Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 3, С. 40–45

УДК **517.98**

ТЕНЬ БИЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА[1]

М. А. Плиев

Рассматриваются формулы проектирования на тень билинейного регулярного оператора, а также на полосу, порожденную решеточным биморфизмом.

Ключевые слова: билинейные регулярные операторы, тень оператора, решеточный биморфизм.

Введение

В последние годы возрос интерес к исследованию билинейных операторов, действующих в векторных решетках [5, 6, 11]. Как и в линейном случае, важным инструментом, позволяющим изучать структуру пространств этих операторов является порядковое проектирование. Большое количество результатов в этом направлении известно для линейных и ортогонально аддитивных операторов [1–3, 7, 8, 10]. В этой связи возникает задача — распространить на билинейный контекст результаты о порядковом проектировании известные для линейных и ортогонально аддитивных операторов. Первый шаг в этом направлении сделан в [9]. Настоящая заметка продолжает этот круг исследований.

1. Предварительные сведения

1.1. Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию, обозначения и ввести необходимые понятия. Стандартный источник для ссылок по теории векторных решеток и решеточно нормированных пространств — монография [4].

Напомним, что отображение, действующее в векторных простанствах и зависящее от двух переменных называют *билинейным*, если оно линейно по каждой переменной при фиксировании другой переменной. На протяжении всего текста E, F и G — архимедовы векторные решетки. Билинейный оператор $T : E\times F \to G$ называют положительным, если $T(x,y) \geqslant 0$ для всех $x\in E_+$ и $y \in F_+$. Разность положительных билинейных операторов называют *регулярным* оператором. Билинейный оператор $T : E \times F \to G$ положителен тогда и только тогда, когда для любых $x \in E_+$ и $y \in F_+$ частичные операторы

$$T(x,\cdot) : y \mapsto T(x,y)\,(y\in F); \quad T(\cdot,y) : x \mapsto T(x,y) \quad (x \in E)$$

положительны. Через $B^r(E,F;G)$ и $B^r_+(E,F;G)$ обозначим соответственно множества регулярных и положительных билинейных операторов из $E\times F$ в G. Пусть E, F, G — векторные решетки, причем G порядково полна. Тогда векторное пространство $B_r(E,F;G)$ является порядково полной векторной решеткой, а решеточные операции имеют вид:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00622.

$$(T\vee S)(f,g)=\sup\Bigg\{\sum_{i=1}^{n}T(f_i^1,g_i)+S(f_i^2,g_i);\\ f\in E_+,\ g\in F_+;\ f_i^1+f_i^2=f,\ \forall\, i\in\{1,\dots,n\},\ \sum_{i=1}^{n}g_i=g;\ n\in\mathbb{N}\Bigg\}.$$

$$(T\wedge S)(f,g)=\inf\Bigg\{\sum_{i=1}^{n}T(f_i^1,g_i)+S(f_i^2,g_i);\\ f\in E_+,\ g\in F_+;\ f_i^1+f_i^2=f,\quad \forall\, i\in\{1,\dots,n\},\ \sum_{i=1}^{n}g_i=g;\ n\in\mathbb{N}\Bigg\}.$$

Билинейный оператор $T:\,E\times F\to G$ называется *решеточным биморфизмом*, если частичные линейные операторы $T(x,\cdot)$ и $T(\cdot,y)$ являются решеточными гоморфизмами, действующими в соответствующих пространствах. Порядковые проекторы, действующие как в векторных решетках, так и в пространствах операторов, будут обозначаться маленькими греческими буквами π, ρ и т. д. Из контекста всегда будет ясно о каких проекторах идет речь. Пусть A — некоторое подмножество элементов векторной решетки. Через π_A будем обозначать проектор на полосу $\{A\}^{\perp\perp}$.

2. Проектирование на полосу, порожденную решеточным бимоморфизмом

2.1. В настоящем пункте рассмотрим важное понятие, позволяющее вычислить проекцию положительного билинейного оператора на полосу, порожденныую решеточным биморфизмом.

Пусть E, F и G векторные решетки и G, кроме того, порядково полна. *Тенью* регулярного билинейного оператора $T\in B_r(E,F;G)$ называется множество

$$\mathscr{SH}(T):=\{S\in B_r(E,F;G):\,(\forall\,\rho\in\mathfrak{Br}(E)),\,(\forall\,\sigma\in\mathfrak{Br}(F)),\,\pi_{S(\rho E,\sigma F)}\leqslant\pi_{T(\rho E,\sigma F)}\}.$$

Как обычно булевы алгебры порядковых проекторов в пространствах E и F будут обозначаться $\mathfrak{Br}(E)$ и $\mathfrak{Br}(F)$ соответственно. Множества конечных разбиений единичных проекторов $\mathbf{1}_E$ и $\mathbf{1}_F$ будем обозначать $\mathrm{Prt}(E)$ и $\mathrm{Prt}(F)$ соответственно.

Теорема. *Для произвольного билинейного оператора $T\in B_r(E,F;G)$ имеют место следующие утверждения:*

1) *$\mathscr{SH}(T)$ — полоса в пространстве $B_r(E,F;G)$;*

2) *$\mathscr{SH}(T)=\mathscr{SH}(|T|)\supset T^{\perp\perp}$;*

3) *проекция оператора $S\in B_r^+(E,F;G)$ на полосу $\mathscr{SH}(T)$ вычисляется по формуле*

$$\pi_{\mathscr{SH}(T)}S=\inf\Bigg\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\pi_{T(\rho_kE,\sigma_lF)}S(\rho_k,\sigma_l);\\ (\rho_k)_{k=1}^{n}\in Prt(E),\,(\sigma_l)_{l=1}^{m}\in Prt(F);\,n,m\in\mathbb{N}\Bigg\}\qquad(1)$$

$\lhd$ Очевидно, что $\mathscr{SH}(T)$ будет векторным подпространством пространства $B_r(E,F;G)$. Пусть $S\in\mathscr{SH}(E,F;G)$ и $\rho\in\mathfrak{Br}(e)$, $\sigma\in\mathfrak{Br}(F)$, $x\in E^+$, $y\in F^+$. Тогда

$$S^+(\rho x,\sigma y)=\sup\Bigg\{\sum_{i=1}^{n}S(\rho x_i,\sigma y_i):\,0\leqslant x_i\leqslant x,\,0\leqslant y_i\leqslant y,\,\sum_{i=1}^{n}y_i=y;\,n\in\mathbb{N}\Bigg\}$$

и, следовательно,
$$\pi_{S^+(\rho x,\sigma y)} \leqslant \pi_{T(\rho E,\sigma F)}.$$
Таким образом, $\mathscr{SH}(T)$ — векторная подрешетка. Легко видеть, что $\mathscr{SH}(T)$ порядковый идеал. Пусть $0 \leqslant S_\alpha \uparrow S$ и $S_\alpha \in \mathscr{SH}(T)$. Тогда $\pi_{S(\rho x,\sigma y)} \leqslant \pi_{T(\rho E,\sigma F)}$. Таким образом, $\mathscr{SH}(E,F;G)$ является полосой.

Для операторов S, $T \in B_r(E,F;G)$, $S \leqslant T$ включение $\mathscr{SH}(S) \subset \mathscr{SH}(T)$ очевидно. Кроме того, T^+, $T^- \in \mathscr{SH}(T) \cap \mathscr{SH}(|T|)$. Отсюда получаем, что $\mathscr{SH}(T) = \mathscr{SH}(|T|)$. Если оператор $S \in \{|T|\}^{\perp\perp}$, то $S = \sup\{n|T| \wedge S\}$. Таким образом, для любых пар проекторов $\rho \in \mathfrak{Br}(E)$, $\sigma \in \mathfrak{Br}(F)$ и любых (x,y) $x \in E_+$, $y \in F_+$ справедлива формула
$$\pi_{S(\rho x,\sigma y)} = \sup\{\pi_{(n|T|\wedge S)(\rho x,\sigma y)}\} \leqslant \sup\{\pi_{n|T|(\rho x,\sigma y)}\} = \pi_{|T|(\rho x,\sigma y)}.$$
Таким образом, $\{|T|\}^{\perp\perp} \subset \mathscr{SH}(T)$ установлено. Пусть
$$R_T(S) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\pi_{T(\rho_k E,\sigma_l F)}S\circ(\rho_k\otimes\sigma_l); (\rho_k)_{k=1}^n \in \mathrm{Prt}(E),\ (\sigma_l)_{l=1}^m \in \mathrm{Prt}(F); m,n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Для доказательства утверждения (3) необходимо установить следующие факты:

a) $0 \leqslant R_T(S) \leqslant S$;

b) $R_T(R_T(S)) = R_T(S)$;

c) $R_T(S) = S \Leftrightarrow S \in \mathscr{SH}(T)$;

d) R_T — линейный оператор, действующий в пространстве $B_r(E,F;G)$.

Для любых разбиений $(\rho_k)_{k=1}^n \in \mathrm{Prt}(E)$, $(\sigma_l)_{l=1}^m \in \mathrm{Prt}(F)$ оператор $S(\rho_k,\sigma_l)$ является осколком оператора S. При измельчении разбиений (ρ_k) и (σ_l) этот осколок уменьшается. Таким образом, $R_T(S)$ будет пределом убывающей сети осколков $S(\rho_k,\sigma_l)$. Формула (a) очевидна. Для доказательства соотношения (c) рассмотрим следующую цепочку выражений:
$$\begin{gathered}R_T(S) = S \Leftrightarrow \forall\,(\rho_k)_{k=1}^n \in \mathrm{Prt}(E),\ \forall\,(\sigma_l)_{l=1}^m \in \mathrm{Prt}(F)\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\pi_{T(\rho_k E,\sigma_l F)}S\circ(\rho_k\otimes\sigma_l) = S\\ = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} S\circ(\rho_k\otimes\sigma_l)) \Leftrightarrow\ (\forall\rho \in \mathfrak{Br}(e)),\ (\forall\sigma \in \mathfrak{Br}(F))\,S(\rho,\sigma) =\\ = \pi_{T(\rho(E),\sigma(F))}S\circ(\rho\otimes\sigma) \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ (\forall\rho \in \mathfrak{Br}(e)),\ (\forall\sigma \in \mathfrak{Br}(F))\ \ \pi_{S(\rho(E),\sigma(F))} \leqslant \pi_{T(\rho(E),\sigma(F))}.\end{gathered}$$
Если T_1, $T_2 \leqslant 0$, то для произвольных разбиений (ρ''_k), $(\rho'_i) \in \mathrm{Prt}(E)$, (σ''_n) , $(\sigma'_m) \in \mathrm{Prt}(F)$ можем написать:
$$\begin{gathered}\sum\sum\pi_{T(\rho'_k E,\sigma'_l F)}S_1\circ(\rho'_k\otimes\sigma'_l)) + \sum\sum\pi_{T(\rho''_k E,\sigma''_l F)}S_2\circ(\rho''_k\otimes\sigma''_l))\\ \geqslant \sum\sum\pi_{T(\rho_k E,\sigma_l F)}(S_1+S_2)\circ(\rho_k\otimes\sigma_l))\\ = \sum\sum\pi_{T(\rho_k E,\sigma_l F)}S_1\circ(\rho_k\otimes\sigma_l)) + \sum\sum\pi_{T(\rho_k E,\sigma_l F)}S_2\circ(\rho_k\otimes\sigma_l)).\end{gathered}$$
Здесь под $(\rho_p) \in \mathrm{Prt}(E)$, $(\sigma_r) \in \mathrm{Prt}(F)$ понимаются разбиения более мелкие, чем (ρ''_k), (ρ'_i) и (σ''_n), (σ'_m). Переходя к инфинуму, получаем
$$R_T(S_1) + R_T(S_2) = R_T(S_1+S_2).$$

Докажем теперь формулу (b). Пусть $W = R_T(S)$ и $S \in B_r^+(E,F;G)$. Для любых $\rho \in \mathfrak{Br}(E)$, $\sigma \in \mathfrak{Br}(F)$ справедливо равенство:

$$W(\rho,\sigma) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\pi_{T(\rho_k E,\sigma_l F)}S\circ(\rho_k\otimes\sigma_l)(\rho,\sigma);\ (\rho_k)_{k=1}^n \in \mathrm{Prt}(E),\ (\sigma_l)_{l=1}^m \in \mathrm{Prt}(F)\right\}$$
$$= \inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\pi_{T(\rho_k E,\sigma_l F)}S\circ(\rho_k'\otimes\sigma_l');\sum_{k=1}^{n}\rho_k=\rho',\ \sum_{l=1}^{n}\sigma_l=\sigma'\right\}.$$

Таким образом, $W(\rho,\sigma) \leqslant \pi_{T(\rho(E),\sigma(F))}S(\rho,\sigma)$ для любых $\rho \in \mathfrak{Br}(E)$, $\sigma \in \mathfrak{Br}(F)$. Это означает, что $S \in \mathscr{SH}(T)$. Используя уже доказанное утверждение (c), получаем, что $W = R_T(V)$. $\rhd$

2.2. Векторная решетка E называется *пространством Рисса — Фрейденталя* ($E \in \mathscr{RF}$), если для любых $\varepsilon > 0$, $e \in E^+$, $x < e$ существуют $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\rho_i \in \mathfrak{Br}(E)$, $i = 1,\dots,n$, такие, что имеет место формула

$$\left|x - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\rho_i e\right| \leqslant \varepsilon e.$$

Пусть $E \in \mathscr{RF}$. Это означает, что дизъюнктные элементы в E можно разделить проекторами. Иначе говоря, для любого $x \in E$ найдется $\rho \in \mathfrak{Br}(E)$ такой, что $x^+ = \rho x$. Для решеточного биморфизма T, действующего в паре пространств Рисса — Фрейденталя, полосу $\mathscr{SH}(T)$ удается описать более точно.

Теорема. *Пусть $E, F \in \mathscr{RF}$, G — K-пространство. Тогда для любого решеточного биморфизма $T \in B_r(E,F;G)$ выполнено равенство $\mathscr{SH}(T) = \{T\}^{\perp\perp}$. Кроме того, для любого оператора $S \in B_r^+(E,F;G)$ справедливы формулы проектирования:*

$$\pi_T(S) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\pi_{T(\rho_k E,\sigma_l F)}S\circ(\rho_k\otimes\sigma_l);(\rho_k)_{k=1}^n \in Prt(E),\ (\sigma_l)_{l=1}^m \in Prt(F)\right\}; \quad (2)$$

$$\pi_T(S)(x,y) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\pi_{T(\rho_k e,\sigma_l f)}S(\rho_k x,\sigma_l y);(\rho_k)_{k=1}^n \in Prt(E),\ (\sigma_l)_{l=1}^m \in Prt(F)\right\}; \quad (3)$$
$$(0 \leqslant x \leqslant e,\ 0 \leqslant y \leqslant f).$$

$\lhd$ Прежде всего отметим, что для любого оператора $S \in \mathscr{SH}(T)$ справедлива формула

$$S(\rho,\sigma) = \pi_{T(\rho(E),\sigma(F))}S; \quad \rho \in \mathfrak{Br}(E), \quad \sigma \in \mathfrak{Br}(F). \quad (4)$$

Действительно,

$$\pi_{T(\rho(E),\sigma(F))}S(x,y) = \pi_{T(\rho(E),\sigma(F))}(S(\rho x,\sigma y)$$
$$+ S(\rho^\perp x,\sigma y) + S(\rho x,\sigma^\perp y) + S(\rho^\perp x,\sigma^\perp y)) = S(\rho x,\sigma y).$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что справедлива цепочка неравенств

$$\pi_{S(\rho x,\sigma y)} \leqslant \pi_{(\rho(E),\sigma(F))}; \quad \pi_{S(\rho^\perp x,\sigma y)} \leqslant \pi_{T(\rho^\perp(E),\sigma(F))};$$
$$\pi_{S(\rho x,\sigma^\perp y)} \leqslant \pi_{T(\rho(E),\sigma^\perp(F))}; \quad \pi_{S(\rho^\perp x,\sigma^\perp y)} \leqslant \pi_{T(\rho^\perp(E),\sigma^\perp(F))}$$

и проекторы $\pi_{T(\rho(E),\sigma(F))}$, $\pi_{T(\rho^\perp(E),\sigma(F))}$, $\pi_{T(\rho(E),\sigma^\perp(F))}$, $\pi_{T(\rho^\perp(E),\sigma:^\perp(F))}$ попарно дизъюнктны. Пусть $S \in \mathscr{SH}^+(T)$ и $T \wedge S = 0$. Для произвольных $e \in E^+$, $f \in F^+$ и $\rho \in \mathfrak{Br}(E)$, $\sigma \in \mathfrak{Br}(F)$ справедлива формула

$$T(e,f) \wedge S(e,f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \pi_{T(\rho_i^1(E),\sigma_i(F))} T(e,f) + \pi_{T(\rho_i^2(E),\sigma_i(F))} S(e,f);$$
$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\}\ (\rho_i^j)_{j=1}^2 \in \mathrm{Prt}(E);\ (\sigma_i)_{i=1}^n \in \mathrm{Prt}(F).$$

Используя теперь формулу (4), имеем

$$T(e,f) \wedge S(e,f) \leqslant \inf_{(\rho_i^j),(\sigma_i)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \pi_{T(\rho_i^1(E),\sigma_i(F))} T(e,f) + \pi_{T(\rho_i^2(E),\sigma_i(F))} S(e,f) \right\}$$
$$= \inf_{(\rho_i^j),(\sigma_i)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} T(\rho_i^1 e, \sigma_i f) + S(\rho_i^2 e, \sigma_i f) \right\} = (T \wedge S)(e,f).$$

Тем самым для любых $x \in E_+$, $y \in F_+$ и $u > x$, $v > y$ будет $S(x,y) \wedge T(u,v) = 0$, что означает $S(x,y) = \pi_{T(E,F)} S(x,y) = 0$. Отсюда получаем, что $\mathscr{SH}(T) = \{T\}^{\perp\perp}$. Формула (2) есть следствие теоремы 2.1. Пусть $0 \leqslant x \leqslant e$, $0 \leqslant y \leqslant f$. Справедлива следующая цепочка равенств

$$\pi_{T(e,f)} \pi_{T(\rho_k(E),\sigma_l(F))} = \pi_{T(\rho_k e,\sigma_l f)} \pi_{T(\rho_k(E),\sigma_l(F))} + \pi_{T(\rho_k^\perp e,\sigma_l f)} \pi_{T(\rho_k(E),\sigma_l(F))}$$
$$+ \pi_{T(\rho_k e,\sigma_l^\perp f)} \pi_{T(\rho_k(E),\sigma_l(F))} + \pi_{T(\rho_k^\perp e,\sigma_l^\perp f)} \pi_{T(\rho_k(E),\sigma_l(F))} = \pi_{T(\rho_k(e),\sigma_l(f))}.$$
$$\pi_{T(e,f)} \pi_T S(x,y) = \sup_n \pi_{nS(e,f)} (nT \wedge S)(x,y) = \sup_n (nT \wedge S)(x,y) = \pi_T S(x,y).$$

Теперь можем написать

$$\pi_T S(x,y) = \pi_{T(e,f)} \pi_T S(x,y) = \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \pi_{T(e,f)} \pi_{T(\rho_k E,\sigma_l F)} S(\rho_k x, \sigma_l y) \Big\}$$
$$= \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \pi_{T(\rho_k e,\sigma_l f)} S(\rho_k x, \sigma_l y) \Big\}; \qquad (\rho_k)_{k=1}^n \in \mathrm{Prt}(E),\ (\sigma_l)_{l=1}^m \in \mathrm{Prt}(F). \ \rhd$$

Литература

1. *Колесников Е. В.* Разложение положительного оператора // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 77–79.
2. *Колесников Е. В.* Несколько порядковых проекторов, порржденных идеалами векторной решетки // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 6.—С. 1342–1349.
3. *Колесников Е. В.* В тени положительного оператора // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 3.—С. 592–598.
4. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
5. *Кусраев А. Г.* Ортосимметричные билинейные операторы в векторных решетках // Исследования по современному анализу и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 186–225.
6. *Кусраев А. Г., Шотаев Г. Н.* Билинейные мажорируемые операторы // Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2004.—С. 241–262.
7. *Плиев М. А.* Проекция положительного оператора Урысона // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 4.—С. 22–39.

8. *Плиев М. А.* Порядковое проектирование в пространствах операторов Урысона // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 8, вып. 4.—С. 22–39.
9. *Плиев М. А., Табуев С. Н.* О проекциях положительного билинейного оператора // Исследования по математическому анализу.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 166–176.
10. *Aliprantis S. D., Burkinshaw O.* The components of the positive operator // Math. Z.—1983.—Vol. 184, № 2.—P. 245–257.
11. *Bu Q., Buskes G., Kusraev A. G.* Bilinear maps on products of the vector lattices: A survey // Positivity / Eds. Boulabiar K., Buskes G., Triki A.—Basel a.o.: Birkhauser, 2007.—P. 97–126.

Статья поступила 3 декабря 2007 г.

Марат Амурханович Плиев
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
362027, Владикавказ, РОССИЯ
E-mail: plimarat@yandex.ru