Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 3, С. 3–10

УДК **517.98**

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ВЕКТОРНЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ[1]

Е. К. Басаева

При помощи векторной теоремы о биполяре получены необходимые условия экстремума в векторнозначной квазидифференцируемой задаче с ограничениями типа неравенства при выполнении ослабленного условия квазирегулярности.

Ключевые слова: квазидифференциал, квазидифференцируемый оператор, квазидифференцируемые экстремальные задачи.

Статья посвящена уточнению необходимых условий экстремума для многоцелевых квазидифференцируемых экстремальных задач и является продолжением работ [1–3]. В первом параграфе приведены необходимые для дальнейшего изложения сведения о квазидифференциале и квазидифференцируемых экстремальных задачах. Второй параграф посвящен векторной теореме о биполяре. В третьем параграфе с использованием векторной теоремы о биполяре выводятся необходимые условия экстремума в векторной квазидифференцируемой задаче с ограничениями типа неравенства при выполнении слабого условия регулярности.

В статье использованы терминология и обозначения из [8].

1. Квазидифференцируемые экстремальные задачи

1.1. Пусть X — действительное векторное пространство, а E — произвольное K-пространство и $E^{\bullet} := E \cup \{+\infty\}$. Оператор $f : X \to E^{\bullet}$ называют *квазидифференцируемым в точке* x_0, если он дифференцируем по направлениям в этой точке и его производная по направлениям — квазилинейный оператор (т. е. представима в виде разности двух сублинейных операторов):

$$f'(x_0)h = p(h) - q(h) = \sup_{T \in \partial p} Th - \sup_{T' \in \partial q} T'h \quad (\forall h \in X).$$

Таким образом, в силу двойственности Минковского, квазилинейному оператору $f'(x_0) = p - q$, можно поставить в соответствие упорядоченную пару опорных множеств $(\partial p, \partial q)$. Заметим, что представление $f'(x_0)$ в виде разности двух сублинейных операторов не единственно (достаточно прибавить к p и q любой сублинейный оператор). Пары $(\partial p, \partial q)$ и $(\partial p_1, \partial q_1)$ назовем эквивалентными, если по ним восстанавливается один и тот же квазилинейный оператор, т. е.

$$f'(x_0)h = \sup_{T \in \partial p} Th - \sup_{T' \in \partial q} T'h = \sup_{T \in \partial p'} Th - \sup_{T' \in \partial q'} T'h \quad (\forall h \in X).$$

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00622.

Класс эквивалентных пар опорных множеств $[\partial p, \partial q]$ называют *квазидифференциалом* f в точке x_0 и обозначают символом $\mathscr{D}f(x_0)$. При этом опорные множества ∂p и ∂q принято называть соответственно *субдифференциалом* и *супердифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначать $\underline{\partial} f(x_0)$ и $\overline{\partial} f(x_0)$. Итак,

$$\mathscr{D}f(x_0) := [\partial p, \partial q] := [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)].$$

1.2. Рассмотрим векторную программу (C, f), т. е. многоцелевую экстремальную задачу

$$x \in C, \quad f(x) \to \inf,$$

где $C \subset X$ — некоторое множество, а $f : X \to E^{\bullet}$ — отображение, предполагаемое в дальнейшем квазидифференцируемым в нужной точке из $\operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$. Здесь $\operatorname{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < \infty\}$ означает эффективную область оператора f, а $\operatorname{core}(M)$ — алгебраическую внутренность множества M.

Точки $x \in C$ называют *допустимыми* точками задачи (C, f). Допустимая точка x_0 — *идеальный локальный оптимум* в программе (C, f), если существует множество $U \subset X$ такое, что $0 \in \operatorname{core}(U)$ и

$$f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in C \cap (x_0 + U)\}.$$

Следующая теорема дает необходимые условия экстремума в безусловной квазидифференцируемой задаче, т. е. при $C = X$, ср. [2].

Теорема [8, теорема 6.5.1 (1)]. *Пусть отображение $f : X \to E^{\bullet}$ квазидифференцируемо в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$. Если x_0 — идеальный локальный оптимум в безусловной задаче $f(x) \to \inf$, то $\overline{\partial} f(x_0) \subset \underline{\partial} f(x_0)$ или, что то же самое, $\mathscr{D}f(x_0) \geqslant 0$.*

1.3. Пусть X — векторное пространство, E и F — некоторые K-пространства, $f : X \to E^{\bullet}$ и $g : X \to F^{\bullet}$. Рассмотрим векторную программу вида (C, f), где $C := \{x \in X : g(x) \leqslant 0\}$, причем отображения f и g квазидифференцируемы в нужной точке. Эту программу мы будем обозначать символом (g, f).

(1) *Условие квазирегулярности.* Векторную программу (g, f) называют *квазирегулярной в точке* $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$, если выполнены условия:

(a) существуют сублинейный оператор Магарам $r : F \to E$ и поглощающее множество $U \subset X$ такие, что для любого $x \in x_0 + U$ выполняется $\pi_x f(x_0) \leqslant \pi_x f(x)$, где $\pi_x := [(r \circ g(x))^{-}]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r \circ g(x))^{-}$;

(b) для любых оператора $T \in \partial r(g(x_0))$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ выполняется $\pi T \circ \overline{\partial} g(x_0) \cap \pi T \circ \underline{\partial} g(x_0) = \varnothing$.

(2) Теорема [8, 6.5.5]. *Если допустимая точка $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} f)$ есть идеальный локальный оптимум квазирегулярной квазидифференцируемой задачи (g, f), то для любых $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial} g(x_0)$ существуют положительный ортоморфизм $\alpha \in \operatorname{Orth}^{+}(E)$ и оператор $\gamma \in L^{+}(F, E)$ такие, что совместна система условий*

$$\ker \alpha = \{0\}, \quad \gamma \circ g(x_0) = 0,$$
$$0 \in \alpha(\underline{\partial} f(x_0) - s) + \gamma \circ (\underline{\partial} g(x_0) - S).$$

1.4. Условие квазирегулярности 1.3 (2) можно ослабить. А именно, потребовать, чтобы выполнялось лишь условие 1.3 (2a). В этом случае необходимые условия экстремума на проекторе ρ, где $\rho := [(r \circ g(x_0))^{-}]$ — проектор на компоненту порожденную элементом $(r \circ g(x_0))^{-}$, будут иметь вид

$$0 \in \rho(\underline{\partial} f(x_0) - s).$$

А необходимые условия экстремума на проекторе ρ^d будут принципиально иными: для любых $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial} g(x_0)$

$$0 \in \rho^d(\underline{\partial} f(x_0) - s) + \rho^d \operatorname{cl} \operatorname{mix} \operatorname{cone}_E(\underline{\partial} g(x_0) - S),$$

где co означает выпуклую оболочку, mix — множество всех перемешиваний относительно $\mathfrak{P}(E)$, cl — замыкание относительно поточечной o-сходимости,

$$\operatorname{cone}_E(M) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} T_i \circ S_i : \ T_i : F \to E, \, T_i \geqslant 0, \ S_i : X \to F, \, S_i \in M, \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Этот факт установлен ниже (см. § 3) с использованием векторной теоремы о биполяре.

2. Векторная теорема о биполяре

В некоторых вопросах выпуклого анализа важную роль играет векторнозначная двойственность, представляющая собой пару векторных пространств с фиксированным билинейным оператором, принимающим свои значения из пространства Канторовича. Одним из центральных результатов возникающей при этом теории является теорема о биполяре (см, например, [**?**]).

2.1. Рассмотрим некоторое K-пространство E и вещественные векторные пространства X и Y. Пусть задан билинейный оператор $\langle\cdot|\cdot\rangle$ из $X \times Y$ в E. С этим оператором связаны бра-отображение $\langle\cdot| : X \to L(Y,E)$ и кет-отображение $|\cdot\rangle : Y \to L(X,E)$, определяемые следующими формулами:

$$\begin{aligned} \langle x| : y \mapsto \langle x|y\rangle \quad (x \in X, \ y \in Y), \\ |y\rangle : x \mapsto \langle x|y\rangle \quad (x \in X, \ y \in Y), \end{aligned}$$

где $L(U,V)$ — как обычно, множество всех линейных операторов из U в V. Нетрудно видеть, что бра-отображение и кет-отображение являются линейными операторами.

Двойственностью над E или E*-значной двойственностью* называют тройку $(X, Y, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, если соответствующие бра-отображение $\langle\cdot|$ и кет-отображение $|\cdot\rangle$ инъективны. В этой ситуации говорят также, что X и Y приведены в векторную двойственность оператором $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Часто этот оператор называют *каноническим билинейным оператором двойственности*, а саму двойственность обозначают $X \leftrightarrow Y$. Будем считать, что рассматриваемая двойственность отделима. Двойственность $(Y, X, \langle\cdot|\cdot\rangle')$, где $\langle y|x\rangle' := \langle x|y\rangle$ $(x \in X, \, y \in Y)$, отождествляют с $X \leftrightarrow Y$.

Подмножество $A \subset Y$ называется *слабо ограниченным*, если для любого $x \in X$ множество $\{\langle x|y\rangle : \, y \in A\}$ порядково ограничено в E.

2.2. Пусть $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — некоторое семейство в Y, а $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в булевой алгебре порядковых проекторов $\mathfrak{P}(E)$. Элемент $y \in Y$ называют *перемешиванием семейства* (y_ξ) *относительно* (π_ξ), если $\pi_\xi\langle x|y - y_\xi\rangle = 0$ для всех $x \in X$ и $\xi \in \Xi$. Нетрудно показать, что перемешивание единственно. Перемешивание семейства (y_ξ) относительно (π_ξ) обозначается символом $\operatorname{mix}(\pi_\xi y_\xi) := \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(\pi_\xi y_\xi)$. Множество всех перемешиваний $\operatorname{mix}(\pi_\xi y_\xi)$, где $(y_\xi) \subset C$, называется *циклической оболочкой* C и обозначается символом $\operatorname{mix}(C)$. Если $\operatorname{mix}(C) = C$, то C принято называть *циклическим*.

Множество $C \subset X$ называется *разложимым*, если для любого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и произвольного элемента $x \in C$ существует элемент $\pi x \in C$ такой, что $\pi\langle x|y\rangle = \langle \pi x|y\rangle$

и $\pi^\perp\langle x|y\rangle = 0$ для всех $y \in Y$, т. е. $x = \mathrm{mix}\{\pi x, \pi^\perp 0\}$. Таким образом, множество $C \subset X$ будет разложимым, если существует перемешивание $\mathrm{mix}(\pi_\xi y_\xi) \in C$ для каждого конечного семейства $(y_\xi) \subset C$ и для любого конечного разбиения единицы $(\pi_\xi) \in \mathfrak{P}(E)$. Если же существуют перемешивания $\mathrm{mix}(\pi_\xi y_\xi) \in C$ для любых слабо ограниченных семейств $(y_\xi) \subset C$ относительно произвольных разбиений единицы $(\pi_\xi) \in \mathfrak{P}(E)$, то говорят, что C *дизъюнктно полно*. Двойственность $X \leftrightarrow Y$ называют *разложимой* (*дизъюнктно полной*) по Y, если Y есть разложимое (дизъюнктно полное) множество.

2.3. Пусть A — подкольцо кольца $\mathrm{Orth}(E)$. Если на Y можно определить структуру модуля над A так, что каноническая билинейная форма $\langle\cdot|\cdot\rangle$ становится A-однородной по второй переменной, то говорят, что двойственность $X \leftrightarrow Y$ *допускает структуру A-модуля по Y* или что Y *допускает согласованную модульную структуру над A*.

Если двойственность $X \leftrightarrow Y$ над E разложима по Y, то она допускает согласованную модульную структуру по Y над кольцом конечнозначных разложений единицы в булевой алгебре $\mathfrak{P}(E)$. В частности, равенство $y = \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}\,\pi_\xi y_\xi$ имеет место в том и только в том случае, если

$$\langle x|y\rangle = \sum_{\xi\in\Xi}\langle x|\pi_\xi y_\xi\rangle \quad (x \in X).$$

2.4. Приведем пример векторнозначной двойственности, допускающей согласованную модульную структуру.

Пусть X — векторное пространство, E — K-пространство и пусть $L(X,E) \leftrightarrow X$ — двойственность над E. Канонический билинейный оператор определим формулой

$$\langle T|x\rangle := Tx \quad (T \in L(X,E),\ x \in X).$$

Очевидно, что двойственность $L(X,E) \leftrightarrow X$ дизъюнктно полна по $L(X,E)$.

Рассмотрим пространство $W := L(L(X,E),E)$ и определим вложение $x \mapsto \bar{x}$ пространства X в W по формуле:

$$\bar{x} : L(X,E) \to E, \quad \bar{x}(T) := Tx \ \ (T \in L(X,E),\ x \in X).$$

Будем писать $W \supset X$, так как указанное вложение является инъективным. Как видно, W является модулем над $A := \mathrm{Orth}(E)$, следовательно, двойственность $L(X,E) \leftrightarrow W$ допускает согласованную модульную структуру над A. Обозначим через $\overline{X}$ модуль натянутый на X с операциями, индуцированными из W. Тогда двойственность $L(X,E) \leftrightarrow \overline{X}$ также имеет согласованную модульную структуру по $\overline{X}$ над A и дизъюнктно полна по $L(X,E)$.

2.5. Введем теперь полярные множества относительно векторной двойственности. Пусть E — некоторое K-пространство с единицей $\mathbf{1}$ и $X \leftrightarrow Y$ — произвольная E-значная двойственность. *Полярой* C° множества $C \subset X$ называют множество, определяемое формулой:

$$C^\circ := \big\{y \in Y : \langle x|y\rangle \leqslant \mathbf{1},\ x \in C\big\}.$$

Множество $C^{\circ\circ} := (C^\circ)^\circ$ называют *биполярой* C. Для всякого подмножества $C \subset X$ поляра C° является слабо замкнутым циклическим коническим отрезком. Напомним, что *коническим отрезком* называют выпуклое множество, содержащее нуль. Если K — конус, то поляра K° вычисляется по формуле

$$K^\circ := \{y \in Y : \langle x|y\rangle \leqslant 0,\ x \in K\}.$$

2.6. Теорема о биполяре ([6]). *Пусть $X \leftrightarrow Y$ — это E-значная двойственность, дизъюнктно полная по X и допускающая согласованную модульную структуру по Y над кольцом $\mathrm{Orth}(E)$. Биполяра произвольного множества $C \subset X$ совпадает со слабым замыканием циклической оболочки множества $\mathrm{co}(C \cup \{0\})$. Символически:*

$$C^{\circ\circ} = \mathrm{cl}(\mathrm{mix}(\mathrm{co}(C \cup \{0\}))),$$

где cl *— операция слабого замыкания.*

3. Основной результат

3.1. Пусть F еще одно пространство Канторовича, $l : X \to E^{\bullet}$ и $L : X \to E^{\bullet}$ — квазилинейные операторы. Рассмотрим квазилинейную экстремальную задачу (L, l):

$$l(h) \to \inf, \quad L(h) \leqslant 0.$$

3.2. Теорема. *Для квазилинейной задачи (L, l) следующие утверждения равносильны:*

(1) 0 *— решение задачи (L, l);*

(2) $(\forall s \in \overline{\partial} l)(\forall S \in \overline{\partial} L)\ 0 \in (\underline{\partial} l - s) + \mathrm{cl}\,\mathrm{mix}\,\mathrm{cone}(\underline{\partial} L - S)$.

$\lhd$ В силу квазилинейности l и L существуют сублинейные операторы p, q, P и Q такие, что $l(h) = p(h) - q(h)$ и $L(h) = P(h) - Q(h)$. Заметим, что нуль будет решением задачи (L, l) тогда и только тогда, когда $(\forall h \in X)$ из $L(h) \leqslant 0$ следует $l(h) \geqslant l(0) = 0$. Или, что то же самое

$$p(h) - q(h) \geqslant 0 \quad (\forall h \in C),$$

где $C := \{h : P(h) - Q(h) \leqslant 0\}$.

Для $S \in \partial Q$ обозначим через $C_S := \{h : P(h) - S(h) \leqslant 0\}$ и заметим, что $C = \bigcup_{S \in \partial Q} C_S$, а $C_S = (\mathrm{cone}(\partial P - S))^{\circ}$, где $\mathrm{cone}(M)$ — коническая оболочка множества M. В этих обозначениях необходимые условия примут вид

$$(\forall s \in \partial q)(\forall S \in \partial Q) \quad p(h) - s(h) \geqslant 0, \quad h \in C_S,$$

где C_S — выпуклый конус. Обозначим через $\delta(C_S)$ E-значный индикаторный оператор множества C_S, тогда

$$(\forall s \in \partial q)(\forall S \in \partial Q) \ \ p(h) - s(h) + \delta(C_S)(h) \geqslant 0, \quad h \in X.$$

Воспользовавшись двойственностью Минковского, получаем

$$(\forall s \in \partial q)(\forall S \in \partial Q) \quad 0 \in \partial p - s + \partial\delta(C_S) = \partial p - s + C_S^{\circ},$$

где $\partial\delta(C_S) := C_S^{\circ} := \{T : Tx \leqslant 0\ \forall x \in C_S\}$ — поляра конуса C_S.

Так как E-значная двойственность $L(X, E) \leftrightarrow \overline{X} \supset X$, дизъюнктно полна по $L(X, E)$ и имеет согласованную модульную структуру по $\overline{X}$ над кольцом $\mathrm{Orth}(E)$ (см. 2.4), то для множества $\overline{\Omega}$, где $\overline{\Omega} := \{\overline{T} : T \in \Omega\}$, $\Omega := \mathrm{cone}(\partial P - S) \subset L(X, E)$ и $\overline{T}u := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T x_i$ при $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i$, выполнены все условия векторной теоремы о биполяре 2.6. Далее, заметив, что слабая замкнутость $\overline{\Omega}$ в $\overline{X}$ равносильна поточечной замкнутости Ω в X, получаем

$$C_S^{\circ} = (\mathrm{cone}(\partial P - S))^{\circ\circ} = \mathrm{cl}\,\mathrm{mix}\,\mathrm{cone}(\partial P - S) = \mathrm{cl}\,\mathrm{mix}\,\mathrm{cone}(\underline{\partial} L - S). \ \rhd$$

3.3. Пусть $f : X \to E^{\bullet}$ и $g : X \to F^{\bullet}$ — квазидифференцируемые в нужной точке операторы. Рассмотрим квазидифференцируемую векторную программу (g, f), т. е. экстремальную задачу

$$f(x) \to \inf, \quad g(x) \leqslant 0.$$

(1) *Условие слабой квазирегулярности.* Квазидифференцируемую векторную программу (g, f) назовем *слабо π-квазирегулярной в точке* x_0, где π-порядковой проектор в E, если существуют возрастающий сублинейный оператор $r : F \to E$ и поглощающее множество $U \subset X$ такие, что выполняются условия

(a) $r(e_n) \downarrow 0$ для любой последовательности $(e_n) \subset F$, $e_n \downarrow 0$;

(b) для любого $x \in x_0 + U$ выполняется неравенство $\pi_x f(x_0) \leqslant \pi_x f(x)$, где $\pi_x := [(r \circ g(x))^-]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r \circ g(x))^-$;

(c) $\pi \leqslant [r \circ g(x_0)]$.

Условие слабой квазирегулярности выполняется, если, например, существует такой возрастающий o-непрерывный сублинейный оператор $r : F \to E$, что для любого $x \in X$ из $g(x) \nleqslant 0$ следует $r \circ g(x) \geqslant 0$.

3.4. Теорема. *Если допустимая точка x_0 есть идеальный локальный оптимум в слабо π-квазирегулярной квазидифференцируемой (в точке x_0) векторной программе (g, f), то для любых $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial} g(x_0)$ будет*

$$0 \in (\underline{\partial} f(x_0) - s) + \pi^d \operatorname{cl} \operatorname{mix} \operatorname{cone}_E(\underline{\partial} g(x_0) - S).$$

$\lhd$ Положим $\tilde{f} := f - f(x_0)$ и $\tilde{g} := r \circ g$, где отображение r удовлетворяет условию 3.3 (1). Введем штраф

$$\varphi := \tilde{f} \vee \tilde{g}.$$

Как видно, допустимая точка x_0 будет идеальным локальным оптимумом в векторной программе (g, f) тогда и только тогда, когда эта точка локально оптимальна в безусловной задаче $\varphi(x) \to \inf$. В силу квазидфференцирумости производной по направлениям композиции и максимума отображение φ дифференцируемо по направлениям. Поэтому если x_0 — идеальный оптимум задачи (g, f), то согласно доказательству теоремы 6.5.1 из [8]

$$\varphi'(x_0)h \geqslant 0 \quad (h \in X).$$

Воспользовавшись формулой вычисления производной по направлениям максимума из (см. [8, 6.3.5]), получаем

$$\varphi'(x_0)h = \bigvee_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})} \Big(\tilde{\alpha} f'(x_0)h + \tilde{\beta} \tilde{g}'(x_0)h \Big) \quad (h \in X),$$

где

$$\Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g}) = \{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \operatorname{Orth}^+(E) : \ \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E, \ \tilde{\alpha} \tilde{f}(x_0) + \tilde{\beta} \tilde{g}(x_0) = 0\}.$$

Включение $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})$ означает, что

$$0 = \varphi(x_0) = \tilde{\alpha} \tilde{f}(x_0) + \tilde{\beta} \tilde{g}(x_0) = \tilde{\beta} \tilde{g}(x_0).$$

Следовательно, имеет место представление

$$\Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g}) = \{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \operatorname{Orth}^+(E) : \ \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E, \ \tilde{\beta} \tilde{g}(x_0) = 0\}.$$

Пусть ρ — проектор на компоненту, порожденную элементом $\tilde{g}(x_0)$ (т. е. $\rho\tilde{g}(x_0) < 0$, а $\rho^d\tilde{g}(x_0) = 0$). Используя найденное представление для $\Gamma_2(x_0;\tilde{f},\tilde{g})$, находим, что $\Gamma_2(x_0;\rho\tilde{f},\rho\tilde{g}) = \{(\rho,0)\}$ и

$$\Gamma_2(x_0;\rho^d\tilde{f},\rho^d\tilde{g}) = \{(\rho^d\tilde{\alpha},\rho^d\tilde{\beta}):\ (\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\in\mathrm{Orth}^+(E),\ \tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=I_E\}.$$

Таким образом, привлекая [8, 2.1.5 (3)], заключаем

$$\rho^d\varphi'(x_0)h = \rho^d \bigvee_{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=I_E} \bigl(\tilde{\alpha}f'(x_0)h + \tilde{\beta}\tilde{g}'(x_0)h\bigr) =$$

$$= \rho^d\bigl(f'(x_0)h \vee \tilde{g}'(x_0)h\bigr) = \rho^d f'(x_0)h \vee \rho^d\tilde{g}'(x_0)h,$$

$$\rho\varphi'(x_0)h = \rho f'(x_0)h \quad (h\in X).$$

В силу квазидифференцируемости g существуют сублинейные операторы P и Q такие, что $g'(x_0)h = P(h) - Q(h)$. А согласно [8, 6.3.2], условию (a) слабой квазирегулярности и формуле [8, 6.3.3] для вычисления производной по направлениям композиции квазидифференцируемых операторов, имеем $\tilde{g}'(x_0)h = r'(g(x_0))\circ g'(x_0)h$.

Заметим, что 0 — есть решение безусловной задачи

$$\phi(h) := \rho^d\varphi'(x_0)h = \rho^d f'(x_0)h \vee \rho^d\tilde{g}'(x_0)h \to \inf, \quad h\in X,$$

т. е. $\phi(h) \geqslant 0$ для любого $h\in X$ или, что то же самое

$$(\forall S\in\partial Q)\quad \rho^d f'(x_0)h \vee \rho^d r'(g(x_0))\circ(P(h)-S(h)) \geqslant 0, \quad h\in X.$$

Таким образом, 0 — решение квазилинейной векторной программы (l,L):

$$l(h) := \rho^d f'(x_0)(h) \to \inf,$$
$$L(h) := \rho^d r'(g(x_0))\circ(P(h)-S(h)) \leqslant 0$$

для любого $S\in\partial Q = \overline{\partial}g(x_0)$. Отсюда, применяя теорему 3.2, и подставляя вместо l и L их значения, на проекторе ρ^d получаем

$$(\forall s\in\overline{\partial}f(x_0))\quad (\forall S\in\overline{\partial}g(x_0))$$

$$0\in\rho^d(\underline{\partial}f(x_0)-s) + \rho^d\,\mathrm{cl}\,\mathrm{mix}\,\mathrm{cone}\bigcup_{T\in\partial r(g(x_0))}\underline{\partial}(T\circ(P(h)-S(h)))$$

$$\subset \rho^d(\underline{\partial}f(x_0)-s) + \rho^d\,\mathrm{cl}\,\mathrm{mix}\,\mathrm{cone}_E(\underline{\partial}g(x_0)-S),$$

так как

$$\mathrm{cone}\bigcup_{T\in\partial r(g(x_0))}\partial(T\circ(P-S)) \subset \mathrm{cl}\,\mathrm{mix}\,\mathrm{cone}_E(\underline{\partial}P-S).$$

Последнее включение имеет место в силу теоремы о внутренней характеризации субдифференциалов, см. [8, теорема 2.4.12].

Далее, для проектора ρ при любом $s\in\overline{\partial}f(x_0)$ будет

$$0\in\rho(\underline{\partial}f(x_0)-s).$$

Осталось сложить два вхождения, содержащие ρ и ρ^d, и необходимые условия примут вид

$$(\forall s\in\overline{\partial}f(x_0))\quad (\forall S\in\overline{\partial}g(x_0))$$

$$0\in(\underline{\partial}f(x_0)-s) + \rho^d\,\mathrm{cl}\,\mathrm{mix}\,\mathrm{cone}_E(\underline{\partial}g(x_0)-S).$$

Отсюда следует требуемое, так как $\pi\leqslant\rho$. $\rhd$

Литература

1. *Басаева Е. К.* Квазидифференциалы в K-пространствах // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 3.—С. 14–30.
2. *Басаева Е. К.* Необходимые условия экстремума в векторных квазидифференцируемых программах // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, вып. 1.—С. 13–25.
3. *Басаева Е. К., Кусраев А. Г.* О квазидифференциале композиции // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 4.—С. 10–25.
4. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.—М.: Наука, 1990.—432 с.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.
6. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
7. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
8. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление: теория и приложения.—М.: Наука, 2007.–560 с.

Статья поступила 20 июля 2008 г.

Басаева Елена Казбековна
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
362027, Владикавказ, РОССИЯ
E-mail: helen@smath.ru