется *кликой* (*кокликой*). Под кликовым (кокликовым) α-расширением графа Γ будем понимать граф, полученный заменой каждой вершины a из Γ на клику (коклику) (a), содержащую α вершин, при этом указанные клики (коклики) попарно не пересекаются, а вершины из (a) и (b) смежны тогда и только тогда, когда a и b смежны в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1 = b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$. Дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$ называется граф диаметра d, в котором значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w. Граф диаметра d называется антиподальным, если отношение — совпадать или находиться на расстоянии d — является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. Антиподальным частным Γ' называется факторграф антиподального графа Γ, вершинами которого являются указанные классы эквивалентности и два класса смежны, если некоторая вершина одного класса смежна с вершиной другого. Если все классы эквивалентности состоят из r вершин, то Γ называется *r-накрытием* графа Γ'.

В следствии 1.1.6 из [1] доказано, что если Γ — связный реберно регулярный граф с $b_1 = 1$, то Γ — многоугольник или полный многодольный граф $K_{n\times 2}$. Реберно регулярные графы с $2 \leqslant b_1 \leqslant 4$ изучались в работе [2].

В данной работе рассматриваются графы с $b_1 = 5$.

Теорема. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $b_1 = 5$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) если Γ сильно регулярен, то он является одним из следующих графов: полный многодольный граф $K_{r\times 6}$, 6×6 решетка, граф Шлефли, треугольный граф $T(8)$ или один из трех графов Чанга;

(2) если $k \geqslant 14$, то либо Γ сильно регулярен, либо верно одно из утверждений:

(i) множество вершин графа Γ разбивается тремя μ-замкнутыми $K_{4\times 2}$-подграфами Φ_1, Φ_2 и Φ_3, можно считать, что смежные вершины c, d из Φ_3 смежны с вершинами $a_1, \ldots, a_4$ из Φ_1 и с вершинами $b_1, \ldots, b_4$ из Φ_2, а смежные вершины e f из $\Phi_3 - \{c, d, c^*, d^*\}$

смежны с вершинами a_1, a_2, a_3^*, a_4^* и с вершинами b_1, b_2, b_3^*, b_4^*, где для $x \in \Phi_i$ вершина x^* является антиподом x в Φ_i, можно считать, что a_1 смежна с b_1, b_3, b_2^*, b_4^*, a_2 смежна с b_2, b_4, b_1^*, b_3^*, a_3 смежна с b_1, b_2^*, b_3^*, b_4, a_4 смежна с b_1^*, b_2, b_3, b_4^* и граф Γ однозначно восстанавливается,

(ii) Γ является дополнительным графом для $\Omega_{1,3}$, где Ω — граф Клейна (единственный дистанционно регулярный локально семиугольный граф диаметра 3 на 24 вершинах, являющийся 3-накрытием 8-клики).

Если Ω — граф диаметра, большего 2, то $\Omega_{1,3}$ — граф на множестве вершин графа Ω, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда расстояние между ними в Ω равно 1 или 3.

1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $b_1 = k - \lambda - 1$. Если вершины u, w находятся на расстоянии 2 в Γ, то выполняются следующие утверждения:*

(1) степень любой вершины в графе $[u] \cap [w]$ из Γ не меньше $k - 2b_1$;

(2) вершина d имеет степень $k - 2b_1 + \alpha$ в графе $[u] \cap [w]$ тогда и только тогда, когда $[d]$ содержит точно α вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$;

(3) если $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$, то подграф $[u] \cap [w]$ является кликой и $[d] \subset u^\perp \cup w^\perp$ для любой вершины $d \in [u] \cap [w]$;

(4) если $\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$ содержит единственную вершину z, то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$.

$\lhd$ Пусть $d \in [u] \cap [w]$. Тогда $|[d] - [u]| = |[d] - [w]| = b_1$. Поэтому по крайней мере $k - 2b_1$ вершин из $[d]$ содержится в $[u] \cap [w]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $d \in [u] \cap [w]$ и степень d в этом μ-подграфе равна $k - 2b_1 + \alpha$. Тогда $k = (k - 2b_1 + \alpha) + 2b_1 + |[d] - (u^\perp \cup w^\perp)|$. Поэтому $[d]$ содержит α вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$. Верно и обратное. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) следует из (1), (2).

Пусть $\{z\} = \Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$. Так как число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] - [u]$ равно $b_1|[u] - [w]| - \mu(u, z)$, то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$. $\rhd$

Из леммы 1.1 следует, что в реберно регулярном графе для любых вершин u, w, находящихся на расстоянии 2, выполняется неравенство $\mu(u, w) \geqslant k - 2b_1 + 1$. Пару вершин (u, w) с $d(u, w) = 2$ назовем *хорошей*, если $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$. Если любая пара несмежных вершин графа Γ является хорошей, то Γ оказывается графом Тервиллигера без 3-лап и по теореме 1.2.3 [1] получим, что Γ — реберный граф регулярного графа без треугольников или граф икосаэдра.

Пусть до конца параграфа Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ). Число ребер в Γ (в окрестности вершины из Γ) равно $vk/2$ (равно $k\lambda/2$), поэтому vk и $k\lambda$ четны. Число треугольников в Γ равно $vk\lambda/6$, поэтому $vk\lambda$ делится на 3.

Лемма 1.2. *Пусть (u, w) — хорошая пара и $\mu(u, z) \leqslant k - 2b_1 + 2$ для вершины z из $\Gamma_2(u) - \{w\}$. Тогда $|[u] \cap [w] \cap [z]| < 2$.*

$\lhd$ Утверждение следует из лемм 4, 5 работы [3]. $\rhd$

Лемма 1.3. *Пусть $u \in \Gamma$ и w, z — несмежные вершины из $\Gamma_2(u)$ с $\mu(u, w) = \mu(u, z) = k - 2b_1 + 2$. Если $k \geqslant 3b_1 - 3$, то $|[u] \cap [w] \cap [z]| < 2$.*

$\lhd$ См. теорему 1 из [4]. $\rhd$

Лемма 1.4. *Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий параметры (v,k,λ,μ). Тогда либо $k=2\mu$, $\lambda=\mu-1$ (так называемый половинный случай) и v является суммой квадратов двух целых чисел, либо неглавные собственные значения $n-m$, $-m$ графа Γ — целые числа, где $n^2=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$, $n-\lambda+\mu=2m$ и кратность собственного значения $n-m$ равна $\frac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если m — целое число, большее 1, то $m-1$ делит $k-\lambda-1$ и*

$$\mu=\lambda+2+(m-1)-\frac{k-\lambda-1}{m-1},\quad n=m-1+\frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

$\lhd$ Это лемма 3.1 из [5]. $\rhd$

Сильно регулярные графы с собственным значением -2 были классифицированы Зейделем (теорема 3.12.4 [1]). Любой Зейделев граф — это либо полный многодольный граф $K_{r\times 2}$, либо решетчатый или треугольный граф, либо один из графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша или Шлефли.

Лемма 1.5. *Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий целочисленные собственные значения, и $b_1=k-\lambda-1$. Тогда*

(1) *если b_1 — простое число, то Γ является полным многодольным графом $K_{r\times(b_1+1)}$ или Зейделевым графом;*

(2) *если $b_1=2p$, p — простое число, то Γ либо является полным многодольным графом, либо имеет собственное значение -2 или -3, либо является дополнительным к Зейделеву графу;*

(3) *если $b_1=4$, то Γ является полным многодольным графом $K_{r\times 5}$, 5×5 решеткой, треугольным графом $T(7)$ или дополнительным графом к 4×4 решетке, треугольному графу $T(6)$ или графу Клебша (заметим, что в половинном случае параметры графа равны $(17,8,3,4)$ и он является графом Пэли).*

$\lhd$ См. лемму 7 из [3]. $\rhd$

Лемма 1.6. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v,k,λ). Если $\lambda\geqslant k+1/2-\sqrt{2k+2}$ (равносильно $k\geqslant(b_1^2+3b_1)/2+1$), то Γ — дополнительный граф для сильно регулярного графа Δ и либо $\mu(\Delta)\leqslant 1$, либо $\lambda(\Delta)=0$ и $\mu(\Delta)=2$.*

$\lhd$ Это уточнение теоремы 1.4.3 из [1], следующее из ее доказательства. $\rhd$

Лемма 1.7. *Пусть Γ — реберно регулярный граф диаметра 2 с параметрами (v,k,λ). Тогда для $\bar\mu=v-2k+\lambda=(v-k-1)-b_1$ и $\bar\lambda=\min\{v-|u^\perp\cup w^\perp|:\ d(u,w)=2\}$ выполняется неравенство*

$$k\bar\mu\leqslant(b_1+\bar\mu)(b_1+\bar\mu-1-\bar\lambda).$$

$\lhd$ По условию граф $\overline{\Gamma}$ является кореберно регулярным с вышеуказанным $\bar\mu$. По предложению 1.4.1 [1], примененному к $\overline{\Gamma}$, имеем $v-\bar k-1\leqslant\bar k(\bar k-1-\bar\lambda)/\bar\mu$. Так как $\bar k=b_1+\bar\mu$, то $k\bar\mu\leqslant(b_1+\bar\mu)(b_1+\bar\mu-1-\bar\lambda)$. $\rhd$

Лемма 1.8. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ), Δ — индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин $d_1,\dots,d_N$ и x_i — число вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ. Тогда*

(1) $(v-N)-(kN-2M)+\lambda M+\mu(\binom{N}{2}-M)-\sum\binom{d_i}{2}=x_0+\sum\binom{i-1}{2}x_i$ *и*

(2) *если $x_1,\dots,x_m$ — вещественные числа, то $(\sum ix_i)^2\leqslant\sum x_i\sum i^2x_i$, причем равенство достигается, только если $x_i=0$ для любого i, отличного от $i_0=\sum ix_i/\sum x_i$.*

$\lhd$ Подсчитав число вершин в $\Gamma-\Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma-\Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma-\Delta$, получим равенства $v-N=\sum x_i$, $kN-2M=\sum ix_i$ и $\lambda M+\mu(\binom{N}{2}-M)-\sum_{i=1}^N\binom{d_i}{2}=\sum\binom{i}{2}x_i$.

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим утверждение (1).

Так как квадратный трехчлен $\sum(i-x)^2 x_i = \sum i^2 x_i - 2x \sum i x_i + x^2 \sum x_i$ неотрицателен, то его дискриминант $(\sum i x_i)^2 - \sum x_i \sum i^2 x_i$ неположителен. В случае равенства $(\sum i x_i)^2 = \sum x_i \sum i^2 x_i$ квадратный трехчлен $\sum(i-x)^2 x_i$ имеет единственный корень $x = \sum i x_i / \sum x_i$ (кратности 2), поэтому $x_i = 0$ для $i \neq \sum i x_i / \sum x_i$. $\rhd$

2. Реберно регулярные графы больших степеней с $\mathbf{b_1 = 5}$

В этом параграфе предполагется, что Γ — реберно регулярный граф с $b_1 = 5$. Заметим, что $\lambda = k - 6$, поэтому k четно. Если k не делится на 3, то v делится на 3.

Лемма 2.1. *Если Γ — сильно регулярный граф с $b_1 = 5$, то Γ является одним из следующих графов:*

(1) *полный многодольный граф $K_{r\times 6}$;*

(2) 6×6 *решетка;*

(3) *треугольный граф $T(8)$ или один из трех графов Чанга;*

(4) *граф Шлефли с параметрами* $(27, 16, 10, 8)$.

$\lhd$ Ввиду леммы 1.5 Γ — граф в половинном случае, полный многодольный граф $K_{r\times 6}$ или граф Зейделя. Если параметры графа равны $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$, то $\mu = 5$ и $v = 21$ не является суммой двух квадратов целых чисел. Поэтому половинный случай невозможен.

Пусть Γ — граф Зейделя. Если $\Gamma = K_{r\times 2}$, то $b_1 = 1$. Если Γ имеет параметры $n \times n$ решетки $(n^2, 2n-2, n-2, 2)$, то $b_1 = n-1$ и $n = 6$. Если Γ имеет параметры треугольного графа $T(n)$, то $b_1 = n-3$ и $n = 8$. Поэтому Γ является треугольным графом $T(8)$ или одним из трех графов Чанга.

Граф Петерсена имеет $b_1 = 2$. Граф Клебша с параметрами (16,10,6,6) имеет $b_1 = 3$. Наконец, граф Шлефли имеет параметры (27,16,10,8) и $b_1 = 5$. $\rhd$

Лемма 2.2. *Если $k \geqslant 22$, то Γ — сильно регулярный граф.*

$\lhd$ Если $k \geqslant 22$, то по лемме 1.6 граф Γ сильно регулярен. $\rhd$

До конца параграфа будем предполагать, что Γ не является сильно регулярным графом. Напомним, что если $k \geqslant 3b_1 - 2$, то по следствию из [2] либо $b_1 \leqslant 3$, либо диаметр графа не больше 2.

Лемма 2.3. *Параметр k меньше* 20.

$\lhd$ Пусть $k = 20$. Тогда граф $\overline{\Gamma}$ является кореберно регулярным с $\bar{\mu} = v - 2k + \lambda = (v-k-1) - b_1 = v - 26$ и по лемме 1.7 выполняется неравенство $20\bar{\mu} \leqslant (\bar{\mu}+5)(\bar{\mu}+4)$. Отсюда $\bar{\mu}^2 - 11\bar{\mu} + 20 \geqslant 0$ и $2 \leqslant \bar{\mu} \leqslant 8$. Так как $v = 26 + \bar{\mu}$ делится на 3, то $\bar{\mu} = 4$ или 7 и $v = 30$ или 33. Далее, для вершины u число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $kb_1 = 100$.

Если $v = 33$, то $|\Gamma_2(u)| = 12$, $k - 2b_1 + 1 = 11$ и указанное число не меньше $12 \cdot 11$, противоречие. Если $v = 30$, то $100 < 12 \cdot 9$ и некоторая вершина $w \in \Gamma_2(u)$ образует хорошую пару с u. Противоречие с тем, что тогда $u^\perp \cup w^\perp$ содержит 31 вершин. $\rhd$

Лемма 2.4. *Если $k = 18$, то $v = 26$ и для любой вершины $u \in \Gamma$ имеем $\mu(u, w_i) = 12$ для трех вершин $w_1, w_2, w_3 \in \Gamma_2(u)$, $\mu(u, y_i) = 13$ для двух вершин $y_1, y_2 \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u, z_j) = 14$ для двух вершин $z_1, z_2 \in \Gamma_2(u)$.*

$\lhd$ Пусть $k = 18$. Тогда граф $\overline{\Gamma}$ является кореберно регулярным с $\bar{\mu} = (v-k-1) - b_1 = v - 24$ и $v \geqslant 26$. Для вершины u число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $kb_1 = 90$. Так как $k - 2b_1 + 1 = 9$, то $|\Gamma_2(u)| \leqslant 10$ и в случае равенства каждая вершина $w \in \Gamma_2(u)$ образует хорошую пару с u. Противоречие с тем, что тогда Γ — пятиугольник или граф икосаэдра.

Если $v = 28$, то либо $\mu(u,w) = 10$ для любой вершины $w \in \Gamma_2(u)$, либо вершина u образует хорошую пару с некоторой вершиной $w \in \Gamma_2(u)$. Но в первом случае граф Γ сильно регулярен, а во втором $u^\perp \cup w^\perp$ содержит 29 вершин. В обоих случаях имеем противоречие.

Если $v = 27$, то $\mu(u,w) \geqslant 11$ для любой вершины $w \in \Gamma_2(u)$, поэтому $\Gamma_2(u)$ содержит точно две вершины z_1, z_2 с $\mu(u,z_i) = 12$ и $\mu(u,w) = 11$ для любой вершины $w \in \Gamma_2(u) - \{z_1, z_2\}$. Ввиду утверждения (4) леммы 1.1 имеем $\mu(z_1,z_2) = 12$ и $\mu(y,z_2) = 11$ для $y \in \Gamma_2(z_2) - \{u, z_1\}$, в частности, $\Gamma_2(z_2) \subset y^\perp$.

Положим $\Delta = [u] \cap [z_1]$. Ввиду леммы 1.1 степень любой вершины из $\Delta - [z_2]$ в графе Δ равна 8, причем $\mu(x,z_2) = 11$ для $x \in \Delta - [z_2]$ и подграф $\Delta - [z_2]$ является 6-кликой. Таким образом, число ребер между $\Delta - [z_2]$ и $\Delta \cap [z_2]$ равно 18. Поэтому некоторая вершина y из $\Delta \cap [z_2]$ смежна не более чем с 3 вершинами из $\Delta - [z_2]$ и степень y в графе Δ не больше 8. Противоречие с тем, что по лемме 1.1 степень каждой вершины из $\Delta \cap [z_2]$ в графе Δ равна 9.

Значит, $v = 26$. Тогда $\mu(u,w) \geqslant 12$ для любой вершины $w \in \Gamma_2(u)$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) $\mu(u,w) \neq 13$ для любой вершины $w \in \Gamma_2(u)$;

(2) $\mu(u,w) \neq 14$ для любой вершины $w \in \Gamma_2(u)$;

(3) $\mu(u,y_i) = 13$ для двух вершин $y_1, y_2 \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u,z_j) = 14$ для двух вершин $z_1, z_2 \in \Gamma_2(u)$.

В случае (1) $\Gamma_2(u)$ содержит точно три вершины z_1, z_2, z_3 с $\mu(u,z_i) = 14$ и $\mu(u,w) = 12$ для любой вершины $w \in \Gamma_2(u) - \{z_1, z_2, z_3\}$. Положим $\Delta = \{u, z_1, \ldots, z_3\}$, $X_i = X_i(\Delta)$, $x_i = |X_i|$. Тогда X_3 является объединением четырех 4-клик, состоящих из вершин, каждая из которых несмежна с единственной вершиной из Δ, и $x_4 = 6$. Пусть $x \in X_3 - [u]$ и $[x]$ содержит β вершин из X_4. Так как степень x в графе $[z_1] \cap [z_2]$ равна 9, то $[x]$ содержит 3 вершины из $X_3 - [u]$ и $6 - \beta$ вершин из $X_3 - [z_3]$. Теперь $[x] \cap [z_1]$ содержит точно $\beta + 3 + 2(6 - \beta)$ вершин, поэтому $\beta = 3$. Покажем, что каждая вершина из X_4 смежна точно с двумя вершинами из $X_3 - [u]$. Допустим, что разные вершины x_1, x_2 из $X_3 - [u]$ смежны с общей тройкой из $X_3 - [z_i]$. Тогда $[x_1] \cap [x_2]$ содержит 5 вершин из $\Gamma_2(u)$, 7 вершин из $X_3 \cap [u]$ и не пересекает X_4. Противоречие с тем, что для $y \in X_3 - ([u] \cup \{x_1, x_2\})$ подграф $[x_i] \cap [y]$ содержит не менее 2 вершин из X_4, 5 вершин из $\Gamma_2(u)$ и не менее 6 вершин из $X_3 \cap [u]$.

Поэтому разные вершины из $X_3 - [u]$ смежны с разными тройками из $X_3 - [z_i]$ и для двух вершин x, $x' \in X_3 - [u]$ подграф $[x] \cap [x']$ содержит 5 вершин из $\Gamma_2(u)$, 6 вершин из $X_3 \cap [u]$ и единственную вершину из X_4. Теперь любые две пары вершин из $X_3 - [u]$ смежны с разными парами вершин из $X_3 - [z_3]$. Далее, для $y \in X_4 \cap [x]$ подграф $[x] \cap [y]$ содержит z_1, z_2, z_3, не более 2 вершин в каждом из подграфов $X_3 - [z_i]$, единственную вершину из $X_3 - [u]$ и не более 2 вершин из X_4. Так как $\lambda = 12$, то $[y] \cap X_3$ является 8-кликой и $[x] \cap X_4$ является 3-кликой. Если y, y' — смежные вершины из X_4, то $[y] \cap [y']$ содержит u, z_1, z_2, z_3, не более 1 вершины в каждом из подграфов $X_3 - [z_i]$, $X_3 - [u]$ и не более 4 вершин из X_4. Итак, X_4 является кликой и для вершин y, $y' \in X_4$, смежных с непересекающимися 2-подмножествами из $X_3 - [u]$, получим $\lambda(y,y') \leqslant 11$, противоречие.

В случае (2) $\Gamma_2(u)$ содержит единственную вершину w с $\mu(u,w) = 12$ и $\mu(u,z) = 13$ для любой вершины $z \in \Gamma_2(u) - \{w\}$. В этом случае подграф $\Gamma_2(u) - \{w\}$ является октаэдром. Пусть z, z' — антиподальные вершины в этом октаэдре, $\Delta = \{u, z, z'\}$, $X_i = X_i(\Delta)$, $x_i = |X_i|$. Тогда $x_3 = 8$, $x_2 = 15$ и X_2 является объединением трех подграфов, отвечающих парам вершин из Δ, причем $X_2 - [u]$ состоит из четырехугольника и вершины w, смежной со всеми вершинами этого четырехугольника (такой подграф назовем пирамидой). Заметим, что $[w]$ содержит по 4 вершины из $X_2 - [z]$ и из $X_2 - [z']$, поэтому $[w]$ содержит 3 вершины из X_3. Пусть $x \in X_2 - ([u] \cup \{w\})$. Тогда $[x]$ содержит по 4 вершины из $X_2 - [z]$, $X_2 - [z']$ и 5 вершин из X_3. Далее, если x, x' — две несмежные вершины из $X_2 - [u]$, то $[x] \cap [x']$ содержит по 3 вершины из $X_2 - [z]$, $X_2 - [z']$ и 2 вершины из X_3. Аналогично, $[w] \cap [x]$ содержит по 3 вершины из $X_2 - [z]$, $X_2 - [z']$ и 2 вершины из X_3. Так как степень вершины w в графе $[x] \cap [x']$ равна 8, то $[x] \cap [x'] \cap [z]$ содержит 4 вершины из $\Gamma_2(u)$ и по 2 вершины $X_2 - [z]$, $X_2 - [z']$. Для $a \in X_3$ подграф $[a]$ содержит u, z, z' и по 3 вершины в каждом из подграфов $X_2 - [z]$, $X_2 - [u]$ и $X_2 - [z']$. Поэтому X_3 — регулярный граф степени 6 и этот граф изоморфен $K_{4\times 2}$. Ввиду симметричности октаэдра, подграф $X_3(\{u, x, x'\})$ также изоморфен $K_{4\times 2}$ и содержит 2 вершины a, b из X_3. Если вершины a, b несмежны, то $[a] \cap [b]$ содержит u, z, z', x, x' и по 6 вершин из X_3 и из $X_3(\{u, x, x'\})$. Противоречие с тем, что тогда $\mu(a, b) \geqslant 17$. Если же вершины a, b смежны, то $[a] \cap [b]$ содержит u, z, z', x, x' и по 4 вершины из X_3 и из $X_3(\{u, x, x'\})$. Противоречие с тем, что тогда $\lambda(a, b) \geqslant 13$.

Итак, для любой вершины $u \in \Gamma$ выполняется случай (3). $\rhd$

Лемма 2.5. *Если $k = 18$, то $v \neq 26$.*

$\lhd$ Пусть $k = 18$, $v = 26$ и $u \in \Gamma$. По лемме 2.4 подграф $\Gamma_2(u)$ содержит 3 вершины w_1, w_2, w_3 с $\mu(u, w_i) = 12$. Так как $\Gamma_2(u) \subset w_i^{\perp}$, то можно считать, что $\Gamma_2(u) - z_j^{\perp} = \{z_{3-j}, y_{3-j}\}$ для $j = 1, 2$. Очевидно, вершины y_1, y_2 смежны. Заметим, что $\mu(y_1, z_2) = 14$, иначе u — единственная вершина вне $y_1^{\perp} \cup z_2^{\perp}$ и по утверждению (4) леммы 1.1 получим $\mu(u, y_1) = \mu(u, z_2)$, противоречие.

Положим $\Delta = \{u, y_1, y_2\}$, $X_i = X_i(\Delta)$, $x_i = |X_i|$. Тогда $[y_1] \cap [y_2]$ содержит 3 вершины из $\Gamma_2(u)$ и 9 из $[u]$, поэтому $x_3 = 9$ и $[u]$ содержит по 4 вершины из $X_2 - [y_1]$ и из $X_2 - [y_2]$ и единственную вершину o из X_1. Подграф $[y_1] \cap [w_i]$ содержит 4 вершины из $\Gamma_2(u)$ и 8 из $[u]$, поэтому $|[w_i] \cap ([u] - [y_1])| = 4$. Далее, $[w_1] \cap [w_2]$ содержит 5 вершин из $\Gamma_2(u)$ и 7 из $[u]$. Так как вершины y_1, y_2 несмежны с o, то $[o] - u^{\perp}$ содержит w_1, w_2, w_3, z_1, z_2. Теперь каждая вершина w_i смежна с 5 вершинами из X_3 и $[w_1] \cap [w_2]$ содержит вершину из X_3 и не менее 5 вершин из $[u] - X_3$. Значит, X_3 содержит либо одну вершину из $[w_1] \cap [w_2]$ и по 4 вершины из $[w_1] - [w_2]$ и из $[w_2] - [w_1]$, либо две вершины из $[w_1] \cap [w_2]$, по 3 вершины из $[w_1] - [w_2]$ и из $[w_2] - [w_1]$ и вершину вне $[w_1] \cup [w_2]$. Далее, $[w_3] \cap [w_i]$ содержит не менее 5 вершин из $[u] - X_3$ и не менее 2 вершин из X_3 для подходящего $i \in \{1, 2\}$. Таким образом, разные вершины из $\{w_1, w_2, w_3\}$ смежны с различными тройками из $X_2 - [y_2]$ и $X_2 - [y_2] = \{w_0', \ldots, w_3'\}$, где w_i' — единственная вершина из $X_2 - [y_2]$, несмежная с w_i. Симметрично, $X_2 - [y_1] = \{w_0'', \ldots, w_3''\}$, где w_i'' — единственная вершина из $X_2 - [y_1]$, несмежная с w_i. Теперь подграф X_3 не пересекает $X_3(\{w_1, w_2, w_3\})$ и содержит по 2 вершины, смежные с парами вершин из $\{w_1, w_2, w_3\}$. Положим $\{w_1^*, w_2^*, w_3^*\} = X_1(\{w_1, w_2, w_3\}) \cap X_3$, где w_i^* смежна с w_i.

Заметим, что $[u] \cap [z_1]$ содержит 9 вершин из $[y_1]$ и 10 из $[y_2]$, поэтому $[u] \cap [z_1]$ содержит 6 вершин из X_3, 4 из $[y_2] - X_3$ и 3 из $[y_1] - X_3$. Симметрично, $[u] \cap [z_2]$ содержит 6 вершин из X_3, 4 из $[y_1] - X_3$ и 3 из $[y_2] - X_3$. Отсюда $[z_1] \cap [z_2]$ содержит w_1, w_2 w_3, o по 3 вершины из $X_2 - [y_1]$ и из $X_2 - [y_2]$ и 3 вершины из X_3, в частности, $[z_1] \cup [z_2]$ содержит X_3. Если $\mu(o, y_i) = 13$ и $\mu(o, y_{3-i}) = 14$, то $\Gamma_2(o)$ содержит единственную вершину вне $y_1^{\perp} \cup y_2^{\perp}$, противоречие. Значит, $\mu(o, y_1) = \mu(o, y_2) = 13$ и $[o] \cap [u]$ содержит по 3 вершины из $X_2 - [y_1]$ и из $X_2 - [y_2]$ и 6 вершины из X_3.

С одной стороны, $[z_1] \cap [z_2] = \{o, w_1, \ldots, w_3, w_1', \ldots, w_3', w_1'', \ldots, w_3'', w_1^*, \ldots, w_3^*\}$, причем w_i несмежна с единственной вершиной u вне $z_1^{\perp} \cup z_2^{\perp}$. Поэтому w_i смежна с 5 вершинами из $\{w_1', \ldots, w_3', w_1'', \ldots, w_3'', w_1^*, \ldots, w_3^*\}$. С другой стороны, $[w_0'] \cap [w_0''] =$

$\{u, w_1, \ldots, w_3, w_1', \ldots, w_3', w_1'', \ldots, w_3'', w_1^*, \ldots, w_3^*\}$, причем w_i смежна с единственной вершиной o вне $(w_0')^\perp \cup (w_0'')^\perp$. Поэтому степень w_i в графе $[w_0'] \cap [w_0'']$ равна 9 и w_i смежна с 7 вершинами из $\{w_1', \ldots, w_3', w_1'', \ldots, w_3'', w_1^*, \ldots, w_3^*\}$, противоречие. $\rhd$

Лемма 2.6. *Если $k = 16$, то либо $v = 27$ и Γ совпадает с графом Шлефли, либо $v = 24$ и для $u \in \Gamma$ выполняется одно из утверждений:*

(1) *$\mu(u, w_i) = 13$ для двух вершин w_1, $w_2 \in \Gamma_2(u)$ и либо*

(*i*) *$\mu(u, z_j) = 12$ для двух вершин z_1, $z_2 \in \Gamma_2(u)$, либо*

(*ii*) *$\mu(u, z) = 12$ для единственной вершины $z \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u, y_j) = 11$ для двух вершин y_1, $y_2 \in \Gamma_2(u)$;*

(2) *$\mu(u, w) = 13$ для единственной вершины $w \in \Gamma_2(u)$, $\mu(u, z_j) = 12$ для трех вершин z_1, z_2, $z_3 \in \Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$ и $\mu(u, y) = 11$ для единственной вершины $y \in \Gamma_2(u)$;*

(3) *либо*

(*i*) *$\mu(u, w_i) = 12$ для пяти вершин $w_1, \ldots, w_5 \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u, y_j) = 10$ для двух вершин y_1, $y_2 \in \Gamma_2(u)$, либо*

(*ii*) *$\mu(u, w_i) = 12$ для четырех вершин $w_1, \ldots, w_4 \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u, z_j) = 11$ для двух вершин z_1, $z_2 \in \Gamma_2(u)$, либо*

(*iii*) *$\mu(u, w_i) = 12$ для трех вершин $w_1, \ldots, w_3 \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u, z_j) = 11$ для четырех вершин $z_1, \ldots, z_4 \in \Gamma_2(u)$.*

$\lhd$ Пусть $k = 16$ и $u \in \Gamma$. Тогда v делится на 3 и число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $kb_1 = 80$. Если $v \geqslant 30$, то некоторая вершина из $\Gamma_2(u)$ смежна с 6 вершинами из $[u]$. Противоречие с тем, что $k - 2b_1 + 1 = 7$.

Пусть $v = 27$. Тогда либо $\mu(u, w) = 8$ для любой вершины w из $\Gamma_2(u)$, либо (u, w) — хорошая пара для некоторой вершины w из $\Gamma_2(u)$. Заметим, что ввиду [3] число вершин, образующих хорошие пары с u не больше 2. Если (u, w_1), (u, w_2) — две хорошие пары, то ввиду леммы 1.2 имеем $\mu(u, z) \geqslant k - 2b_1 + 3 = 9$ для любой вершины z из $\Gamma_2(u) - \{w_1, w_2\}$, противоречие.

Пусть $\mu(u, w) = 7$ для единственной вершины w из $\Gamma_2(u)$. Тогда $\mu(u, z) = 9$ также для единственной вершины z из $\Gamma_2(u)$ и $\mu(u, y) = 8$ для любой вершины y из $\Gamma_2(u) - \{w, z\}$. Пусть $\Gamma_2(u) - z^\perp = \{y_1, y_2\}$. Тогда по утверждению (4) леммы 1.1 имеем $\mu(u, z) = \mu(z, y_1) = 9$, противоречие. Итак, в случае $v = 27$ граф Γ сильно регулярен (и совпадает с графом Шлефли).

Пусть $v = 24$. Для любых двух несмежных вершин u, w верно нестрогое неравенство $\mu(u, w) \geqslant 10$, причем в случае равенства имеем $\Gamma = u^\perp \cup w^\perp$. Если $\mu(u, w) = 15$, то $\Gamma_2(u) - w^\perp$ содержит 5 вершин и число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $15 + 5 \cdot 11 + 10$. Для вершины $y \in \Gamma_2(u)$ с $\mu(u, y) = 11$ имеем $\{w\} = \Gamma - (u^\perp \cup y^\perp)$ и по утверждению (4) леммы 1.1 получим $\mu(w, u) = \mu(w, y) = 15$, противоречие.

Пусть $\mu(u, w) = 14$. Если $\mu(u, y) = 14$ еще для одной вершины $y \in \Gamma_2(u)$, то для $|\Gamma_2(u) - (w^\perp \cup y^\perp)| = i$ число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $14 \cdot 2 + 12i + 11(8 - 2i) + 10(i - 3) = 86$, противоречие. Если $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$ содержит вершину y с $\mu(u, y) = 11$, то $\{w\} = \Gamma - (u^\perp \cup y^\perp)$ и по утверждению (4) леммы 1.1 получим $\mu(w, u) = \mu(w, y) = 14$, противоречие. Значит, $\mu(u, y) \geqslant 12$ для $y \in \Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$ и число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $14 + 4 \cdot 12 + 2 \cdot 10 = 82$, противоречие.

Итак, $\mu(u, w) \leqslant 13$. Допустим сначала, что $\mu(u, w_i) = 13$ для двух вершин w_1, $w_2 \in \Gamma_2(u)$. Если вершины w_1, w_2 смежны, то $[w_1] \cap [w_2]$ содержит не менее 10 вершин из $[u]$ и число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $2 \cdot 13 + 12 + 4 \cdot 11 = 82$, противоречие. Значит, вершины w_1, w_2 несмежны. Так как вершина $y \in \Gamma_2(u)$ с $\mu(u, y) = 11$ несмежна не более чем с одной вершиной из $\{w_1, w_2\}$, то либо $\mu(u, z_j) = 12$ для двух вершин z_1,

$z_2 \in \Gamma_2(u)$, либо $\mu(u,z) = 12$ для единственной вершины $z \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u,y_j) = 11$ для двух вершин $y_1,\ y_2 \in \Gamma_2(u)$, либо $\mu(u,y_l) = 11$ для четырех вершин $y_1,\dots,y_4 \in \Gamma_2(u)$. Но в последнем для $y_i,\ y_j \in [w_2]$ ввиду леммы 1.1 имеем $\mu(w_1,y_i) = \mu(w_1,y_j) = 13$, противоречие. Таким образом, если $\mu(u,w_i) = 13$ для двух вершин $w_1,\ w_2 \in \Gamma_2(u)$, то выполняется утверждение (1).

Пусть $\mu(u,w) = 13$ для единственной вершины $w \in \Gamma_2(u)$. Как и выше $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$ не содержит вершин y с $\mu(u,y) = 11$. Поэтому $\mu(u,z_j) = 12$ для трех вершин $z_1, z_2, z_3 \in \Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$ и $\mu(u,y) = 11$ для единственной вершины $y \in \Gamma_2(u)$. В этом случае выполняется утверждение (2).

Пусть $\mu(u,w) \leqslant 12$ для любой вершины $w \in \Gamma_2(u)$. Тогда либо $\mu(u,w_i) = 12$ для пяти вершин $w_1,\dots,w_5 \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u,y_j) = 10$ для двух вершин $y_1,\ y_2 \in \Gamma_2(u)$, либо $\mu(u,w_i) = 12$ для четырех вершин $w_1,\dots,w_4 \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u,z_j) = 11$ для двух вершин $z_1,\ z_2 \in \Gamma_2(u)$, либо $\mu(u,w_i) = 12$ для трех вершин $w_1,\dots,w_3 \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u,z_j) = 11$ для четырех вершин $z_1,\ z_2 \in \Gamma_2(u)$. В этом случае выполняется утверждение (3). $\triangleright$

Лемма 2.7. *Если $k = 16$ и $v = 24$, то для $u \in \Gamma$ выполняются следующие утверждения:*

(1) *любые две вершины $z_1,\ z_2 \in \Gamma_2(u)$ с $\mu(u,z_i) = 11$ смежны (в частности, случай (3iii) невозможен);*

(2) *если $\mu(u,z) = 11$, то $\mu(u,w) = 12$, $\mu(w,z) = 11$ для $w \in \Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(z)$ (в частности, случай (1ii) невозможен);*

(3) *случай (1i) невозможен.*

$\triangleleft$ Допустим, что $\mu(u,z_i) = 11$ для двух несмежных вершин $z_1, z_2 \in \Gamma_2(u)$. Положим $\Delta = \{u, z_1, z_2\}$, $X_i = X_i(\Delta)$, $x_i = |X_i|$. Тогда $x_3 = 6$, $x_2 = 15$ и ввиду леммы 2.6 подграф $X_2 - [u]$ является двудольным графом $K_{2,3}$ или суммой одновершинного графа и $2K_2$ (как обычно, nK_m является обьединением n изолированных m-клик). В последнем случае каждое ребро из $X_2 - [u]$ попадает в окрестности z_1, z_2, единственной вершины из $X_2 - [u]$, трех вершин из $X_2 - [z_1]$, трех из $X_2 - [z_2]$ и одной вершины из X_3. Отсюда число треугольников с основанием в $X_2 - [u]$ и вершиной в X_3 равно 6. Противоречие с тем, что каждая вершина из X_3 смежна точно с 3 вершинами из $X_2 - [u]$ и число вышеуказанных треугольников не меньше 7.

Значит, каждый из подграфов $X_2 - [u]$, $X_2 - [z_1]$ и $X_2 - [z_2]$ совпадает с $K_{2,3}$ и каждое ребро из $X_2 - [u]$ попадает в окрестности точно двух вершин из X_3. Отсюда число треугольников с основанием в $X_2 - [u]$ и вершиной в X_3 равно 12. Поэтому 3-валентные вершины из $X_2 - [u]$ смежны с непересекающимися тройками из X_3, а 2-валентные вершины из $X_2 - [u]$ смежны с парами вершин в указанных тройках. С другой стороны, X_3 — это октаэдр и число треугольников с основанием в X_3 и вершиной в X_2 равно 60.

Если 3-валентная вершина из $X_2 - [u]$ смежна с треугольником из X_3, то число треугольников с основанием в X_3 и вершиной в $X_2 - [u]$ равно 18. Если же 3-валентная вершина из $X_2 - [u]$ смежна с 2-путем из X_3, то число треугольников с основанием в X_3 и вершиной в $X_2 - [u]$ не больше 19. В любом случае число треугольников с основанием в X_3 и вершиной в X_2 меньше 60. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\mu(u,z) = 11$ и $\mu(u,w) = 13$ для единственной вершины $w \in \Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(z)$. Тогда выполняется заключение (1) леммы 2.6 с заменой тройки u, w_1, w_2 на w, u, z. В этом случае $\Gamma_2(w) - (u^\perp \cup z^\perp)$ содержит 1 или 2 вершины. Противоречие с тем, что $\mu(u,z) = 11$. Если выполняется заключение (1ii) леммы 2.6, то вершина w_1 несмежна с вершиной $z \in \Gamma_2(u)$, имеющей $\mu(u,z) = 11$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Допустим, что $\mu(u,w_i)=13$ для двух вершин $w_1,\ w_2\in\Gamma_2(u)$. Положим $\Delta=\{u,w_1,w_2\}$, $X_i=X_i(\Delta)$, $x_i=|X_i|$. Тогда $x_3=10$, $x_2=9$ и $x_0=2$, причем подграф $X_2-[u]$ является треугольником, а X_0 является ребром $\{y_1,y_2\}$. Далее, $[y_i]$ содержит y_{3-i}, все 9 вершин из X_2 и 6 вершин из X_3. Противоречие с тем, что $[y_1]\cap[y_2]$ содержит 9 вершин из X_2 и не менее 2 вершин из X_3. $\rhd$

Из лемм 2.6, 2.7 следует, что при $k=16$, $v=24$ вторая окрестность любой вершины графа Γ изоморфна одному из трех графов:

(i) прямой сумме K_2 и 5-вершинного графа, содержащего четырехугольник и вершину, смежную с единственной вершиной четырехугольника;

(ii) прямой сумме K_2 и пятиугольника;

(iii) прямой сумме K_1 и 6-вершинного графа, содержащего 3-путь и ребро, каждая вершина которого несмежна с единственной неконцевой вершиной 3-пути.

Лемма 2.8. *Если $k=16$, $v=24$, то $\mu(u,y)=10$ не более чем для одной вершины $y\in\Gamma_2(u)$, в частности, для любой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ имеет тип (iii).*

$\lhd$ Пусть $\mu(u,y_i)=10$ для двух вершин $y_1,\ y_2\in\Gamma_2(u)$, $\{a\}=[u]-([y_1]\cup[y_2])$. Выберем вершину b из $([u]\cap[y_1])-[y_2]$. Тогда $[b]$ содержит 4 вершины из $([u]\cap[y_2])-[y_1]$, если b несмежна с a, 3 вершины, в противном случае. Отсюда число смежных с a вершин в подграфах $([u]\cap[y_1])-[y_2]$ и $([u]\cap[y_2])-[y_1]$ одно и то же. Поэтому $[a]$ содержит либо

(а) 2 вершины из $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$ и по 4 вершины из $([u]\cap[y_1])-[y_2]$, $([u]\cap[y_2])-[y_1]$, либо

(б) 4 вершины из $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$ и по 3 вершины из $([u]\cap[y_1])-[y_2]$, $([u]\cap[y_2])-[y_1]$, либо

(в) 0 вершин из $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$ и по 5 вершин из $([u]\cap[y_1])-[y_2]$, $([u]\cap[y_2])-[y_1]$.

Пусть $d\in[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$. Тогда $[d]$ содержит по 3 вершины из $([u]\cap[y_1])-[y_2]$, $([u]\cap[y_2])-[y_1]$ и из $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$, если d смежна с a, содержит по 4 вершины из $([u]\cap[y_1])-[y_2]$, $([u]\cap[y_2])-[y_1]$ и 2 из $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$, если d несмежна с a.

В случае (а) имеем $\mu(a,y_1)=\mu(a,y_2)=11$ и $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$ содержит вершину e с $\mu(e,a)=10$. Далее, $[e]\cap[a]$ содержит u, не пересекает $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$ и содержит по 3 вершины в каждом из подграфов $([u]\cap[y_1])-[y_2]$, $([u]\cap[y_2])-[y_1]$, $([y_1]\cap[y_2])-[u]$. С другой стороны, для смежной с a вершины $d\in[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$ подграф $[d]\cap[a]$ содержит u, по 3 вершины из $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$ и из $([y_1]\cap[y_2])-[u]$ и не менее 2 вершин в каждом из подграфов $([u]\cap[y_1])-[y_2]$, $([u]\cap[y_2])-[y_1]$. Противоречие с тем, что $\lambda(a,d)\geqslant 11$.

В случае (б) имеем $\mu(a,y_1)=\mu(a,y_2)=12$ и для несмежной с a вершины d из $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$ по строению $\Gamma_2(a)$ получим $\mu(a,d)=10$. С другой стороны, подграф $[d]\cap[a]$ содержит u, 2 вершины из $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$ и по крайней мере по 3 вершины в каждом из подграфов $([u]\cap[y_1])-[y_2]$, $([u]\cap[y_2])-[y_1]$, $([y_1]\cap[y_2])-[u]$. Противоречие с тем, что $\mu(a,d)=10$.

В случае (в) подграф $\Gamma_2(a)$ содержит ребро $\{y_1,y_2\}$, лежащее в пересечении окрестностей 5 вершин из $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$, Отсюда $\mu(a,y_1)=\mu(a,y_2)=10$ и $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$ является пятиугольником. Теперь для $d\in[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$ подграф $[d]$ содержит u, y_1, y_2, 2 вершины из $[u]\cap[y_1]\cap[y_2]$ и по 3 вершины в каждом из подграфов $([u]\cap[y_1])-[y_2]$, $([u]\cap[y_2])-[y_1]$, $([y_1]\cap[y_2])-[u]$. Противоречие с тем, что $|[d]|=16$. $\rhd$

Лемма 2.9. *Если $k=16$, то $v\neq 24$.*

$\lhd$ Пусть $v=24$. По лемме 2.8 для любой вершины u найдется единственная вершина u^* с $\mu(u,u^*)=10$. Поэтому множество вершин графа Γ разбивается 2-кокликами $C_1,\dots,C_{12}$ вида $\{x,x^*\}$. Так как каждая вершина из C_i смежна по крайней мере с одной вершиной в каждой коклике C_j для $i \neq j$, то вершина из C_i смежна с 2 вершинами в пяти кокликах и с 1 вершиной в шести.

Пусть $\mu(u,z_1) = \mu(u,z_2) = 11$, $\Delta = \{u, z_1, z_2\}$, $X_i = X_i(\Delta)$, $x_i = |X_i|$. Тогда $\Gamma_2(u) \cap ([z_1] \cup [z_2])$ является прямой суммой $\{u^*\}$ и 3-пути $w_3w_1w_2w_4$, где $w_3, w_4 \in X_2 - [u]$, $w_1 \in [z_2] - [z_1]$, $w_2 \in [z_1] - [z_2]$. Отсюда $x_3 = 7$, $X_2 - [z_1]$ и $X_2 - [z_2]$ содержат по 4 вершины, поэтому $X_1 \cap [u]$ содержит единственную вершину y. Каждая вершина из $X_2 - ([z_1] \cup [z_2])$ смежна с 4 вершинами из $\{u^*, w_1, \ldots, w_4\}$. Далее, $[u^*] - z_1^{\perp}$ содержит y, w_1 и 6 вершин из $X_2 \cap [u]$. Аналогично, $[w_3], [w_4]$ содержат по 7 вершин из $X_2 \cap [u]$ и по 4 вершины из X_3; $[w_1], [w_2]$ содержат по 6 вершин из $X_2 \cap [u]$ и по 5 вершин из X_3. Противоречие с тем, что $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u^*, y, z_1, z_2, не менее 4 вершин из $X_2 \cap [u]$ и по крайней мере 3 вершины из X_3. $\rhd$

3. Графы с $\mathbf{b_1 = 5}$ степени 14

В леммах 3.1–3.3 предполагается, что Γ — связный реберно регулярный граф с $b_1 = 5$ степени 14. Ввиду следствия из [2] связный граф Γ с $k = 3b_1 - 1$ либо является многоугольником или графом икосаэдра, либо имеет диаметр 2 и не более $2k$ вершин. Далее, дополнительный граф $\overline{\Gamma}$ является кореберно регулярным с параметрами $(v, \bar{k}, \bar{\mu})$, где $\bar{k} = v - k - 1$, $\bar{\mu} = v - k - 1 - b_1 = v - 20$. Если $\bar{\mu} = 0$, то граф Γ является полным многодольным. Если $\bar{\mu} = 1$, то по лемме 1.1.3 из [1] граф $\overline{\Gamma}$ сильно регулярен. Ввиду леммы 2.1 можно считать, что граф Γ не сильно регулярен, поэтому $\bar{\mu} \geqslant 2$ и $v \geqslant 22$. Так как $k = 14$, $\lambda = 8$ и $vk\lambda$ делится на 6, то v делится на 3.

Лемма 3.1. *Граф Γ имеет $v = 24$ вершин и выполняется следующие утверждения:*

(1) *если $\mu(u,y) = 6$ для двух несмежных вершин u, $y \in \Gamma$, то $\Gamma = u^{\perp} \cup y^{\perp}$, $[y] \cap [u]$ — октаэдр и $[u] \cap [y] \cap [z]$ — треугольник для любой вершины $z \in \Gamma_2(u) - \{y\}$, в частности, $\mu(u,z) = 8$;*

(2) *$\mu(u,w) \leqslant 10$ для любых несмежных вершин $u, w \in \Gamma$;*

(3) *если $\mu(u,w) = 10$ для $w \in \Gamma_2(u)$, то $\mu(u,z) < 10$ для любой вершины z из $\Gamma_2(u) - \{w\}$.*

$\lhd$ Так как $22 \leqslant v \leqslant 28$, то $v = 24$ или 27. Пусть $u \in \Gamma$. Тогда число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $kb_1 = 70$. Если $v = 27$, то по крайней мере 2 вершины из $\Gamma_2(u)$ смежны с 5 вершинами из $[u]$. Противоречие с утверждением (3) следствия 1 из [3].

Итак, $v = 24$. Для любых двух несмежных вершин u, y верно нестрогое неравенство $\mu(u,y) \geqslant 6$, причем в случае равенства имеем $\Gamma = u^{\perp} \cup y^{\perp}$. Далее, каждая вершина из $[u] \cap [y]$ смежна с 4 вершинами из $[u] - [y]$ и из $[y] - [u]$, поэтому подграф $[u] \cap [y]$ является регулярным графом степени 4, т. е. октаэдром. Через L_i обозначим множество вершин из $([u] - [y]) \cup ([y] - [u])$, смежных точно с i вершинами из $[u] \cap [y]$, и положим $l_i = |L_i|$. Тогда $\sum l_i = 16$, $\sum i l_i = 6 \cdot 8$ и $\sum \binom{i}{2} l_i \leqslant 12 \cdot 4$ (равенство достигается, если каждая вершина из $([u] - [y]) \cup ([y] - [u])$, смежных с кликой из $[u] \cap [y]$). Отсюда $\sum i^2 l_i \leqslant 144$ и $\sum l_i \sum i^2 l_i \leqslant (\sum i l_i)^2$. Ввиду леммы 1.8 $\sum l_i \sum i^2 l_i = (\sum i l_i)^2$ и каждая вершина из $([u] - [y]) \cup ([y] - [u])$ смежна с треугольником из $[u] \cap [y]$. Так как $[z] - y^{\perp}$ содержит 5 вершин из $[u]$ для $z \in \Gamma_2(u) - \{y\}$, то $\mu(u,z) = 8$. Утверждение (1) доказано.

Ввиду утверждения (1), если $\mu(u,w) > 8$ для некоторой вершины $w \in \Gamma_2(u)$, то $\mu(u,y) \neq 6$ для любой вершины $y \in \Gamma_2(u)$.

Допустим, что $\Gamma_2(u)$ содержит две вершины w, z с $\mu(u,w) = \mu(u,z) \geqslant 11$. Тогда число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u) - \{w, z\}$ не больше 48, противоречие с тем, что указанное число ребер не меньше 49.

Пусть $\mu(u,w) \geqslant 11$. Если $\Gamma_2(u) - w^\perp$ содержит вершину z с $\mu(u,z) = 7$, то ввиду леммы 1.1 получим $\mu(u,w) = \mu(w,z)$, противоречие. Значит, $\Gamma_2(u) - w^\perp$ не содержит вершин, смежных точно с 7 вершинами из $[u]$ и число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $11 + 5 \cdot 8 + 3 \cdot 7$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\mu(u,x_i) = 7$ для двух вершин $x_1, x_2 \in \Gamma_2(u) - w^\perp$. Ввиду леммы 1.1 имеем $\mu(u,w) = \mu(x_1,w) = \mu(x_2,w) = 10$. Противоречие с тем, что число ребер между вершинами из $\Gamma_2(w) - \{u,x_1,x_2\}$ и $[w]$ не меньше 42.

Пусть $\mu(u,w) = \mu(u,z) = 10$ для двух вершин w,z из $\Gamma_2(u)$ и $[w] \cap [z]$ содержит β вершин из $\Gamma_2(u)$. Если вершины w,z смежны, то $[w] \cap [z]$ содержит не менее 6 вершин из $[u]$ и $\beta \leqslant 1$. Далее, $|\Gamma_2(u) - (w^\perp \cup z^\perp)| = \beta + 1$ и число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u) - \{w,z\}$ не меньше $8(\beta+1) + 7 \cdot (6 - 2\beta) + 7 \cdot \beta = 50 + \beta$, противоречие.

Пусть вершины w, z несмежны. Так как каждый из подграфов $\Gamma_2(u) - w^\perp$ и $\Gamma_2(u) - z^\perp$ содержит не более 1 вершины x с $\mu(u,x) = 7$, то число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u) - \{w,z\}$ не меньше $8(\beta - 1) + 8(6 - 2\beta) + 7(\beta + 2) = 54 - \beta$. Поэтому $\beta \geqslant 4$. Если $\beta = 4$, то число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u) - \{w,z\}$ равно $8 \cdot 3 + 7 \cdot 4$, противоречие. $\rhd$

Лемма 3.2. *Для любой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ содержит либо*

(1) *две вершины x_1, x_2 с $\mu(u,x_1) = \mu(u,x_2) = 7$, $\mu(u,w) = 8$ для $w \in \Gamma_2(u) - \{x_1,x_2\}$ и каждый из подграфов $[u] \cap [x_1]$, $[u] \cap [x_2]$ и $[x_1] \cap [x_2]$ является дополнительным графом к семиугольнику, либо*

(2) *вершину y с $\mu(u,y) = 6$ и $\Gamma_2(u) - \{y\}$ является дополнительным графом к восьмиугольнику или к объединению двух четырехугольников, причем $[u] \cap [y] \cap [z]$ — треугольник для любой вершины $z \in \Gamma_2(u) - \{y\}$ и $\Gamma_2(y) - \{u\}$ также является дополнительным графом к восьмиугольнику или к объединению двух четырехугольников.*

$\lhd$ Допустим, что $\mu(u,w) = 10$. По лемме 3.1 получим $\mu(u,z) < 10$ для z из $\Gamma_2(u) - \{w\}$, поэтому $\mu(u,x) \neq 7$ для x из $\Gamma_2(u) - w^\perp$ и число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u) - \{w\}$ не меньше $8 \cdot 8$, противоречие. Значит, $\mu(u,z) < 10$ для любой вершины z из $\Gamma_2(u)$.

Пусть x_1, $x_2 \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(x_1,x_2) = 7$. Покажем, что тогда $\mu(u,x_i) = 7$ и каждый из подграфов $[u] \cap [x_1]$, $[u] \cap [x_2]$ и $[x_1] \cap [x_2]$ является дополнительным графом к семиугольнику. По лемме 1.1 имеем $\mu(u,x_1) = \mu(u,x_2)$. Если $\mu(u,x_1) = 7$, то $[u]$ содержит по 7 вершин из $[x_1] - [x_2]$ и из $[x_2] - [x_1]$ и не пересекает $[x_1] \cap [x_2]$. В этом случае окрестность каждой вершины из $[x_1] \cap [x_2]$ содержат по 4 вершины из $[x_1] - [x_2]$, $[x_2] - [x_1]$ и из $[x_1] \cap [x_2]$. Поэтому дополнительный граф для $[x_1] \cap [x_2]$ является семиугольником или объединением треугольника и четырехугольника. В последнем случае $[x_1] \cap [x_2]$ содержит такую 3-коклику $\{w_1,w_2,w_3\}$, что $[w_1] \cap [w_2] \cap [w_3]$ содержит пару изолированных ребер из $[x_1] \cap [x_2]$. Противоречие с тем, что $\mu(w_i,w_j) \geqslant 10$ для некоторых $i,j \in \{1,2,3\}$. Итак, в случае $\mu(u,x_1) = 7$ каждый из подграфов $[u] \cap [x_1]$, $[u] \cap [x_2]$ и $[x_1] \cap [x_2]$ является дополнительным графом к семиугольнику.

Пусть $\mu(u,x_1) = 8$. Тогда $[u]$ содержит по 6 вершин из $[x_1] - [x_2]$ и из $[x_2] - [x_1]$ и 2 вершины p, q из $[x_1] \cap [x_2]$. По лемме 1.1 степень каждой из вершин p, q в графе $[x_1] \cap [x_2]$ равна 5. Если вершины p,q несмежны, то $[p] \cap [q]$ содержит u, x_1, x_2, 5 вершин из $[x_1] \cap [x_2]$ и не менее 4 вершин из $[u]$, поэтому $\mu(p,q) \geqslant 12$, противоречие. Значит, вершины p,q смежны. Снова по лемме 1.1 степень p в графе $[u] \cap [x_1]$ равна 5. Противоречие с тем, что $[p] - x_2^\perp$ содержит u, x_1 и 4 вершины из $[u] \cap [x_1]$.

Пусть $\mu(u,x_1) = 9$. Тогда $[u]$ содержит по 5 вершин из $[x_1] - [x_2]$ и из $[x_2] - [x_1]$ и 4 вершины из $[x_1] \cap [x_2]$. Пусть a — вершина степени α в графе $[u] \cap [x_1] \cap [x_2]$. Тогда $[a]$ содержит $5 - \alpha$ вершин из $[x_1] \cap [x_2] - [u]$ и по крайней мере по $5 - \alpha$ вершин из $[u] \cap [x_1] - [x_2]$ и из $[u] \cap [x_2] - [x_1]$. Так как $|[a] \cap [u]| = 8$, то $\alpha \geqslant 2$. Если $\alpha = 2$, то $[a]$

содержит все 3 вершины из $[x_1] \cap [x_2] - [u]$, если же $\alpha = 3$, то $[a]$ содержит 2 вершины из $[x_1] \cap [x_2] - [u]$. В любом случае $[x_1] \cap [x_2] \cap [u]$ содержит 2 несмежных вершины p, q степени 2, причем $[p] \cap [q]$ содержит u, x_1, x_2, 5 вершин из $[x_1] \cap [x_2] \cap [u]$ и по вершине из $[u] \cap [x_1] - [x_2]$ и из $[u] \cap [x_2] - [x_1]$. Противоречие с тем, что $\mu(p, q) \geqslant 10$.

Пусть $u \in \Gamma$. Если $\Gamma_2(u)$ содержит вершину x с $\mu(u, x) = 7$, то выполняется утверждение (1). Если же $\Gamma_2(u)$ не содержит вершин, смежных точно с 7 вершинами из $[u]$, то число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $6 + 8 \cdot 8$. В этом случае по лемме 3.1 выполняется утверждение (2). $\rhd$

Лемма 3.3. *Если для вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ содержит вершину y с $\mu(u, y) = 6$, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *множество вершин графа Γ разбивается тремя $K_{4\times 2}$-подграфами Φ_1, Φ_2 и Φ_3;*

(2) *можно считать, что смежные вершины c, d из Φ_3 смежны с вершинами $a_1, \ldots, a_4$ из Φ_1 и с вершинами $b_1, \ldots, b_4$ из Φ_2, а смежные вершины e, f из $\Phi_3 - \{c, d, c^*, d^*\}$ смежны с вершинами a_1, a_2, a_3^*, a_4^* и с вершинами b_1, b_2, b_3^*, b_4^*, где для $x \in \Phi_i$ вершина x^* является антиподом x в Φ_i;*

(3) *можно считать, что a_1 смежна с b_1, b_3, b_2^*, b_4^*, a_2 смежна с b_2, b_4, b_1^*, b_3^*, a_3 смежна с b_1, b_2^*, b_3^*, b_4, a_4 смежна с b_1^*, b_2, b_3, b_4^* и граф Γ однозначно восстанавливается.*

$\lhd$ Допустим, что $\Gamma_2(u)$ содержит вершину y с $\mu(u, y) = 6$. Ввиду леммы 3.2 для любых несмежных вершин a, a^* из $[u] \cap [y]$ подграф $[a] \cap [a^*]$ не пересекает $[u] - [y]$ и $[y] - [u]$, поэтому $\mu(a, a^*) = 6$ и Γ содержит $K_{4\times 2}$-подграф, содержащий μ-подграфы своих пар несмежных вершин.

Если $\Gamma_2(w)$ содержит вершину z с $\mu(w, z) = 7$, то по лемме 3.2 в $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$ найдется единственная вершина x с $\mu(w, x) = \mu(z, x) = 7$ и коклика $\{w, z, x\}$ однозначно восстанавливается по любой своей вершине.

Так как 16 и 8 не делятся на 3, то множество вершин графа Γ разбивается тремя $K_{4\times 2}$-подграфами Φ_1, Φ_2 и Φ_3. Подсчитаем двумя способами число четверок $\{a, b, c, d\}$, где $a \in \Phi_1$, $b \in \Phi_2$ и $[a] \cap [b]$ содержит ребро $\{c, d\}$ из Φ_3. С одной стороны, для любых $u \in \Phi_1$, $w \in \Phi_2$ подграф $[u] \cap [w]$ содержит по треугольнику из Φ_1, Φ_2 и ребро из Φ_3, поэтому указанное число четверок равно 64. С другой стороны, число ребер в Φ_3 равно 24 и для ребра $\{c, d\}$ из Φ_3 подграф $[c] \cap [d]$ содержит 4 вершины из Φ_3 и либо

(а) по 2 вершины из Φ_1, Φ_2, либо

(б) 3 вершины из Φ_1 и одну из Φ_2, либо

(б') 3 вершины из Φ_2 и одну из Φ_1, либо

(в) 4 вершины из Φ_1 и ни одной из Φ_2, либо

(в') 4 вершины из Φ_2 и ни одной из Φ_1.

Заметим, что если ребро $\{c, d\}$ типа (в), то ребра $\{c, d^*\}$ и $\{c^*, d\}$ типа (в'), а ребро $\{c^*, d^*\}$ типа (в), где x^* — антипод вершины x в Φ_3. Аналогично, если ребро $\{c, d\}$ типа (б), то ребра $\{c, d^*\}$ и $\{c^*, d\}$ типа (б'), а ребро $\{c^*, d^*\}$ типа (б).

Пусть $\{c, d\}$ — ребро типа (в). Если $[c] \cap [d]$ содержит вершины $a_1, \ldots, a_4$ из Φ_1 и $[c] \cap [d^*]$ содержит вершины $b_1, \ldots, b_4$ из Φ_2, то $[c^*] \cap [d^*]$ содержит вершины $a_1^*, \ldots, a_4^*$ из Φ_1 и $[c^*] \cap [d]$ содержит вершины $b_1^*, \ldots, b_4^*$ из Φ_2. Пусть $e \in \Phi_3 - \{c, d, c^*, d^*\}$. Если $[e]$ содержит $a_1, \ldots, a_4$, то подграфы $[e] \cap [c^*]$ и $[e] \cap [d^*]$ не пересекают Φ_1. Поэтому $[e] \cap [c^*]$ и $[e] \cap [d^*]$ содержат по 4 вершины из Φ_2, противоречие с тем, что $[c^*] \cap [d^*]$ не пересекает Φ_2. Если $[e]$ содержит $a_1, \ldots, a_3, a_4^*$, то подграфы $[e] \cap [c^*]$ и $[e] \cap [d^*]$ содержат единственную вершину из Φ_1. Поэтому $[e] \cap [c^*]$ и $[e] \cap [d^*]$ содержат по 3 вершины из Φ_2 (две из которых попадают в $[c^*] \cap [d^*]$). Снова противоречие с тем, что $[c^*] \cap [d^*]$ не пересекает Φ_2. Итак, можно считать, что $[e]$ содержит a_1, a_2, a_3^*, a_4^* и b_1, b_2, b_3^*, b_4^*.

Пусть $f \in \Phi_3 - \{c, d, c^*, d^*, e, e^*\}$. Если $\{e, f\}$ ребро типа (в), то число ребер типов (б,б') равно 0, число ребер типов (в,в') равно 8 и число ребер типа (а) равно 16. Заметим, что $[c] - [c^*]$ содержит точно 2 вершины вне $a_i^{\perp}$. Если b_3, b_4 несмежны с a_1, то в графе $[e] - [e^*]$ вершины b_3^*, b_4^* несмежны с a, противоречие. Аналогично, если b_1, b_2 несмежны с a_1, то в графе $[e] - [e^*]$ вершины b_3^*, b_4^* смежны с a_1, снова противоречие. Без ограничения общности, вершина a_1 смежна с b_1, b_3, b_2^*, b_4^*. Так как $[a_1] \cap [a_2]$ содержит c, d, e, f, то a_2 смежна с b_2, b_4, b_1^*, b_3^*. Аналогично, $[a_3] \cap [a_4]$ содержит c, d, e^*, f^*, поэтому можно считать, что a_3 смежна с b_1, b_2^*, b_3^*, b_4 и a_4 смежна с b_1^*, b_2, b_3, b_4^*. В этом случае граф Γ однозначно восстанавливается.

Если $\{e, f\}$ ребро типа (б), скажем, вершины a_1, a_2, a_3^*, a_4 смежны с f, то число ребер типов (б,б') равно 12, число ребер типов (в,в') равно 4 и число ребер типа (а) равно 8. Противоречие с тем, что тогда вышеуказанное число четверок равно $8 \cdot 4 + 12 \cdot 3$.

Если $\{e, f\}$ ребро типа (а), то можно считать, что f смежна с a_1, a_2^*, a_3, a_4^*. В этом случае число ребер типов (б,б') равно 0, число ребер типов (в,в') равно 4 и число ребер типа (а) равно 20, противоречие с тем, что тогда вышеуказанное число четверок равно $20 \cdot 4$. $\rhd$

Ввиду леммы 3.3 можно считать, что для любой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ не содержит вершин y с $\mu(u, y) = 6$. Поэтому множесто вершин графа Γ разбивается восемью 3-кокликами $C_1, \ldots, C_8$, причем для различных i, j каждая вершина из C_i смежна с 2 вершинами в C_j, любые 2 вершины из C_i смежны точно с 1 вершиной в C_j. Рассмотрим граф Ω на множестве вершин графа Γ, в котором вершины a, b смежны, только если они лежат в разных кокликах C_i, C_j и несмежны в Γ. Тогда Ω — локально семиугольный граф, являющийся антиподальным 3-накрытием 8-клики. В [1, с. 386] отмечено, что существует единственный граф Ω с этими свойствами — граф Клейна. Наш граф Γ является дополнительным графом к графу $\Omega_{1,3}$ (где две вершины u, w смежны в графе $\Omega_{1,3}$, только если $d_\Omega(u, w) = 1$ или 3). Итак, в случае $b_1 = 5$, $k = 14$ выполняется утверждение (2) из заключения теоремы.

Литература

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs.—Berlin etc: Springer, 1989.—495 p.
2. *Махнев А. А., Минакова И. М.* Об одном классе реберно регулярных графов // Изв. Гомельского гос. ун-та.—2000.—Т. 3.—С. 145–154.
3. *Махнев А. А., Веденев А. А., Кузнецов А. Н., Носов В. В.* О хороших парах в реберно регулярных графах // Дискр. матем.—2003.—Т. 15.—С. 77–97.
4. *Дрожевский А. В., Ищенко П. В., Махнев А. А., Паметов П. Ю.* О почти хороших парах вершин в реберно регулярных графах // Тр. 34 Региональной молод. конф. ИММ УрО РАН «Проблемы теор. и приклад. матем.».—Екатеринбург, 2003.—С. 31–32.
5. *Махнев А. А.* О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискр. анализ и исслед. операций.—1996.—Т. 3, № 3.—С. 71–83.

Статья поступила 21 ноября 2008 г.

Казарина Вероника Игоревна
Уральский государственный технический университет,
радиотехнический факультет, *доцент*
РОССИЯ, 620066, Екатеринбург, ул. Мира 32

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
зав. отд. алгебры и топологии
РОССИЯ, 620219, Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`