Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 3, С. 34–39

УДК **532(0758)**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ВОДОХРАНИЛИЩЕ УЗКО-КАНЬОННОГО ТИПА

Н. И. Музаев, И. Д. Музаев

В статье поставлена и аналитически решена начально-краевая задача поверхностных гравитационных волн в водохранилище узко-каньонного типа. Поверхностные волны образуются в результате вторжения в заполненное водохранилище обвально-оползневого массива горной породы либо селелавинообразного потока. В результате решения поставленной задачи получены расчетные формулы и алгоритм численного расчета амплитуды образованных волн.

Ключевые слова: узко-каньонное водохранилище, селелавинообразный поток, гравитационные волны, начально-краевая задача, преобразование Лапласа, операционное исчисление.

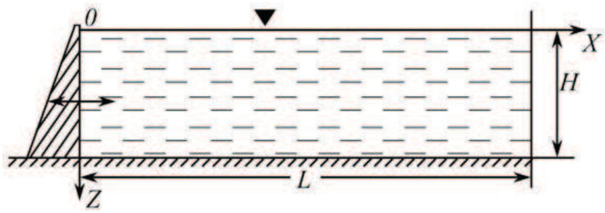
Как правило, водохранилища в горных местностях строятся в сильно зауженных каньонах ущелий рек. В них часто вторгаются селелавинообразные потоки либо обвально-оползневые массивы. В результате вторжения с большими скоростями в водохранилищах и хвостохранилищах образуются высокие гравитационные волны, часто приводящие к большим стихийным и экологическим бедствиям в виде разрушений, человеческих жертв и загрязнений окружающей водохранилище территории веществами, годами накопленных в хвостохранилищах горно-обогатительных предприятий. В связи с этим проектировщики и эксплуатационные службы обязаны оценивать потенциально возможное повышение уровня воды у плотины и объем перелитой воды через створ плотины, а также зону и степень затопления и загрязнения местности в нижнем бьефе в зависимости от геометрических, кинематических и динамических характеристик потенциально возможных обвально-оползневых масс, селе и лавинообразных потоков. Таким путем можно спрогнозировать, а затем предотвратить либо уменьшить те последствия и ущерб, которые может вызвать образование разрушительных волн.

Однако, надо отметить, что до настоящего времени не существует доступного проектировщикам и эксплуатационным службам надежного метода и формулы для вычисления амплитуд образованных волн в водохранилищах узко-каньонных типов, характеризующихся большими глубинами воды и непризматическими конфигурациями.

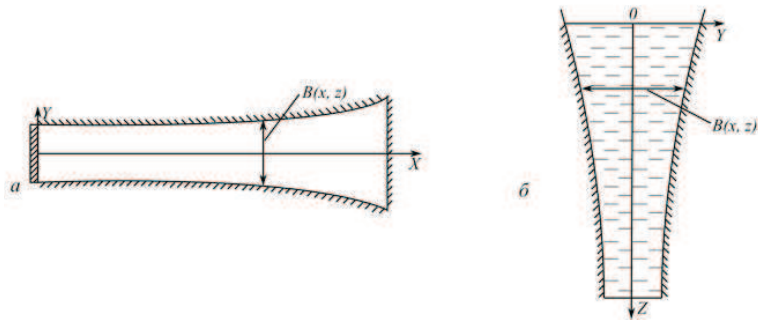
В настоящей статье дается попытка заполнить этот пробел путем постановки и решения начально-краевой задачи волновой гидродинамики и гидравлики, в которой наиболее адекватно отражены гидродинамические и гидравлические процессы, имеющие место при отмеченных выше стихийных явлениях, а также геометрическая конфигурация водохранилища.

Предположим, что в прямоугольной системе координат $Oxyz$ часть пространства, ограниченная условиями $0 \leqslant x \leqslant L$, $-B(x,z)/2 < y < B(x,z)/2$, $-H \leqslant z \leqslant 0$, представляет узко-глубокое непризматическое водохранилище, расположенное в горном регионе.

Ось oz направлена вертикально вверх, H — глубина воды в водохранилище, L — длина, $B(x, z)$ — ширина водохранилища. На рисунке ниже представлены поперечный профиль и плановое очертание водохранилища.



Расчетная схема поставленной задачи



Плановая (а) и глубинная (б) конфигурации водохранилища

Рассмотрим волновое движение воды, вызванное тем, что с боковой грани водохранилища в него вторгается обвально-оползневой массив горной породы либо селелавинообразный поток. Считая движение воды безвихревым, потенциал средней по ширине водохранилища скорости должен удовлетворять следующему дифференциальному уравнению [1–3]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{B(x,z)} \frac{\partial B(x,z)}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{B(x,z)} \frac{\partial B(x,z)}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{q(x,z,t)}{B(x,z)}, \tag{1}$$

где $q(x, z, t)$ — скорость вытеснения воды обвально-оползневым массивом либо интенсивность вторжения в водохранилище селелавинообразного потока.

Через единичную функцию Хевисайда интенсивность $q(x, z, t)$ аналитически выражается следующим образом:

$$\begin{gathered} q(x,z,t) = U_0 \big[1(x-(x_0-a)) - 1(x-(x_0+a))\big] \\ \times \left[1\left(z+z_0+\frac{h}{2}\right) - 1\left(z+z_0-\frac{h}{2}\right)\right] \big[1(t) - 1(t-t_0)\big], \end{gathered} \tag{2}$$

где $2a$ — ширина по фронту обвально-оползневого массива, x_0 — абсцисса ее центра, h — мощность обвально-оползневого массива либо глубина селелавинообразного потока, t_0 — продолжительность времени вторжения.

Средняя скорость вторжения вычисляется так:

$$U_0 = \frac{W_0}{2aht_0}, \tag{3}$$

где W_0 — объем вторгшегося массива либо селелелавинообразного потока.

В соответствии с физико-механической сущностью задачи, для дифференциального уравнения (1) ставятся следующие начальные и граничные условия [1–3]:

$$\varphi(x,z,t)|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial\varphi(x,z,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi(x,z,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial\varphi(x,z,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0, \tag{5}$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2\varphi(x,z,t)}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi(x,z,t)}{\partial z}\right)\right|_{z=0}=0, \quad \left.\frac{\partial\varphi(x,z,t)}{\partial z}\right|_{z=-H}=0. \tag{6}$$

Дифференциальное уравнение (1), начальные условия (4), граничные условия (5) и (6) в совокупности представляют начально-краевую задачу математической физики и математически моделируют волновое движение воды в узко-глубоком непризматическом водохранилище, когда волны образуются в результате вторжения в водохранилище обвально-оползневого массива либо селелавинообразного потока. Непризматическая конфигурация водохранилища в плане и по глубине в составленной модели отражены через ширину водохранилища, т. е. через функцию $B(x,z)$, которая зависит как от продольной горизонтальной координаты x, так и от вертикальной координаты z.

Коэффициенты дифференциального уравнения (1) являются переменными, и это создает большие математические трудности при попытке аналитического решения поставленной начально-краевой задачи.

Надо отметить, что дифференциальное уравнение (1) впервые получено в работе [4]. В классической линейной теории поверхностных гравитационных волн потенциал скорости должен удовлетворять дифференциальному уравнению Лапласа как для пространственных, так и для двумерных волн [2–4], см. также [5]. В представленной модели (1)–(6) описываются средние по ширине трехмерные волны, т. е. фактически двумерные волны. Научной новизной этой модели является то, что в нее в гидродинамико-гидравлическом приближении через функцию $B(x,z)$ увязаны наиболее характерные параметры естественного очертания водохранилища узко-каньонного типа.

Приступив к решению начально-краевой задачи, вначале принимаются некоторые предположения, упрощающие путь ее решения. Так, например, будем полагать, что ширина водохранилища аппроксимируется следующей экспоненциальной функцией

$$B(x,z)=B_0e^{s_1x+s_2z}. \tag{7}$$

Кроме этого в дальнейшем будем полагать, что

$$q(x,z,t)=q_1(x)\cdot q_2(z)\cdot q_3(t), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} q_1(x)&=\begin{cases}1, & x_0-a<x<x_0+a,\\ 0, & 0<x<x_0-a,\ x_0+a<x<L;\end{cases}\\ q_2(z)&=\begin{cases}1, & -z_0-\frac{h}{2}<z<-z_0+\frac{h}{2},\\ 0, & -H<z<-z_0-\frac{h}{2},\ -z_0+\frac{h}{2}<z<0;\end{cases}\\ q_3(t)&=\begin{cases}U_0, & 0<t<t_0,\\ 0, & t>t_0.\end{cases}\end{aligned} \tag{9}$$

В результате применения подстановки

$$\varphi(x,z,t)=\psi(x,z,t)e^{-\frac{s_1}{2}x-\frac{s_2}{2}z}, \tag{10}$$

начально-краевая задача (1)–(10) относительно функции $\psi(x,z,t)$ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\left(\frac{s_1^2}{4}+\frac{s_2^2}{4}\right)\psi=\frac{q_1(x)q_2(z)q_3(t)}{B_0}\,e^{-\frac{s_1}{2}x-\frac{s_2}{2}z}, \tag{11}$$

$$\psi=\frac{\partial\psi}{\partial t}=0,\qquad t=0,$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{s_1}{2}\psi\right)\bigg|_{x=0}=0,\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{s_1}{2}\psi\right)\bigg|_{x=L}=0, \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\psi}{\partial z}-g\frac{s_2}{2}\psi\right)\bigg|_{z=0}=0,\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{s_2}{2}\psi\right)\bigg|_{z=-H}=0.$$

Введем функцию $\Phi(x,z,t)$ и дифференциальные операторы D, D_1, D_2

$$\Phi(x,z,t)=\frac{\partial\psi(x,z,t)}{\partial x}-\frac{s_1}{2}\psi, \tag{13}$$

$$D=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\left(\frac{s_1^2}{4}+\frac{s_2^2}{4}\right), \tag{14}$$

$$D_1=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+g\frac{\partial}{\partial z}-g\frac{s_2}{2}, \tag{15}$$

$$D_2=\frac{\partial}{\partial z}-\frac{s_2}{2}. \tag{16}$$

Применив линейные дифференциальные операторы D, D_1, D_2 последовательно к обеим частям (13) и учитывая выражения (11)–(12) относительно введенной функции $\Phi(x,z,t)$, получим:

$$D[\Phi]=\frac{q_2(z)}{B_0}q_3(t)e^{-\frac{s_2}{2}z}\left[\frac{d}{dx}\left(q_1(x)e^{-\frac{s_1}{2}x}\right)-\frac{s_1}{2}q_1(x)e^{-\frac{s_1}{2}x}\right], \tag{17}$$

$$\Phi\big|_{x=0}=0,\quad \Phi\big|_{x=L}=0, \tag{18}$$

$$D_1[\Phi]\big|_{z=0}=0,\quad D_2[\Phi]\big|_{z=-H}=0. \tag{19}$$

Для решения начально-краевой задачи (17)–(19) последовательно применяются интегральное преобразование Лапласа по времени t и разложение в ряды Фурье по переменной x в интервале $(0,L)$

$$\widetilde{\Phi}(x,z)=\int\limits_0^{+\infty}\Phi(x,z,t)e^{-pt}dt, \tag{20}$$

$$\widetilde{\Phi}(x,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\Phi}_n(z)\sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{21}$$

Для функции $\widetilde{\Phi}_n(z)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение с двумя граничными условиями

$$\frac{d^2\widetilde{\Phi}_n}{dz^2}-\lambda_n^2\widetilde{\Phi}_n=\frac{\widetilde{q}_3}{B_0}q_2(z)e^{-\frac{s_2}{2}z}\alpha_n, \tag{22}$$

$$\left[\left(p^2-g\frac{s_2}{2}\right)\widetilde{\Phi}_n+g\frac{d\widetilde{\Phi}_n}{dz}\right]\bigg|_{z=0}=0,\quad \left(\frac{d\widetilde{\Phi}_n}{dz}-\frac{s_2}{2}\widetilde{\Phi}_n\right)\bigg|_{z=-H}=0, \tag{23}$$

где

$$\lambda_n = \sqrt{a_n^2 + \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{4}}, \quad a_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad \alpha_n = \frac{2U_0}{L}\int\limits_{x_0-a}^{x_0+a} e^{-\frac{s_1}{2}x}\sin a_n x\, dx. \tag{24}$$

В результате решения краевой задачи (22)–(23) определяется функция $\widetilde{\Phi}_n(z)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Далее обратным ходом сначала определяется функция $\widetilde{\Phi}_n(x,z)$ из (21), а затем ее оригинал $\Phi(x,z,t)$. При этом для определения оригинала достаточно таблицы операционного исчисления. После определения $\Phi(x,z,t)$ из выражения (13), как из обыкновенного дифференциального уравнения, определяется функция $\psi(x,z,t)$. Наконец, при известной функции $\psi(x,z,t)$ из выражения (10) определится потенциал скорости $\varphi(x,z,t)$ и, следовательно, поставленная начально-краевая задача решена.

Уравнение волновой поверхности получается дифференцированием потенциала по времени

$$\eta(x,t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x,z,t)}{\partial t}\bigg|_{z=0}.$$

Окончательно для уравнения свободной волновой поверхности получаются следующие выражения:

$$\eta(x,t) = e^{-\frac{s_1}{2}x}\left[\frac{s_1}{2}\frac{w(t)}{B_0 e^{\frac{s_1}{2}L} - 1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n K_n\left(\frac{s_1}{2}\sin a_n x + a_n\cos a_n x\right)}{\left(1 + \frac{s_2}{2\lambda_n}\operatorname{th}\lambda_n H\right)\left(\lambda_n^2 - \frac{s_2^2}{4}\right)} f_n(t)\right], \tag{25}$$

где

$$\begin{gathered} K_n = \frac{\alpha_n}{2B_0\lambda_n^2}\left[e^{-\left(\lambda_n - \frac{s_2}{2}\right)\left(z_0 + \frac{h}{2}\right)} - e^{-\left(\lambda_n - \frac{s_2}{2}\right)\left(z_0 - \frac{h}{2}\right)}\right. \\ \left. - e^{-\left(2\lambda_n H - \left(\lambda_n + \frac{s_2}{2}\right)\left(z_0 + \frac{h}{2}\right)\right)} + e^{-\left(2\lambda_n H - \left(\lambda_n + \frac{s_2}{2}\right)\left(z_0 - \frac{h}{2}\right)\right)}\right]\frac{2}{1 + e^{-2\lambda_n H}}, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\left[e^{-\frac{s_1}{2}(x_0 - a)}\sin a_n(x_0 - a) - e^{-\frac{s_1}{2}(x_0 + a)}\sin a_n(x_0 + a)\right], \tag{27}$$

$$f_n(t) = \begin{cases} U_0 \sin\gamma_n t, & 0 < t < t_0, \\ 2U_0\sin\gamma_n\frac{t_0}{2}\cos\gamma_n\left(t - \frac{t_0}{2}\right), & t \geqslant t_0; \end{cases} \tag{28}$$

$$w(t) = \begin{cases} 2ahU_0 t, & 0 < t < t_0, \\ 2ahU_0 t_0, & t > t_0; \end{cases} \tag{29}$$

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{g\lambda_n\left(\operatorname{th}\lambda_n H + \frac{s_2}{2\lambda_n}\right) - \frac{gs_2}{2}\left(1 + \frac{s_2}{2\lambda_n}\operatorname{th}\lambda_n H\right)}{1 + \frac{s_2}{2\lambda_n}\operatorname{th}\lambda_n H}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{30}$$

Полученные расчетные выражения (25)–(30) легко реализуются на ЭВМ. Результаты численных экспериментов позволяют определить амплитуды образованных волн в водохранилище в зависимости от геометрических габаритов водохранилища и от кинематических и динамических характеристик вторгшегося селелавинообразного потока либо обвально-оползневого массива.

Литература

1. *Ламб Г.* Гидродинамика.—М.: Гостехиздат, 1948.—928 с.
2. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде.—М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.—617 с.
3. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости.—М.: Наука, 1977.—815 с.
4. *Музаев И. Д., Созанов В. Г.* К теории поверхностных гравитационных волн Коши — Пуассона в узко-глубоких непризматических водоемах // Изв. вузов, Сев.-Кав. регион. Сер. Ест. науки.—Ростов-на Дону, 1995.—№ 3.—С. 40–43.
5. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях.—М.: Мир, 1981.—598 с.

Статья поступила 24 декабря 2007 г.

Музаев Илларион Давыдович
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
Владикавказ, 362027, РОССИЯ
E-mail: `muzaevid@mail.ru`

Музаев Нугзар Илларионович
Северо-Кавказский горно-
металлургический институт (ГТУ)
Владикавказ, 362021, РОССИЯ