Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 3, С. 23–28

УДК **517.927**

К ВОПРОСУ О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Р. Ч. Кулаев

В работе устанавливаются необходимое и достаточное условия достижения собственным значением краевой задачи на геометрическом графе своего максимального значения.

Ключевые слова: граф, дифференциальное уравнение, геометрическая кратность собственного значения, собственная функция.

Последние десятилетия характеризуются довольно бурным развитием теории дифференциальных уравнений на сетях. Подобные задачи возникают при изучении эволюционных процессов в упругих сетках, при моделировании гидросетей, электрических и нейронных сетей.

В настоящей работе рассматривается спектральная краевая задача для дифференциального оператора второго порядка, заданного на геометрическом графе [1]. Ранее [1, с. 31] была установлена оценка геометрической кратности собственных значений краевой задачи на графе. Доказано, что геометрическая кратность любого собственного значения не превосходит числа $n-1$, где n — количество граничных вершин графа. В данной работе в терминах поведения собственных функций описываются необходимое и достаточное условия при которых геометрическая кратность собственного значения равна $n-1$.

1. Основные понятия и обозначения

Начнем с описания основных терминов и обозначений используемых ниже (более подробно см. [1]).

Прежде всего дадим определения графа и функции, заданной на графе. Пусть дано конечное множество попарно непересекающихся открытых отрезков $\{\gamma_i\}_1^m$ пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через V множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, которые являются концевыми точками двух и более интервалов. Объединение всех точек интервалов γ_i и множества V обозначим через Γ и будем называть геометрическим графом (в дальнейшем просто «графом»). При этом интервалы γ_i будем называть ребрами графа Γ, а точки множества V — его внутренними вершинами. Концевые точки ребер графа не принадлежащие V будем называть граничными вершинами графа Γ. Совокупность всех граничных вершин обозначим через $\partial\Gamma$. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i, то будем говорить, что ребро γ_i примыкает к вершине a. Если обе вершины a и b, к которым примыкает ребро γ, внутренние, то ребро γ будем называть внутренним. В противном случае, когда хотя бы одна из вершин a и b граничная, ребро γ назовем граничным. Множество индексов всех ребер, примыкающих к внутренней вершине a обозначим $I(a)$, а число таких ребер обозначим через $d(a)$. Маршрут графа, соединяющий вершины a и b , будем обозначать $\Gamma(a,b)$ Всюду далее полагаем, что граф Γ является связным множеством в $\mathbb{R}^n$ и не содержит циклических маршрутов.

Будем рассматривать вещественнозначные функции у которых переменная имеет областью своего изменения граф Γ. Для таких функций примем обозначение $u = u(x)$, $x \in \Gamma$, а через u_i будем обозначать сужение функции u на ребро γ_i, т. е. $u_i(x) = u(x)$ при $x \in \gamma_i$, $u_i(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma \backslash \gamma_i$. Везде ниже полагаем, что все рассматриваемые функции $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ непрерывны на всем графе и равномерно непрерывны на каждом ребре графа. Далее, если a — произвольная вершина (граничная или внутренняя) графа Γ, то под $u_i(a)$ понимается $\lim\limits_{x \to a} u_i(x)$, $x \in \gamma_i$.

Дифференцирование функций по переменной $x \in \Gamma$ внутри каждого ребра $\gamma \in \Gamma$ осуществляется по параметру, причем подразумевается, что для этого ребро параметризовано в одном из двух возможных направлений, т. е.

$$u'(x_0) = \frac{d}{ds} \left(b + s\frac{a-b}{\|a-b\|} \right) \Bigg|_{s=s_0}, \quad x_0 \in \gamma = (a,b), \quad s_0 = \|x_0 - b\|,$$

при ориентации «от b к a».

Под дифференциальным выражением 2-го порядка на графе будем понимать выражение вида

$$A(x)\frac{d^2u}{dx^2} + B(x)\frac{du}{dx} + C(x)u.$$

Здесь A, B, C — функции одной переменной, определенные на графе Γ. Дифференциальное выражение определено на множестве функций имеющих равномерно непрерывные производные на каждом ребре графа. Это выражение можно трактовать в виде системы m обычных дифференциальных выражений

$$A_i(x)\frac{d^2u_i}{dx^2} + B_i(x)\frac{du_i}{dx} + C_i(x)u_i, \quad x \in \gamma_i,$$

рассматриваемых на каждом ребре $\gamma_i \in \Gamma$, $i = \overline{1,m}$.

В центре внимания работы заданная на графе Γ краевая задача на собственные значения

$$(pu')' + qu = \lambda u, \quad x \in \Gamma \tag{1}$$

со спектральным параметром λ. В каждой внутренней вершине $a \in V$ заданы условия непрерывности и условие согласования

$$u_i(a) - u_{i_1}(a) = 0, \quad i, i_1 \in I(a), \quad \sum_{i \in I(a)} \alpha_i(a) u_i'(a) = 0, \tag{2}$$

а в каждой граничной вершине задаются условия Дирихле

$$u(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma. \tag{3}$$

В дифференциальном уравнений полагаем, что функции $p(\cdot)$, $p'(\cdot)$, $q(\cdot)$ равномерно непрерывны на каждом ребре графа Γ и $\inf\limits_{x \in \Gamma} p(x) > 0$. В условиях (2) $\{\alpha_i(a)\}_{i \in I(a)}$ — наборы положительных чисел, свои для каждой вершины a, а производные подсчитаны при параметризации ребер в направлении к вершине a.

Задача (1)–(3) обладает следующими свойствами [2, 3]:

1) спектр задачи состоит из последовательности собственных значений не имеющей конечной предельной точки;

2) если граф Γ не имеет циклических маршрутов, то спектр задачи вещественен и геометрическая кратность собственных значений не превосходит $n - 1$.

Пусть $\{\gamma_i\}_1^m$ — множество всех ребер графа Γ, занумерованных произвольным образом. Дифференциальное уравнение (1), суженное на ребро γ_i, имеет два линейно независимых решения $s_i(x,\lambda)$ и $c_i(x,\lambda)$. Продолжим функции $s_i(x,\lambda)$ и $c_i(x,\lambda)$ на весь граф Γ, положив их тождественно равными нулю на остальных ребрах. Получим фундаментальную систему решений $\{\varphi_k(x,\lambda)\}_1^{2m}$ уравнения (1). Обозначим через $\{l_i\}_1^{2m}$ — набор всех линейных функционалов, определяющих полную систему условий (2), (3). Рассмотрим характеристический определитель $\triangle(\lambda) = \det\|l_i(\varphi_k(\cdot,\lambda))\|_1^{2m}$, множество нулей которого совпадает со спектром (множеством всех собственных значений) краевой задачи (1)–(3).

Пусть λ_0 — собственное значение. Тогда λ_0, как корень уравнения $\triangle(\lambda) = 0$, имеет некоторую кратность j, которую мы называем алгебраической кратностью. Кроме того, ранг r соответствующей характеристическому определителю $\triangle(\lambda_0)$ матрицы $A(\lambda_0)$ строго меньше порядка $2m$ этого определителя.

Лемма [2]. *Число p линейно независимых собственных функций, отвечающих собственному значению λ_0, равно $2m - r$.*

Число $p(\lambda_0) = 2m - r$ назовем геометрической кратностью собственного значения λ_0. Очевидно, что алгебраическая кратность не меньше геометрической.

2. Некоторые свойства собственных функций

В этом пункте приводятся некоторые вспомогательные свойства, которые представляют и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть $u(\cdot)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ_0, и не тривиальная на ребре γ_0. Тогда найдется два граничных ребра γ_1, γ_2 таких, что функция $u(\cdot)$ не тривиальна на ребрах γ_1, γ_2 и маршрут $\Gamma(b_1, b_2)$, в котором b_1, $b_2 \in \partial\Gamma$, а ребра γ_1 и γ_2 примыкают к b_1, b_2 соответственно, содержит ребро γ_0.*

$\lhd$ Пусть $\gamma_0 = (a_1, a_2)$. Если ребро γ_0 граничное, то необходимо показать существование еще одного граничного ребра на котором функция $u(\cdot)$ нетривиальна. Пусть вершина a_1 внутренняя. Поскольку параметры $\alpha_k(a_j)$ не равны нулю, то к вершине a_1 примыкает ребро $\gamma_3 = (a_1, a_3)$ на котором $u(\cdot)$ не равна тождественно нулю. Если ребро γ_3 граничное, то лемма верна. В противном случае к вершине a_3 примыкает ребро $\gamma_4 = (a_3, a_4)$ на котором $u(\cdot)$ не равна тождественно нулю. Если ребро γ_4 граничное, то лемма верна, иначе к вершине a_4 примыкает ребро $\gamma_5 = (a_4, a_5)$ такое, что $u \neq 0$ на γ_5 и т. д. Так как граф Γ конечный, то через конечное число шагов мы подойдем к граничному ребру $\gamma_1 = (b_1, a_n)$ на котором функция $u(\cdot)$ не равна тождественно нулю.

В случае если ребро γ_0 внутреннее нужно рассмотреть вершину a_2 и с помощью аналогичных рассуждений показать существование еще одного граничного ребра, на котором функция $u(\cdot)$ не тривиальна. Тот факт, что ребро γ_0 содержится в маршруте $\Gamma(b_1, b_2)$ очевиден. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть Γ — дерево и к каждой внутренней вершине графа Γ примыкает не менее трех ребер. Пусть λ_0 — собственное значение задачи (1)–(3) и $u(\cdot)$ — собственная функция отвечающая λ_0 и не равная нулю во внутренней вершине a. Тогда существует не менее трех граничных ребер, на которых функция $u(\cdot)$ не равна тождественно нулю.*

$\lhd$ Если к вершине a примыкает три граничных ребра, то, в силу непрерывности, функция $u(\cdot)$ не равна тождественно нулю на всех ребрах примыкающих к вершине, и, следовательно, утверждение леммы верно.

Пусть к вершине a примыкает два граничных ребра. Так как $d\,(a) \geqslant 3$, то к a примыкает внутреннее ребро γ_0 на котором функция $u\,(\cdot)$ не равна тождественно нулю. В силу леммы 1, существует два граничных ребра γ_1 и γ_2, примыкающих к граничным вершинам b_1 и b_2, таких, что $u\,(\cdot)$ не равна тождественно нулю на этих ребрах и маршрут $\Gamma(b_1, b_2)$ содержит ребро γ_0. Но тогда хотя бы одно из ребер γ_1, γ_2 не примыкает к вершине a и утверждение леммы верно.

Пусть к вершине a примыкает одно граничное ребро $\gamma = (b_0, a)$. Поскольку $d(a) \geqslant 3$, то к a примыкают два внутренних ребра (a, a_1) и (a, a_2), при этом функция $u(\cdot)$ не тривиальна на этих ребрах. Из леммы 1 вытекает существование маршрутов $\Gamma\,(b_1, b_2)$ и $\Gamma\,(b_3, b_4)$ $\quad(b_i \in \partial\,\Gamma)$ таких, что функция $u(\cdot)$ не тривиальна на ребрах, примыкающих к вершинам b_i. Если вершина b_0 не совпадает с вершинами b_1 и b_2, то лемма верна. Если же b_0 совпадает с одной из вершин b_1 и b_2 (пусть это будет вершина b_1), то маршрут $\Gamma\,(b_1, b_2)$ содержит ребро (a, a_1) и не содержит ребро (a, a_2). Следовательно, хотя бы одна из вершин b_3, b_4 не совпадает с вершинами b_1, b_2. Т. е. существуют три граничные вершины такие, что функция $u\,(\cdot)$ не тривиальна на ребрах, примыкающих к этим вершинам.

Остается рассмотреть случай, когда к вершине a примыкают только внутренние ребра $\gamma_1 = (a_1, a)$, $\gamma_2 = (a_2, a)$, $\gamma_3 = (a_3, a), \ldots, \gamma_{d(a)} = (a_{d(a)}, a)$. Из леммы 1 следует, что существуют маршруты $\Gamma(b_1, b_2)$, $\Gamma(b_3, b_4)$, $\Gamma(b_5, b_6)$ $\quad(b_i \in \partial\ \Gamma)$, содержащие ребра $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ соответственно, и такие, что функция $u\,(\cdot)$ не тривиальна на ребрах, примыкающих к вершинам b_i. Так как граф Γ не имеет циклов, а ребра $\gamma_i, i = \overline{1,3}$ примыкают к одной вершине, то хотя бы два из маршрутов $\Gamma(b_1, b_2)$, $\Gamma(b_3, b_4)$ и $\Gamma(b_5, b_6)$ не совпадают. Это означает, что из вершин b_i по крайней мере три различны. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть Γ — дерево и $d(a) \geqslant 3$ для любой внутренней вершины. Пусть λ_0 — собственное значение задачи (1)–(3) и ему отвечает собственная функция $u(\cdot)$ не тривиальная только на двух из всех граничных ребер графа. Тогда функция $u(\cdot)$ равна нулю во всех внутренних вершинах, нетривиальна на всех ребрах маршрута, соединяющего эти граничные ребра, и равна тождественно нулю на всех остальных ребрах.*

$\lhd$ Пусть γ_1 и γ_2 граничные ребра, на которых функция $u(\cdot)$ не равна тождественно нулю. Обозначим через b_1 и b_2, соответственно, граничные вершины к которым примыкают эти ребра. Покажем сначала, что функция $u(\cdot)$ тривиальна на $\Gamma\backslash\Gamma(b_1, b_2)$. Предположим противное. Тогда функция $u(\cdot)$ не равна тождественно нулю на ребре γ_0, которое не принадлежит $\Gamma(b_1, b_2)$. В силу леммы 1, найдутся два граничных ребра γ_3, γ_4 на которых функция $u(\cdot)$ не равна тождественно нулю. Так как ребро γ_0 не принадлежит $\Gamma(b_1, b_2)$, то хотя бы одно из ребер γ_3, γ_4 не совпадает ни с одним из ребер γ_1, γ_2. Т. е. функция $u(\cdot)$ не тривиальна на трех граничных ребрах, что противоречит условию леммы. Из того, что функция $u(\cdot)$ непрерывна на графе, $u \equiv 0$ на $\Gamma\backslash\Gamma(b_1, b_2)$ и $d(a) \geqslant 3$, получаем, что $u(\cdot)$ равна нулю во всех внутренних вершинах. Нам остается показать, что функция $u(\cdot)$ не равна тождественно нулю на всех ребрах маршрута $\Gamma(b_1, b_2)$. Рассмотрим ребро $\gamma_1 = (b_1, a_1)$. Функция $u(\cdot)$ не тривиальна на этом ребре и следовательно, не тривиальна еще хотя бы на одном из ребер примыкающих к этой вершине. Обозначим его (a_1, a_2). Так как $u \equiv 0$ на $\Gamma\backslash\Gamma(b_1, b_2)$, то очевидно, что (a_1, a_2) содержится в маршруте $\Gamma(b_1, b_2)$. Рассмотрим далее вершину a_2. Так как $u \neq 0$ на ребре (a_1, a_2), то к вершине a_2 примыкает ребро (a_2, a_3) такое, что функция $u(\cdot)$ не тривиальна на нем. И поскольку $u \equiv 0$ на $\Gamma\backslash\Gamma(b_1, b_2)$, то ребро (a_2, a_3) принадлежит маршруту $\Gamma(b_1, b_2)$, и т. д. $\rhd$

3. О максимальной геометрической кратности собственных значений

Обозначим через n — число граничных ребер графа Γ.

Теорема 1. *Пусть Γ — дерево и к каждой внутренней вершине примыкает не менее трех ребер. Пусть λ_0 — собственное значение задачи (1)–(3) геометрическая кратность* *которого равна $n-1$. Тогда значению λ_0 отвечает собственная функция равная нулю во всех внутренних вершинах и нетривиальная на всех ребрах графа Γ.*

$\lhd$ Пусть $\{u^k\}_1^{n-1}$ — линейно независимый набор собственных функций отвечающих λ_0. Рассмотрим функцию $u^{n-1}(\cdot)$. Из леммы 1 следует существование двух граничных ребер γ_1, γ_2 на которых функция $u^{n-1}(\cdot)$ не равна тождественно нулю. Через b_1 обозначим граничную вершину к которой примыкает ребро γ_1. Построим функции $\overline{u}^k(\cdot), k=\overline{1,n-2}$ по следующему правилу:

$$\overline{u}^k(x) = u^k(x) - \frac{(u^k)'(b_1)}{(u^{n-1})'(b_1)}u^{n-1}(x).$$

Из построения следует, что функции $\overline{u}^k(\cdot)$ равны тождественно нулю на ребре γ_1, примыкающем к вершине b_1. А из леммы 1 следует существование двух граничных ребер γ_3, γ_4 таких, что функция $\overline{u}^{n-2}(\cdot)$ не тривиальна на ребрах γ_3 и γ_4. С помощью функций $\overline{u}^k(\cdot)$ построим функции $\overline{\overline{u}}^k(\cdot), k=\overline{1,n-3}$ следующим образом

$$\overline{\overline{u}}^k(x) = \overline{u}^k(x) - \frac{(\overline{u}^k)'(b_2)}{(\overline{u}^{n-2})'(b_2)}\bar{u}^{n-2}(x),$$

где через b_2 обозначена граничная вершина к которой примыкает ребро γ_3. Из построения функций $\overline{\overline{u}}^k(\cdot)$ следует, что они равны тождественно нулю на ребрах примыкающих к граничным вершинам b_1, b_2. Перебирая все оставшиеся граничные вершины, подобным образом мы построим функцию $\varphi^1(\cdot)$, не тривиальную лишь на двух граничных ребрах примыкающих к граничным вершинам b_n, b_{n-1}. В силу леммы 3, функция $\varphi^1(\cdot)$ равна нулю во всех внутренних вершинах, $\varphi^1 \equiv 0$ на $\Gamma \backslash \Gamma(b_n, b_{n-1})$ и φ^1 не тривиальна на всех ребрах принадлежащих маршруту $\Gamma(b_n, b_{n-1})$.

Рассмотрим функции $v^k(\cdot)$, определяемые следующим образом

$$v^k(x) = u^k(x) - \frac{(u^k)'(b_n)}{(\varphi^1)'(b_n)}\varphi^1(x)$$

Функции $v^k(\cdot)$ равны тождественно нулю на граничном ребре примыкающем к b_n. Так как функции $u^k(\cdot)$ линейно независимы, то среди функций $v^k(\cdot)$ не менее $n-2$ не тривиальны на Γ и линейно независимы. Пусть, для определенности, это будут функции $v^k(\cdot), k=\overline{1,n-2}$.

С помощью рассуждений проведенных выше, из функций $v^k(\cdot)$ можно построить функцию $\varphi^2(\cdot)$ не равную тождественно нулю лишь на двух граничных ребрах, примыкающих к граничным вершинам, которые мы обозначим через b_{n-1} и b_{n-2}. Так как все функции $v^k(\cdot)$ равны тождественно нулю на ребре, примыкающем к вершине b_n, то среди вершин b_{n-1} и b_{n-2}хотя бы одна отлична от b_n. Пусть это будет вершина b_{n-1}. В силу леммы 4, функция $\varphi^2(\cdot)$ равна нулю во всех внутренних вершинах и не тривиальна лишь на ребрах маршрута $\Gamma(b_{n-1}, b_{n-2})$. Очевидно, что функции φ^1 и φ^2 не пропорциональны.

Рассмотрим функции $w^k(\cdot)$, $k=\overline{1,n-2}$, определяемые по правилу:

$$w^k(x) = v^k(x) - \frac{(v^k)'(b_{n-1})}{(\varphi^2)'(b_{n-1})}\varphi^2(x).$$

Все эти функции равны тождественно нулю на ребрах примыкающих к граничным вершинам b_n и $b_n - 1$. Для функций $w^k(\cdot)$ повторяем рассуждения, проведенные для функций $v^k(\cdot)$ и т. д. В конечном итоге мы получим набор линейно независимых собственных функций $\varphi^k(\cdot)$, $k=\overline{1,n-1}$, каждая из которых равна нулю во всех внутренних вершинах и не тривиальна лишь на ребрах некоторого маршрута, соединяющего две граничные вершины графа Γ. Поскольку функции $\varphi^k(\cdot)$ линейно независимы, то для любой граничной вершины b_{i_0} найдется функция $\varphi^{i_0}(\cdot)$, которая не равна тождественно нулю на ребре примыкающем к этой вершине.

Рассмотрим функции $\varphi^i(\cdot)$ и $\varphi^j(\cdot)$. Предположим, что эти функции нетривиальны на граничном ребре $\gamma\in\Gamma$. Очевидно, что всегда можно подобрать вещественные константы C^i и C^j так, что $C^i\varphi^i(x)+C^j\varphi^j(x)\neq 0$ на ребре γ. Аналогично можно подобрать константы C^k так, что функция $u(x)=\sum_{i=1}^{n-1}C^k\varphi^k(x)$ будет равна нулю во всех внутренних вершинах и не тривиальна на всех ребрах графа Γ. $\rhd$

Теорема 2. *Пусть λ_0 — собственное значение задачи* (1)–(3) *и ему отвечает собственная функция $u(\cdot)$ равная нулю во всех внутренних вершинах и не тривиальная на всех ребрах графа Γ. Тогда геометрическая кратность λ_0 равна $n-1$.*

$\lhd$ Пусть $\{b_i\}_1^n$ — множество всех граничных вершин графа Γ. Обозначим через $\varphi(\cdot,\lambda_0)$ решение уравнения (1) суженного на ребро $\gamma_i=(a_i,a_{j_i})$ такое, что $\varphi(a_i,\lambda_0)=0$. Так как функция $u(\cdot)$ равна нулю во всех внутренних вершинах и не тривиальна на всех ребрах графа Γ, то $u_i(x)=c_i\varphi_i(x,\lambda_0)$, $x\in\gamma_i$ и $\varphi_i(a_{j_i},\lambda_0)=0$.

Рассмотрим функции

$$u^k(x)=\begin{cases} c_j^k\varphi_j(x,\lambda_0),\ x\in\gamma_{k_j}, \\ 0,\ x\in\Gamma\backslash\Gamma(b_1,b_{k+1}), \end{cases}\quad k=\overline{1,n-1}.$$

Здесь $\Gamma(b_1,b_{k+1})=\bigcup\limits_{j=1}^{m_k}\gamma_{k_j}$, $\gamma_{k_j}=(a_{j-1},a_j)$, $a_0=b_1$, $a_{m_k}=b_{k+1}$,

$$c_1^k=1,\ c_{j+1}^k=-\frac{\alpha_{kj}(a_j)}{\alpha_{k_{j+1}}(a_j)}\cdot\frac{\varphi_j'(a_j,\lambda_0)}{\varphi_{j+1}'(a_j,\lambda_0)}c_j^k,\quad j=\overline{1,m_k-1}.$$

Так как все $\alpha_k(a_j)$ отличны от нуля и $\varphi_k'(a_j,\lambda_0)\neq 0$, то функции $u^k(\cdot)$ определены корректно. Из построения функций $u^k(\cdot)$ следует, что они удовлетворяют всем краевым условиям и, следовательно, являются собственными. Их линейная независимость очевидна. Так как геометрическая кратность любого собственного значения не превосходит $n-1$, то геометрическая кратность λ_0 равна $n-1$. $\rhd$

Таким образом, геометрическая кратность собственного значения λ_0 равна $n-1$ тогда и только тогда, когда ему отвечает собственная функция равная нулю во всех внутренних вершинах и не равная тождественно нулю на всех ребрах графа Γ.

Литература

1. *Покорный Ю. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—227 с.
2. *Завгородний М. Г.* Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе // Докл. РАН.—1994.—Т. 335, № 3.—С. 281–282.

Статья поступила 23 июня 2008 г.

Кулаев Руслан Черменович
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
Владикавказ, 362027, РОССИЯ
E-mail: `kulaevrch@mail.ru`