Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 3, С. 11–22

УДК **517.881**

ПРОСТЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ БАЗИСОВ В ПРОСТРАНСТВАХ КЁТЕ[1]

В. П. Кондаков

В заметке представляется подход к исследованию проблем характеризации базисов в пространствах Кёте, который основан на рассмотрении свойств возмущений операторов и базисных последовательностей.

Ключевые слова: пространства Кёте, возмущение базиса, квазиэквивалентность базисов.

Уже с давних пор вместе с классическими каноническими базисами функциональных пространств рассматривались «близкие», в некотором смысле, базисы типа Пинкерле и др. Построение таких «близких» систем (возмущений) использует либо спектральные свойства риссовских операторов, либо непосредственно ряд Неймана для обратного оператора.

Для решения важных задач структурной теории пространств Кёте числовых последовательностей (например, решения проблемы единственности безусловных базисов) требуются оценки характеристик коэффициентных функционалов аналогичных возмущений базисов в этих пространствах.

Ниже, после некоторой модификации и обобщения известных результатов (см., например, [1–3]) о возмущениях базисных систем, внимание будет сосредоточено на конечномерных возмущениях p-абсолютных базисов пространств Кёте в непосредственной связи с характеризацией всех базисов этих пространств.

1. Возмущения базисов в пространствах последовательностей

Определение 1. Базис (e_n) счетно-нормированного пространства $(E, (|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty})$ называют p-абсолютным ($1 \leqslant p < \infty$), если система полунорм

$$\|e\|_r = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |e'_n(e)|^p |e_n|_r^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad \text{где } e = \sum_{n=1}^{\infty} e'_n(e) e_n,$$

$e \in E$, задает на E исходную топологию, т. е. системы полунорм $(|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty}$ и $(\|\cdot\|_r)_{r=1}^{\infty}$ — эквивалентны.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00329-а.

В нормированных пространствах l_p, $1<p<\infty$, с p-абсолютным базисом ортов можно рассматривать операторы $T: l_p \to l_p$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^q < +\infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{1}$$

где $e_n = (\delta_{in})_{i=1}^{\infty}$ — базис ортов. Вместо (e_n) можно брать и какой-нибудь другой p-абсолютный нормированный базис с тем же значением p. Такие операторы аналогичны операторам Гильберта — Шмидта и совпадают с ними при $p = 2$. При $p=1$ можно рассматривать вместо (1) условие

$$\lim_{n\to\infty} \|Te_n\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} = 0$$

для базиса (x_n) с произвольными нормами элементов.

При выполнении каждого из этих условий в соответствующих пространствах проверяется без труда известный критерий предкомпактности образа единичного шара для банаховых пространств l_p $(p<\infty)$ числовых последовательностей. В самом деле, ограниченность образа TU единичного шара и равномерное убывание остатков показывается выкладкой с применением неравенства Гёльдера (или непосредственно при $p=1$)

$$\left\| T\left(\sum_{n=N}^{\infty} \xi_n e_n\right)\right\|_{l_p} = \sup_{\eta' : \|\eta'\|_{l_q}=1} \left|\sum_{n=N}^{\infty} \xi_n \eta'(Te_n)\right|$$
$$\leqslant \left(\sum_{n=N}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\eta' : \|\eta'\|_{l_p}=1} \left(\sum_{n=N}^{\infty} |\eta'(Te_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|\xi\|_{l_p} \left(\sum_{n=N}^{\infty} \|Te_n\|_{l_p}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

для любых $\xi \in l_p$ и $N = 1, 2, \ldots$ Согласно спектральной теории компактных операторов в банаховых пространствах, оператор $I-T$ (I — тождественный) непрерывно обратим, если единица не является собственным числом оператора T, с описанным выше свойством (см., например, [4]).

Принимая во внимание эти факты, переходим к рассмотрению возмущений базисов в счетно-нормированных пространствах с p-абсолютными базисами.

Напомним, что *пространством Кёте*, определяемым матрицей $[a_r(n)]$, $0 \leqslant a_r(n) \leqslant a_{r+1}(n)$, $r, n \in \mathbb{N}$, называют пространство числовых последовательностей

$$l_p[a_r(n)] = \left\{ \xi = (\xi_n) : |\xi|_r \doteq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p a_r^p(n)\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \ \forall\, r \in \mathbb{N} \right\},$$

где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и при $p=\infty$

$$|\xi|_r \doteq \sup_n |\xi_n| a_r(n) < +\infty, \quad \forall\, r \in \mathbb{N},$$

с топологией, определяемой монотонной системой полунорм $(|\cdot|_r)$.

Базис ортов $(e_n = (\delta_{in})_{i=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$ пространства Кёте, очевидно, является p-абсолютным базисом. В следующем утверждении речь пойдет о возмущениях базиса ортов, вместо которого можно брать и любой другой p-абсолютный базис этого пространства.

Предложение 1. *Пусть последовательность элементов* $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ *пространства Кёте* $E = l_p[a_r(n)]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ *такова, что при любом* $r \in \mathbb{N}$ *для нее справедливо условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|e_n - g_n|_r}{|e_n|_r} \right)^q < +\infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} \frac{|e_n - g_n|_r}{|e_n|_r} = 0 \text{ при } p = 1 \right), \tag{2}$$

и нет нетривиальных разложений нуля по этой последовательности, т. е.

$$\sum_n \eta_n g_n = 0 \;\text{ влечет }\; \eta_n = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

то $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ *является p-абсолютным базисом пространства* E*, эквивалентным базису ортов, т. е. существует автоморфизм* S *пространства* E*, переводящий базис* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *в* $(g_n)_{n=1}^{\infty}$.

$\lhd$ Определим сначала формально оператор S, полагая

$$S\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n \;\text{ для }\; \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n.$$

Чтобы показать непрерывность $S = (S - I) + I$, достаточно убедиться в непрерывности $S - I$. Для любого $r \in \mathbb{N}$ имеем

$$|S\xi - \xi|_r = \sup_{|\xi'|'_r = 1} |\xi'(S\xi - \xi)| = \sup_{|\xi'|'_r = 1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \xi'(g_n - e_n) \right|$$
$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p a_r^p(n) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{|\xi'|'_r = 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \xi' \left(\frac{g_n - e_n}{a_r(n)} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant |\xi|_r \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|g_n - e_n|_r}{a_r(n)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применив те же рассуждения, что относились к операторам в банаховых пространствах l_p и приведены выше, делаем заключение о компактности оператора $A = S - I$ в каждом ассоциированном банаховом пространстве E_r, которое получается пополнением фактор-пространства E/N_r по норме $|\cdot|_r$, где $N_r = \{e \in E : \; |e|_r = 0\}$.

Согласно условию предложения об отсутствии нетривиальных разложений нуля по системе $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, число 0 не является собственным значением оператора S. Поэтому оператор $S = I + A$ имеет непрерывный обратный S^{-1} в каждом ассоциированном банаховом пространстве E_r, $r \in \mathbb{N}$ (см., например, [4]).

Подставляя в определении S орты, т. е. полагая $\xi = e_n$, $n = 1, 2, \ldots$, видим, что $Se_n = g_n$, а значит $S^{-1} g_n = e_n$, $n \in \mathbb{N}$. $\rhd$

Замечание. При $p = 1$ вместо условия (2) в скобках можно использовать другое условие, обеспечивающее компактность описанного выше оператора $A = S - I$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_i \frac{|e'_n(Ae_i)|}{a_r(i)} < +\infty \quad (Ae_i = g_i - e_i), \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

2. Простые возмущения и вопросы единственности безусловных базисов в пространствах Кёте

Напомним, что базис $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ линейного топологического пространства E называют *безусловным*, если разложение каждого элемента сходится к этому элементу при любой перестановке членов.

В пространствах Кёте $E = l_p[a_r(n)]$ с $p = 1, 2, \infty$ путем указания свойств определяющих матриц Кёте $[a_r(n)]$ выделены классы, в каждом пространстве которых любой безусловный базис может быть получен из канонического (p-абсолютного) базиса ортов путем перестановки, умножения на числа, отличные от нуля, и автоморфизма пространства (см., например, [5, 6] и библ. в них). Если каждый безусловный базис данного пространства Кёте E может быть получен из базиса ортов комбинацией указанных операций, то говорят о единственности безусловного базиса в E. Понятно, что в случае единственности безусловного базиса в E, любые два безусловных базиса переводятся друг в друга указанными операциями, и это называют *свойством квазиэквивалентности всех безусловных базисов*.

Согласно теореме Дынина — Митягина, в ядерном пространстве Кёте — Фреше все базисы абсолютны (безусловны), а поэтому для указанных ядерных пространств ставилась проблема единственности базисов (свойства квазиэквивалентности всех базисов), которая решена пока только в частных случаях (см., например, [5, 6]).

В непосредственной связи с упомянутыми проблемами дадим для пары p-абсолютных базисов пространства Фреше достаточное условие их квазиэквивалентности в терминах свойств конечномерных возмущений специального вида.

Элемент f_0 пространства Фреше $(E, (|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty})$ назовем *выступающим (выступом)* по отношению к данной системе полунорм $(|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty}$, если существует непрерывный линейный функционал $f_0' \in E$ такой, что

$$f_0'(f_0) \geqslant 1 \text{ и } |f_0'(e)||f_0|_r \leqslant |e|_{r+1}, \quad e \in E,\ r = 1, 2, \ldots$$

Понятно, что для выступающего элемента f_0 соответствующий функционал f_0' имеет оценки норм

$$|f_0'|_{r+1}' \leqslant \frac{1}{|f_0|_r}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

В силу равностепенной непрерывности базисов в пространствах Фреше (см., например, [7]) для любого базиса или базиса дополняемого подпространства такого пространства можно выбрать систему полунорм $(|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty}$, определяющую исходную топологию, таким образом, что каждый элемент базиса будет выступающим (выступом).

Можно показать для одиночного элемента пространства Фреше возможность выбора функционала и системы полунорм, задающей исходную топологию, таких, что этот элемент будет выступающим по отношению к выбранной системе полунорм.

Оценки норм функционала в определении выступающего элемента характеризуют геометрическое расположение (наклоны) этого элемента по отношению к некоторому гиперподпространству (множеству нулей соответствующего функционала).

Пусть теперь имеется в пространстве Кёте — Фреше $E = l_p[a_r(n)]$ какой-нибудь базис $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ (или базис дополняемого подпространства). Тогда только пользуясь равностепенной непрерывностью базиса $(f_m)_{m=1}^{\infty}$, путем разрежения системы полунорм пространства Кёте E и умножения оставшихся полунорм на подходящие числа с изменением нумерации, можно добиться выполнения следующих условий:

1) $|e|_r \leqslant \frac{1}{2^r}|e|_{r+1}, \quad e \in E,\ r \in \mathbb{N}$;

2) $|f_m'(e)||f_m|_r \leqslant |e|_{r+1}, \quad e \in E,\ r \in \mathbb{N}$.

Лемма (ср. [5, 6]). *Пусть в пространстве Кёте $E = l_p[a_r(n)]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ система полунорм $(|\cdot|_r)$, задающая топологию, удовлетворяет условиям 1)–2), и f_0 — выступающий элемент по отношению к этой системе полунорм с соответствующим функционалом f_0'.*

Тогда существует натуральный индекс $i_0 \in \mathbb{N}$ *такой, что* $e'_{i(0)}(f_0) \neq 0$ $(f'_0(e_{i(0)}) \neq 0)$ *и*

$$\frac{a_r(i(0)) \cdot |f_0|_s}{|f_0|_{r+1} \cdot a_{s+1}(i(0))} \leqslant 1, \quad \forall\, r,\ s \in \mathbb{N}.$$

$\lhd$ Рассмотрим случай $p = 1$, а остальные случаи рассматриваются аналогично как в [5].

В следующих неравенствах сначала используется условие 1), а затем тот факт, что $f'_0(f_0) \geqslant 0$ и справедливы соответствующие оценки определения выступающего элемента

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|e'_i(f_0)\right| \sup_r \frac{a_r(i)}{|f_0|_{r+1}} \leqslant 1 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left|e'_i(f_0)\right| \left|f'_0(e_i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left|e'_i(f_0)\right| \inf_s \frac{a_{s+1}(i)}{|f_0|_s}.$$

Поэтому найдется натуральный индекс $i(0)$ такой, что $e'_i(f_0) \neq 0$, и

$$\sup_r \frac{a_r(i(0))}{|f_0|_{r+1}} \leqslant \inf_s \frac{a_{s+1}(i(0))}{|f_0|_s}.$$

Можно считать одновременно $f'_0(e_{i(0)}) \neq 0$, так как в предыдущих оценках справа можно оценивать только члены числового ряда для $f'_0(f_0)$, отличные от нуля. $\rhd$

Отметим, что модификации рассуждений доказательства леммы использовались в [5, 6] (см. также [7]) для получения утверждений о единственности безусловных (p-абсолютных) базисов в широких классах пространств Кёте. В доказательствах этих утверждений существенную роль играли комбинаторные соображения, известные как теоремы о системах различных представителей конечных или бесконечных наборов множеств [8]. Именно такой факт под названием теоремы Холла — Кёнига в исследовании вопроса о единственности безусловного базиса применялся в [9].

Поясним, о какой системе различных представителей идет речь.

Пусть в пространстве Кёте $E = l_p[a_r(n)]$ рассматривается p-абсолютный базис (или p-абсолютный базис дополняемого подпространства)$(f_m)_{m=1}^{\infty}$. Как уже отмечалось выше, систему полунорм, задающую топологию, всегда можно предполагать выбранной так, что выполняются неравенства

$$|e|_r \leqslant \left(\sum_{m=1}^{\infty} (|f'_m(e)||f_m|_r)^p\right)^{\frac{1}{p}} \doteq \|e\|_r \leqslant \frac{1}{2^r}|e|_{r+1}, \quad e \in E,\ r \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

В случае, когда $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ — базис дополняемого подпространства F в E, выбирается непрерывный линейный проектор Q из E на F и система полунорм $(|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty}$, задающая исходную топологию пространства E, строится таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$|Qe|_r \leqslant \frac{1}{2^r}\left(\sum_{m=1}^{\infty} |f'_m(Qe)|^p |f_m|_{r+1}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{2^{2r+1}}|e|_{r+2}, \quad e \in E,\ r \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Тогда каждый элемент f_m будет выступающим по отношению к системе полунорм $(|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty}$ также, как и каждый элемент e_n.

Согласно утверждению леммы, для каждого элемента f_m найдется элемент $e_{n(m)}$ такой, что

$$\frac{|e_{n(m)}|_r |f_m|_s}{|e_{n(m)}|_{s+1}|f_m|_{r+1}} \leqslant 1, \quad \forall\, r, s \in \mathbb{N}.$$

Обозначив
$$\lambda_m = \inf_s \frac{|e_{n(m)}|_{s+1}}{|f_m|_s},$$
то же самое можно записать в виде двусторонних оценок полунорм элементов $|e_{n(m)}|_r \leqslant \lambda_m |f_m|_{r+1} \leqslant |e_{n(m)}|_{r+2}$, $\forall\, m, r \in \mathbb{N}$, которые при дополнительном условии взаимной однозначности отображения $m \to n(m)$, $m \in \mathbb{N}$ означают квазиэквивалентность p-абсолютного базиса $(f_m)_{m=1}^\infty$ части $(e_{n(m)})_{m=1}^\infty$ базиса ортов. Зафиксируем некоторый натуральный индекс $r(0) \geqslant 1$ и для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим множество
$$\nu_{r(0)}(m) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \ \frac{|e_n|_r |f_m|_s}{|e_n|_{r+r(0)} |f_m|_{s+r(0)}} \leqslant 1, \quad \forall\, r, s \in \mathbb{N} \right\}.$$
Кроме того, $\nu_{r(0)}(m) \neq \varnothing$, при любом $m \in \mathbb{N}$, так как $r(0) \geqslant 1$.

Если будет показано, что существует система различных представителей $n(m) \in \nu_{r(0)}(m)$, $m = 1, 2, \ldots$, $n(m_1) \neq n(m_2)$, $\forall\, m_1 \neq m_2$, то тем самым будет доказана квазиэквивалентность p-абсолютного базиса $(f_m)_{m=1}^\infty$ части базиса ортов. В этом случае при $r(0) > 1$ соответствующие двусторонние неравенства имеют вид
$$|e_{n(m)}|_r \leqslant \lambda_m |f_m|_{r+r(0)} \leqslant |e_{n(m)}|_{r+2r(0)}, \quad \forall\, m, r \in \mathbb{N}.$$
Обозначим для произвольного конечного множества $\mu = \{m_i, \ i = 1, 2, \ldots, j\}$ индексов базиса $(f_m)_{m=1}^\infty$ множество
$$\nu_{r(0)}(\mu) = \bigcup_{i=1}^{j} \nu_{r(0)}(m_i)$$
индексов базиса ортов, и $|A|$ ниже будет означать число элементов во множестве A, если оно конечно, и символ ∞, когда A бесконечно.

Простое необходимое и достаточное условие существования упомянутой выше системы различных представителей множеств $\nu_{r(0)}(m)$ состоит в том, что для каждого конечного множества $\mu = \{m_i, \ i = 1, 2, \ldots, j\}$ в соответствующем множестве $\nu_{r(0)}(\mu)$ должно быть не менее j элементов, т. е.
$$|\mu| = j \leqslant |\nu_{r(0)}(\mu)|. \tag{5}$$
(Доказательство см., например, в [8] и применение — в [9]).

Легко привести крайние случаи «густых» и «разреженных» пространств Кёте, когда условие (5) проверяется без труда.

Блочным пространством Кёте называют пространство последовательностей векторов
$$l_p\left([a_r(n)], l_p^{k(n)}\right) = \left\{ x = (x_n), \ x_n \in l_p^{k(n)}, \ \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|_{l_p}^p a_r^p(n) \right)^{\frac{1}{p}} = |x|_r < +\infty, \ r \in \mathbb{N} \right\},$$
$$k(n) \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \quad \left(p = \infty, \ |x|_r = \sup_p \|x_n\|_{l_\infty} a_r(n), \ r \in \mathbb{N} \right),$$
$a \leqslant a_r(n) \leqslant a_{r+1}(n)$, $r, n \in N$, с топологией, задаваемой системой преднорм $(|\cdot|_r)_{r=1}^\infty$.

Пространства Фреше, которые изоморфны пространствам Кёте с определяющими матрицами Кёте $l_p[a_r(n)]$, имеющими следующее свойство: $\frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$ для любого $r \in \mathbb{N}$, называют (правильными) пространствами Кёте с *правильным базисом ортов*.

Матрицу $[a_r(n)]$ в этом случае называют *правильной*. Если пространство Фреше E изоморфно блочному пространству Кёте $l_p\left([a_r(n)], l_p^{k(n)}\right)$ с правильной матрицей $[a_r(n)]$ и хотя бы для одного индекса n размерность $k(n)$ бесконечна, то в этом случае будем говорить, что базис ортов этого пространства Кёте *упорядочиваемый*, а E имеет *упорядочиваемый* p-абсолютный базис.

Легко показать проверкой (5), что если пространство Фреше E имеет представление в виде блочного пространства Кёте вида $l_p\left([a_r(n)], \left(l_p^{M(n)}\right)\right)$, где все размерности $M(n)$ блоков бесконечны, то любая p-абсолютная базисная последовательность, порождающая дополняемое подпространство в E, квазиэквивалентна части канонического базиса. Любые два p-абсолютных базиса такого пространства квазиэквивалентны [6].

Вопрос о квазиэквивалентности p-абсолютных базисов в случае пространств Кёте — Фреше, имеющих p-абсолютный упорядочиваемый базис, до конца пока не исследован.

Свойство «густоты» базисов или самих пространств Фреше, имеющих представление в виде блочных пространств Кёте со всеми бесконечными размерностями блоков или, в некоторых случаях, изоморфных своим декартовым квадратам, позволяет дать сравнительно просто положительный ответ на вопрос о квазиэквивалентности -абсолютных базисов дополняемых подпространств подходящим частям произвольного -абсолютного базиса всего пространства (см., например, [6]). Здесь, в частности, имеется в виду справедливость такого утверждения для пространств Фреше, имеющих правильный p-абсолютный базис и изоморфных своему декартову квадрату.

Аналогичные утверждения получаются и для в некотором смысле «разреженных» или лакунарных пространств степенных рядов [6]. Дадим абстрактное определение такого типа пространств без использования понятия правильного базиса.

Определение 2. Базис (e_n), пространства Фреше E назовем *неоднородным*, если из него нельзя выделить две подпоследовательности без общих элементов, которые были бы квазиэквивалентными.

Примерами неоднородных базисов могут служить базисы в ультраядерных пространствах Кёте, рассматривавшихся ранее М. М. Драгилевым. Эти пространства называют теперь *нестабильными*.

Легко привести примеры декартовых произведений пространств лакунарных степенных рядов с неоднородными базисами, не являющимися правильными (см., например, [6]). Рассмотрим блочное расширение класса пространств Кёте с неоднородными базисами ортов.

Определение 3. Будем говорить, что пространство Фреше — Кёте E имеет *блочно-неоднородное представление*, если оно изоморфно блочному пространству Кёте вида $l_p\left([a_r(n)], \left(l_p^{M(n)}\right)\right)$, где $(n) \leqslant \infty$, $n \in N$, а матрица Кёте $[a_r(n)]$ определяет неоднородный базис ортов в пространстве $l_p[a_r(n)]$. В последнем случае также будем говорить о неоднородности матрицы $[a_r(n)]$.

Условие неоднородности матрицы Кёте имеет вид:

$$\exists\, r(1) \quad \forall\, r(2) \quad \exists\, r(3) \quad \forall\, r(4)$$

$$\sup\left\{\frac{a_{r(3)}(n_k)a_{r(1)}(m_k)}{a_{r(4)}(m_k)a_{r(2)}(n_k)}, \frac{a_{r(3)}(m_k)a_{r(1)}(n_k)}{a_{r(4)}(n_k)a_{r(2)}(m_k)}, k \in N\right\} = \infty,$$

для любых непересекающихся последовательностей (n_k), (m_k) натуральных чисел без повторений. Класс пространств Фреше — Кёте, имеющих блочно-неоднородное представление, включает в себя в качестве собственных подмножеств классы ультраядерных (нестабильных) пространств, различные обобщения пространств лакунарных степенных рядов, их декартовы произведения и «ручные» пространства степенных рядов бесконечного типа (подробнее см. [6]).

Теорема 1 (см., например, [6])**.** *Пусть пространство Фреше — Кёте E имеет блочно-неоднородное представление с p-абсолютным базисом ортов (e_n), F — дополняемое подпространство в E и (f_m) — p-абсолютный базис в F. Тогда (f_m) квазиэквивалентен некоторой подпоследовательности базиса (e_n). Любые два p-абсолютных базиса такого пространства квазиэквивалентны.*

Пусть в пространстве Кёте $E = l_p[a_r(n)]$ $(p \geqslant 1)$ дополняемое подпространство F имеет p-абсолютный базис (f_n), т. е. изоморфно пространству Кёте $l_p[|f_n|_r]$. Выбрав некоторый проектор Q из E на F будем считать, что система (полу)норм $(|\cdot|_r)$ в E определена таким образом, чтобы выполнялись неравенства (3) и (4).

Выберем произвольно конечный набор элементов $\{f_{m_1}, f_{m_2}, \dots, f_{m_k}\}$ из базиса в F и обозначим $F_\mu = \operatorname{span}(f_{m_i})_{i=1}^k$ — линейную оболочку указанного набора элементов $(\mu = \{m_1, m_2, \dots, m_k\})$. Выделим теперь все элементы базиса ортов (e_n), для которых можно подобрать хотя бы один индекс m_i с оценками норм соответствующих элементов

$$\frac{|e_n|_r |f_{m_i}|_s}{|f_{m_i}|_{r+6} |e_n|_{s+6}} \leqslant 1, \quad r, s \in \mathbb{N}.$$

Множество всех указанных ортов записываем в виде $\{e_{n_1}, e_{n_2}, \dots, e_{n_j}\}$, $\nu(\mu) = \{n_i\}_{i=1}^j$, а порождаемое ими подпространство обозначим $E_{\nu(\mu)}$. Нас интересует здесь исключительно возможность случая конечных $k > j$. Этот случай заведомо не может иметь места, если сужение проектора

$$P_\nu e = \sum_{n \in \nu} e'_n(e) e_n, \quad e \in E,$$

на F_μ инъективно. Поэтому основным вопросом является следующий: будет ли отображение $P_{\nu(\mu)} : F_\mu \to E_{\nu(\mu)}$ инъективно, т. е. будут ли различные векторы из F_μ иметь различные проекции в $E_{\nu(\mu)}$?

Покажем, что если дополнительно допустить, что все проекторы вида P_ν и Q_μ $(\nu, \mu \subset \mathbb{N})$ коммутируют, то случай $k > j$ приводится к противоречию.

Следующее утверждение из [6] приведем для полноты изложения с доказательством, так как в нем содержится альтернативный подход к решению вопросов характеризации базисов по отношению к предлагаемому ниже с использованием простых возмущений базисов.

Теорема 2. *Пусть F — дополняемое подпространство в пространстве Кёте $E = l_p[a_r(n)]$. Если F имеет p-абсолютный базис (f_m) и коммутируют все проекторы вида*

$$P_\nu e = \sum_{n \in \nu} e'_n(e) e_n, \quad Q_\mu e = \sum_{m \in \mu} f'_m(Qe) f_m, \quad e \in E,$$

где Q — некоторый проектор из E на F, $\nu, \mu \subset N$, (e_n) — базис ортов в E, то базис (f_m) квазиэквивалентен части базиса (e_n). В частности, если (f_m) другой p-абсолютный базис в E, то при том же условии он квазиэквивалентен базису ортов (e_n).

$\lhd$ Будем предполагать системы полунорм $(|\cdot|_r)$ и $(\|\cdot\|_r)$ в E и F выбранными таким образом, чтобы выполнялись описанные выше неравенства (3),(4) с проектором Q. Для произвольного конечного набора μ индексов базиса (f_m) рассмотрим определенный выше набор индексов $\nu(\mu)$ и убедимся, что случай $k > j$, где k — число элементов в μ, а j —

число элементов в $\nu(\mu)$, не может иметь места. В случае $k > j$ непременно найдется элемент

$$e_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{m_i} = \sum_{n \notin \nu(\mu)} e'_n(e_0) e_n \neq 0.$$

Если размерность подпространства $F_{\mu 0}$, порождаемого такими элементами, строго больше 1, то уменьшая каждый раз число элементов в наборе $\{f_{m_1}, \dots, f_{m_k}\}$ на единицу, мы можем уменьшить число линейно независимых векторов в $F_{\mu 0}$ не более чем на единицу. Поэтому таким уменьшением числа элементов в μ можно придти к рассмотрению новых наборов $\mu_1 \subset \mu$ и $\nu(\mu_1)$ таких, что $F_{\mu_1 0}$ имеет размерность 1. Соотношение между числами элементов в μ и $\nu(\mu_1)$ теперь не имеет значения и противоречие будет в том, что найдется индекс $n \in N \setminus \nu(\mu_1)$, для которого имеется индекс $m_i \in \mu_1$:

$$\frac{|e_n|_r |f_{m_i}|_s}{|f_{m_i}|_{r+6} |e_n|_{s+6}} \leqslant 1, \quad \forall\, r, s \in N,$$

но все такие индексы должны быть в $\nu(\mu_1)$. Итак, пусть элемент

$$e_0 = \sum_{m \in \mu_1} f'_m(e_0) f_m = \sum_{n \notin \nu(\mu_1)} e'_n(e_0) e_n$$

порождает $F_{\mu_1 0}$. Тогда в силу предположения о коммутирующих проекторах $P_{\nu(\mu_1)}$ и Q_{μ_1} справедливо представление $Q_{\mu_1}(I - P_{\nu(\mu_1)}) Q_{\mu_1} e = e'_0(e) e_0$, $e \in E$ и функционал e'_0 удовлетворяет оценкам

$$|e'_0(e)| |e_0|_r \leqslant |e|_{r+3}, \quad r \in N,\ e \in E. \tag{6}$$

Применяя утверждение леммы к разложению элемента e_0 по базису (f_m), можно указать элемент f_m с $m \in \mu_1$ такой, что

$$\frac{|e_0|_r |f_m|_s}{|f_m|_{r+3} |e_0|_{s+3}} \leqslant 1, \quad \forall\, r, s \in N.$$

С другой стороны, применение утверждения той же леммы к разложению e_0 по базису (e_n) дает элемент e_n с $n \notin \nu(\mu_1)$:

$$\frac{|e_0|_r |e_n|_s}{|e_n|_{r+3} |e_0|_{s+3}} \leqslant 1, \quad \forall\, r, s \in N.$$

Но тогда найденному индексу m из μ_1 соответствует индекс n из $N \setminus \nu(\mu_1)$, для которого

$$\frac{|e_n|_r |f_m|_s}{|f_m|_{r+6} |e_n|_{s+6}} \leqslant 1, \quad \forall\, r, s \in N,$$

а это противоречит тому, что в $\nu(\mu)$ содержатся все такие индексы. $\triangleright$

Замечание. В общем случае некоммутирующих проекторов P_ν, Q_μ по элементу e_0 из доказательства предложения можно определить и непрерывный линейный функционал e'_0 такой, что $e'_0(e_0) = 1$, но пока не удается получить требуемых неравенств (6).

Немного иначе: можно ли для элемента $e_0 = Q_\mu(I - P_{\nu(\mu)}) Q_\mu e_0$ из приведенных рассуждений определить функционал e'_0: $e'_0(e_0) = 1$ и

$$|e'_0(e)| \leqslant \inf_r \frac{|Q_\mu(I - P_{\nu(\mu)}) Q_\mu e|_r}{|e_0|_r}, \quad e \in E?$$

Приведенные в доказательстве предложения рассуждения можно повторить в ситуации, когда p-абсолютные базисы (e_n) и (f_m) определяют *почти коммутирующие* семейства проекторов в следующем смысле: для любых конечных наборов индексов μ и ν существует проектор $R_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu}e = \lim_{n\to\infty}[Q_\mu(I-P_\nu)Q_\mu]^n e,$$

и семейство проекторов $R_{\mu\nu}$ равностепенно непрерывно, т. е. для любого r существуют $C(r)>0$, $s(r)\in N$ такие, что

$$|R_{\mu\nu}e|_r \leqslant C(r)|e|_{s(r)}, \quad e\in E,$$

где $C(r)$ и $s(r)$ не зависят от числа элементов во множествах μ и ν. В этом случае базисы (e_n) и (f_m) квазиэквивалентны, однако остается открытым вопрос описания множества пар базисов с указанным свойством.

Пусть снова $\mu=\{m_1,\dots,m_{j+1}\}$ и $\nu_{r(0)}(\mu)=\{n_1,\dots,n_j\}$ — множества индексов базисов $(f_m)_{m=1}^\infty$ и $(e_n)_{n=1}^\infty$, соответственно, определенные выше, после леммы. Наше отрицание условий теоремы Холла — Кёнига состоит в том, что размерность $F_\mu=\operatorname{span}(f_{m_i})_{i=1}^{j+1}$ выше размерности $E_{\nu_{r(0)}(\mu)}=\operatorname{span}(e_{n_i})_{i=1}^{j}$. Существование элемента

$$f_0=\sum_{m\in\mu}f'_m(f_0)f_m=\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\nu_{r(0)}(\mu)}e'_n(f_0)e_n$$

влечет существование хотя бы одного элемента $f_{m_{i(0)}}$ такого, что

$$|f_{m_{i(0)}}|_r=\|f_{m_{i(0)}}\|_r\leqslant\|(I-P_\nu)f_{m_{i(0)}}\|_r,$$

для бесконечного числа значений $r\in\mathbb{N}$.

Выбрав один такой элемент и считая его индекс равным m_{j+1}, определим конечномерное возмущение базиса $(f_m)_{m=1}^\infty$ следующим образом: $Sf_m=f_m$, $m\neq m_i$, $i=1,2,\dots,j$; $Sf_{m_i}=P_{\nu_{r(0)}(\mu)}f_{m_i}+\alpha e_{n_i}$, $i=1,2,\dots,j$, где α выбрано так, что

$$\frac{1}{2}|P_{\nu_{r(0)}(\mu)}f_{m_i}|_r\leqslant|Sf_{m_i}|_r\leqslant 2|P_{\nu_{r(0)}(\mu)}f_{m_i}|_r, \quad i=1,2,\dots,j,$$

и любого $r\in\mathbb{N}$. Кроме того, ввиду конечномерности описанного возмущения $I-S$, можно всегда подобрать α, чтобы не существовало нетривиальных разложений нуля по системе $(Sf_m)_{m=1}^\infty$. Согласно сказанному в первой части заметки, это построение приводит к базису $(Sf_m)_{m=1}^\infty$, полученному из $(f_m)_{m=1}^\infty$ автоморфизмом S.

Сравнивая базисы $(e_n)_{n=1}^\infty$ и $(Sf_m)_{m=1}^\infty$, предварительно выбрав систему полунорм, задающую топологию E таким образом, что элементы Sf_m будут выступающими, применением соображений леммы устанавливаем, что в них элементу $Sf_{m_{j+1}}$ не может соответствовать ни один из элементов набора $\nu_{r(0)}(\mu)$, так как соответствующий элементу $Sf_{m_{j+1}}$ координатный функционал биортогональной последовательности обращается в ноль на всем подпространстве $E_{\nu_{r(0)}(\mu)}$ по построению. Таким образом, существует элемент $e_{n_{j+1}}$, $n_{j+1}\notin\nu_{r(0)}(\mu)$ такой, что

$$\frac{|e_{n_{j+1}}|_r|f_{m_{j+1}}|_s}{|f_{m_{j+1}}|_{r+1}|e_{n_{j+1}}|_{s+1}}\leqslant C_s, \quad r,s\in\mathbb{N},$$

здесь константа $C_s>0$ может зависеть не только от s, но и от $\mu,\nu_{r(0)}(\mu)$.

Поясним, что зависимость константы $C_s > 0$ от указанных факторов проверяется, если проследить оценки норм оператора S и его обратного S^{-1} (особенно обратного). Привести к противоречию наше отрицание условий теоремы Холла — Кёнига пока не удается, но если бы удалось показать, что возмущение S всегда можно устраивать так, что нормы S и S^{-1} не зависят от выбора множеств μ и $\nu_{r(0)}(\mu)$, то необходимое противоречие было бы получено и тем самым доказана квазиэквивалентность всех p-абсолютных базисов в пространствах Кёте.

Заметим, что аналогичные соображения можно проводить и используя конечномерные возмущения базиса $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ вида $I - S$, где $Sf_m = f_m - P_{\nu_{r(0)}(\mu)}f_m + h_m$, $m \notin \mu \setminus \{f_{m_{j+1}}\}$, $Sf_m = f_m$, $m \in \nu_{r(0)}(\mu)$, где $h_m \in (I - P_{\nu_{r(0)}(\mu)})E$ (например, вида $h_m = \alpha e_{\sigma(m)}$, $\sigma(m) \notin \nu_{r(0)}(\mu)$).

Однако и здесь вопрос о равностепенной непрерывности всей совокупности удаляемых из множеств μ элементов остается открытым. Как и в предыдущем случае, этот вопрос сводится к вопросу возможности выбора возмущений $I - S$ с равномерными оценками норм S и S^{-1}.

Можно сделать предположение, что развитие этого подхода с использованием конечномерных, а затем риссовских возмущений базисов позволит установить справедливость условий следующего предложения (или доказать их отсутствие).

Предложение 2. *Пусть в пространстве Кёте — Фреше $E = l_p[a_r(n)]$ дан p-абсолютный базис $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ некоторого дополняемого подпространства F и системы полунорм $(|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty}$, $(\|\cdot\|_r)_{r=1}^{\infty}$ заданы, как в условии леммы, так что все элементы базиса ортов $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ и базисной последовательности $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ выступающие. Тогда, если существуют $r(0) \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ такие, что выполнено условие*

$$|\mu| \leqslant |\nu_{r(0)}(\mu)|, \quad \forall\, \mu \subset \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, k\},$$

то базисная последовательность (f_m) квазиэквивалентна части базиса ортов (e_n).

Это утверждение следует из результатов [6, 9], леммы и того факта, что конечный набор элементов одного базиса всегда квазиэквивалентен набору такого же количества элементов другого базиса.

Условие предложения 2 — запись условия теоремы Холла — Кёнига существования системы различных представителей совокупности множеств $\nu_{r(0)}(m)$, $m > k$. Эти условия легко проверяются с применением леммы в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть в пространстве Кёте $l_p[a_r(n)]$, $1 \leqslant p < \infty$, p-абсолютная базисная последовательность $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ порождает дополняемое подпространство и удовлетворяет следующему условию: существует натуральный индекс $r(0) \geqslant 1$ такой, что при любом выборе конечных наборов $\mu = \{m_1, m_2, \dots, m_j\}$ и $\nu_{r(0)}(\mu) = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, $k < j$, описанных выше, конечномерные возмущения базиса $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ вида $I - S$, где $Sf_m = P_{\nu_{r(0)}(\mu)}f_m + \alpha h_m$, $m = m_1, m_2, \dots, m_k$, $P_{\nu_{r(0)}(\mu)}$ — естественный проектор из E на $E(\nu_{r(0)}(\mu)) = \mathrm{span}(e_{n_i})_{i=1}^{k}$, $h_m \in E(\nu_{r(0)}(\mu))$, $Sf_m = f_m$, $m \neq m_i$, $i = 1, 2, \dots, k, \dots$, могут быть выбраны так, что оценки норм координатных функционалов возмущенных базисных последовательностей относительно каждой непрерывной нормы не зависят от выбора μ и $\nu_{r(0)}(\mu)$. Тогда $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ квазиэквивалентен части базиса ортов.*

В [9] показано, что если бы удалось доказать условие предложения 2, то это дало бы положительное решение трех основных проблем структурной теории пространств Кёте: проблемы единственности p-абсолютных базисов, проблемы изоморфной классификации (существования квазидиагональных изоморфизмов изоморфных пространств) и проблемы описания дополняемых подпространств, имеющих p-абсолютные базисы.

Для положительного решения упомянутых проблем необходимо привести к противоречию при сделанных выше (в лемме и предложении 2) предположениях следующее допущение

$$\forall\,(M_k \in \mathbb{N})_{k=1}^{\infty} \quad (M_k \to \infty) \quad \exists\,(\mu_k)_{k=1}^{\infty} \quad \mu_k \subset \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, M_k\},$$
$$|\mu_k| > |\nu_k(\mu_k)|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Конструкции со счетным числом простых возмущений (риссовские операторы), возможно пригодных для этой цели, будут рассмотрены в следующих публикациях.

Литература

1. *Arsove M. G.* The Paley–Wiener theorem in metric linear spaces // Pasific J. Math.—1960.—V. 10.—P. 365–379.
2. *Arsove M. G., Edwards R. E.* Generalized bases in topological linear spaces // Studia Math.—1960.—V. 19.—P. 95–113.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.—М.: Мир, 1972.—740 с.
4. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа.—М.: Наука, 1979.—381 с.
5. *Кондаков В. П.* Вопросы геометрии ненормируемых пространств.—Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1983.—72 с.
6. *Кондаков В. П.* Об изоморфной классификации и свойствах базисов пространств Кёте // В сб.: Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2004.—С. 218–240.
7. *Rolewicz S.* Metric Linear Spaces. (II ed.).—Warszawa etc.: PWN-Polish Scientific Publishers, 1984.—459 p.
8. *Холл М.* Комбинаторика.—М.: Мир, 1970.—424 с.
9. *Митягин Б. С.* Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Studia Math.—1971.—Т. XXXVII, № 2.—С. 111–137.

Статья поступила 15 февраля 2008 г.

Кондаков Владимир Петрович
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН;
Южный федеральный университет
Ростов-на-Дону, 344090, РОССИЯ
E-mail: kond@math.rsu.ru