Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 2, С. 9–20

УДК **512.5**

АЛЬТЕРНАТИВНОЕ 2-МЕРНОЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ГРУППА ЛИ ЗАМЕН БАЗИСОВ ПРОСТРАНСТВА

А. И. Долгарев, И. А. Долгарев

Определено 2-мерное линейное действительное пространство, операции над векторами которого заданы нелинейными формулами. Это пространство составляет альтернативу классическому линейному пространству. Изучаются алгебраические структуры замен базисов линейных пространств — группы Ли и одули Ли. Замены базисов классического пространства составляют некоммутативный одуль Ли, замены альтернативного пространства составляют некоммутативную группу Ли с инвариантной подгруппой линейных замен.

Ключевые слова: альтернативное линейное пространство.

1. Альтернативное линейное пространство на многообразии $\mathbf{R}^2$

1.1. Определение другого линейного пространства на $\mathbf{R}^2$. Обычное линейное пространство на многообразии $\mathbf{R}^2$ задается операциями

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v);\quad t(x,y)=(xt,yt),\quad t\in\mathbf{R}. \tag{1}$$

Для приведенных операций на многообразии $\mathbf{R}^2$ выполняются аксиомы линейного пространства. Множество $\mathbf{R}^2$ с операцией сложения, т. е. структура $(\mathbf{R}^2,+)$ является абелевой группой Ли. С операцией сложения связана операция умножения на действительные числа, обозначаем ее $\omega_R(+)$. Структура на носителе $\mathbf{R}^2$ с операциями (1) $+$ и $\omega_R(+)$ является линейным пространством над $\mathbf{R}$, обозначаем ее $\mathbf{L}^2=(\mathbf{R}^2,+,\omega_R(+))$. Векторы из $\mathbf{L}^2$ обозначаются $\vec a,\vec b,\dots,\vec x,\dots$ Линейность структуры $(\mathbf{R}^2,+,\omega_R(+))$ с операциями (1) обусловлена свойствами

$$t(\vec x+\vec u)=t\vec x+t\vec u,\quad (t+s)\vec x=t\vec x+t\vec u. \tag{2}$$

Умножение вектора на число можно понимать как оператор $f_a(\vec x)=a\vec x$. Этот оператор обладает свойством линейности

$$f_a(t\vec x+s\vec u)=tf_a(\vec x)+sf_a(\vec u),$$

совпадающим с первым из свойств (2) при $a=1$. Операции (1) называются линейными.

В [1, с. 242–244] и [2] приведены 2-мерные линейные пространства с операциями, не такими, как (1); для того, чтобы эти операции отличать от (1), в [1] использованы другие символы операций. На множестве пар $\mathbf{R}^2$ рассмотрим одно из пространств из [1], употребляя обычные обозначения операций. Это пространство обозначаем ${}^a\mathbf{L}^2$, пары из пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ обозначаем $\alpha, \beta, \dots, \tau, \sigma, \dots$ Пусть $\tau = (x, y), \sigma = (u, v)$ две произвольные пары. Относительно введенных операций (3) и (4) пары из ${}^a\mathbf{L}^2$ называются векторами. Операция сложения векторов из ${}^a\mathbf{L}^2$ такова:

$$\tau + \sigma = (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v + xu). \tag{3}$$

Внешняя операция на структуре $({}^a\mathbf{L}^2, +)$ задается равенством

$$t\tau = t(x, y) = \left(xt, yt + x^2\frac{t(t-1)}{2}\right), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Векторы из ${}^a\mathbf{L}^2$ *равны*, если и только если равны их соответствующие компоненты.

Теорема 1. *Многообразие* $\mathbf{R}^2$ *с операциями* (3) *и* (4), *т. е. структура* ${}^a\mathbf{L}^2 = (\mathbf{R}^2, +, \omega_R(+))$ *является 2-мерным линейным пространством над* $\mathbf{R}$; *в частности, выполняются условия линейности:*

$$t(\tau + \sigma) = t\tau + t\sigma, \quad (t + s)\tau = t\tau + s\tau.$$

$\triangleleft$ Сложение (3) коммутативно. Нулевым является вектор $\vartheta = (0, 0)$. Противоположный для вектора $\tau = (x, y)$ есть вектор

$$-\tau = -(x, y) = (-x, x^2 - y). \tag{5}$$

Легко проверяется ассоциативность сложения, $\rho = (z, w)$ еще один вектор:

$$\begin{gathered}(\tau + \sigma) + \rho = ((x, y) + (u, v)) + (z, w) \\ = (x + u, y + v + xu) + (z, w) = (x + u + z, y + v + w + xu + (x + u)z), \\ \tau + (\sigma + \rho) = (x, y) + ((u, v) + (z, w)) \\ = (x, y) + (u + z, v + w + uz) = (x + u + z, y + v + w + uz + x(u + z)).\end{gathered}$$

Результирующие пары в рассмотренных суммах оказались одинаковыми. Таким образом, структура $({}^a\mathbf{L}^2, +)$ — множество $\mathbf{R}^2$ с операцией сложения (3), есть абелева группа Ли.

Остальные аксиомы линейного пространства для $\mathbf{R}^2$ с операциями (3) и (4) выполняются. Проверим, например, выполнимость равенства $t(\tau + \sigma) = tv + t\rho$. Воспользуемся определением операции (4). Имеем:

$$\begin{aligned}t(\tau + \sigma) &= t((x, y) + (u, v)) = t(x + u, y + v + xu) \\ &= \left((x + u)t, (y + v + xu)t + (x + u)^2\frac{t(t-1)}{2}\right) \\ &= \left((x + u)t, (y + v)t + xut + (x^2 + u^2)\frac{t(t-1)}{2} + t(t-1)xu\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}tv + t\sigma = t(x, y) + t(u, v) &= \left(xt, yt + x^2\frac{t(t-1)}{2}\right) + \left(ut, vt + u^2\frac{t(t-1)}{2}\right) \\ &= \left(xt + ut, yt + vt + x^2\frac{t(t-1)}{2} + u^2\frac{t(t-1)}{2} + xut^2\right).\end{aligned}$$

Сравнивая результаты вычислений, убеждаемся в справедливости доказываемого равенства. $\triangleright$

Линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$ с операциями (3) и (4) альтернативно линейному пространству $\mathbf{L}^2$ с операциями (1).

Результаты линейных операций (3) и (4) во второй компоненте зависят от первой компоненты векторов из ${}^a\mathbf{L}^2$. Согласно [1, с. 109–110], первая компонента векторов из ${}^a\mathbf{L}^2$ является ведущей в операциях. В операциях (1) на классическом линейном пространстве $\mathbf{L}^2$ ведущих компонент нет. В некоммутативном нильпотентном одуле Ли, который называется сибсоном, имеется 2-мерный подсибсон, являющийся линейным пространством, операции над векторами в подсибсоне такие же как (3) и (4), [1, с. 118 и с. 168]; в [1] это линейное пространство только упоминается, но не изучается; оно изучается ниже.

Мы приходим к следующим выводам:

(а) Линейное пространство на многообразии $\mathbf{R}^2$ определяется не единственным образом.

(б) Линейные пространства $\mathbf{L}^2$ и ${}^a\mathbf{L}^2$ не изоморфны. Действительно, пусть вектор $\vec{x} = (x, y)$ из $\mathbf{L}^2$ соответствует вектору $\tau = (x, y)$ из ${}^a\mathbf{L}^2$ во взаимно однозначном отображении φ между ${}^a\mathbf{L}^2$ и $\mathbf{L}^2$, т. е. $\vec{x}\varphi = \tau$ — соответствуют один другому векторы из рассматриваемых пространств с одними и теми же компонентами. Пусть еще $\vec{u} = (u, v)$, $\vec{u}\varphi = \sigma = (u, v) \in^a \mathbf{L}^2$. Имеем:

$$(\vec{x} + \vec{u})\varphi \neq \vec{x}\varphi + \vec{u}\varphi = \tau + \sigma = (x + u, y + v + xu).$$

1.2. Некоторые свойства пространства ${}^a\mathbf{L}^2$. Оболочкой $\langle \upsilon \rangle$ вектора $\upsilon = (x, y)$, как известно, называется множество векторов $\langle \upsilon \rangle = \{t\upsilon, t \in \mathbf{R}\}$. Для вектора $\alpha = (1, 0)$ оболочка $\langle \alpha \rangle$, согласно (4), состоит из векторов

$$t\alpha = \left(t, \frac{t(t-1)}{2}\right), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

При $t \neq 0$, $t \neq 1$, векторы $t\alpha$ двухкомпонентны в том смысле, что обе компоненты векторов отличны от нуля. В $\langle \alpha \rangle$ входят векторы

$$(0, 0); \quad (1, 0); \quad (2, 1); \quad (3, 3); \quad (4, 6); \ldots$$

Но в оболочке $\langle \alpha \rangle$ нет, например, векторов $(2, 2)$; $(1, 2)$ и т. д. Оболочка $\langle \alpha \rangle$ не исчерпывает пространства ${}^a\mathbf{L}^2$. Геометрически векторы из $\langle \alpha \rangle$ можно представить точками параболы на аффинной плоскости $\mathbf{A}^2$:

$$x = t, \quad y = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Для вектора $\beta = (0, 1)$ оболочка $\langle \beta \rangle$ состоит из векторов

$$t\beta = (0, t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Геометрическое представление этой оболочки есть прямая аффинной плоскости $\mathbf{A}^2$, параллельная координатной оси с единичным вектором $(0, 1)$.

Теорема 2. *Упорядоченное множество векторов* Б$= (\alpha, \beta)$, *где* $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (0, 1)$, *является базисом линейного пространства* ${}^a\mathbf{L}^2$.

$\triangleleft$ Векторы α, β линейно независимы, т. е. $\langle \alpha \rangle \cap \langle \beta \rangle = \langle \vartheta \rangle$. Всякий вектор $\upsilon = (x, y)$ обладает однозначным разложением

$$\upsilon = (x, y) = x\alpha + \left(y - \frac{x(x-1)}{2}\right)\beta, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

В правой части разложения (7) имеем, согласно (4) и (3):

$$x\alpha + \left(y - \frac{x(x-1)}{2}\right)\beta = x(1,0) + \left(y - \frac{x(x-1)}{2}\right)(0,1)$$
$$= \left(x, \frac{x(x-1)}{2}\right) + \left(0, y - \frac{x(x-1)}{2}\right) = \left(x, \frac{x(x-1)}{2} + y - \frac{x(x-1)}{2}\right) = (x,y).$$

Таким образом, линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$ является оболочкой векторов α, β: ${}^a\mathbf{L}^2 = \langle\alpha,\beta\rangle$. $\triangleright$

1-мерные подпространства и 1-мерные многообразия (смежные классы по 1-мерным подпространствам) составляют сеть линейного пространства [1, 2]. Сеть можно описать покомпонентными равенствами векторов, составляющих 1-мерные многообразия — сетевыми уравнениями линейного пространства.

Теорема 3. *Линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$ имеет следующие сетевые уравнения*

$$x = ct + d, \quad y = c^2\frac{t(t-1)}{2} + (dc + c_1)t + d_1 \quad (c \neq 0);$$

или, при $c = 0$:

$$x = d, \quad y = c_1 t + d_1.$$

$\triangleleft$ Пусть $\sigma = (c, c_1)$ произвольный вектор из ${}^a\mathbf{L}^2$, тогда $\langle\sigma\rangle$ есть 1-мерное подпространство в ${}^a\mathbf{L}^2$ и $\delta + \langle\sigma\rangle$ — 1-мерное линейное многообразие в ${}^a\mathbf{L}^2$. Обозначим $\delta = (d, d_1)$. Всякий вектор $\upsilon = (x,y)$ из многообразия $\delta + \langle\sigma\rangle$ равен $\upsilon = \delta + t\sigma$. Подставим в это равенство координаты векторов и сравним соответствующие компоненты различных частей равенства. Получаем записанные выше сетевые уравнения, см. [1, с. 246] и [2]. $\triangleright$

Уравнения сети пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ при $c \neq 0$ нелинейны, они представляются параболами 2-го порядка; при $c = 0$ имеем линейные уравнения.

Сетевые уравнения классического линейного пространства $\mathbf{L}^2$ все являются линейными. Для сравнения приведем их. Пусть $\vec{c} = (c^1, c^2)$, $\vec{d} = (d^1, d^2)$ — произвольные векторы из $\mathbf{L}^2$, $\vec{d} + \langle\vec{c}\rangle$ есть 1-мерное линейное многообразие в $\mathbf{L}^2$. Всякий вектор $\vec{x} = (x^1, x^2)$ рассматриваемого многообразия равен $\vec{x} = \vec{d} + t\vec{c}$. Покомпонентные равенства, записанные по этому векторному равенству, дают сетевые уравнения [2], линейного пространства $\mathbf{L}^2$:

$$x = c^1 t + d^1, \quad x^2 = c^2 t + d^2.$$

Уравнения линейны.

2. Одуль Ли и группа Ли замен базисов линейных пространств

2.1. Замена базиса в классическом линейном пространстве $\mathbf{L}^2$. В линейном пространстве $\mathbf{L}^2$ вместе с базисом **Б** $= (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, где $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$, рассматривается базис **Б**$' = (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2)$, где $\vec{e}\,'_1 = (c_1^1, c_1^2)$, $\vec{e}\,'_2 = (c_2^1, c_2^2)$; векторы $\vec{e}\,'_1$ и $\vec{e}\,'_2$ неколлинеарны. Пусть (x,y) — координаты вектора $\vec{x}$ в базисе **Б**, (x', y') — координаты вектора $\vec{x}$ в базисе **Б**$'$. Формулы замены координат векторов при переходе от базиса **Б** к базису **Б**$'$ и матрица замены базиса, как известно, таковы:

$$\begin{cases} x = c_1^1 x' + c_2^1 y', \\ y = c_1^2 x' + c_2^2 y'; \end{cases} \quad C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}, \quad \det C \neq 0.$$

2.2. Одуль Ли замен базисов пространства $\mathbf{L}^2$. Для замен базисов классического линейного пространства $\mathbf{L}^2$ выполняется следующая

Теорема 4. *Множество всех замен базисов классического линейного пространства $\boldsymbol{L}^2$ относительно композиции замен является группой Ли, изоморфной полной линейной группе $GL(2,\boldsymbol{R})$ квадратных матриц 2-го порядка; это 4-параметрическая группа Ли.*

$\triangleleft$ Зададим еще одну замену базиса в $\mathbf{L}^2$: базис $\mathbf{Б}'$ заменим базисом $\mathbf{Б}'' = (\vec{e}_1'', \vec{e}_2'')$, векторы $\vec{e}_1''$, $\vec{e}_2''$ заданы в базисе $\mathbf{Б}'$: $\vec{e}_1'' = (d_1^1, d_1^2)$, $\vec{e}_2'' = (d_2^1, d_2^2)$, и в базисе $\mathbf{Б}''$ задан $\vec{x} = (x'', y'')$. Имеем формулы замены координат векторов при переходе от базиса $\mathbf{Б}'$ к базису $\mathbf{Б}''$ и матрицу замены базиса:

$$\begin{cases} x = d_1^1 x' + d_2^1 y', \\ y = d_1^2 x' + d_2^2 y'; \end{cases} \qquad D = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix}, \quad \det D \neq 0.$$

Выполним последовательно две замены базисов, т. е. композицию замен: φ: $\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'$ (базис $\mathbf{Б}$ заменяется базисом $\mathbf{Б}'$) и ψ: $\mathbf{Б}' \to \mathbf{Б}''$, $\phi = \varphi\psi : \mathbf{Б} \to \mathbf{Б}''$. Получаем формулы замены с матрицей F:

$$\begin{cases} x = (c_1^1 d_1^1 + c_2^1 d_1^2)x'' + (c_1^1 d_2^1 + c_2^1 d_2^2)y'', \\ y = (c_1^2 d_1^1 + c_2^2 d_1^2)x'' + (c_1^2 d_2^1 + c_2^2 d_2^2)y''; \end{cases} \qquad F = CD, \quad \det F \neq 0.$$

Композиции замен базисов соответствует произведение матриц замен. Композиция замен базисов ассоциативна, поскольку произведение их матриц ассоциативно. Тождественной замене базиса $\vartheta : \mathbf{Б} \to \mathbf{Б}$ соответствует единичная матрица E, замене φ^{-1}: $\mathbf{Б}' \to \mathbf{Б}$ соответствует матрица C^{-1}. $\triangleright$

Алгебраическая структура линейного пространства обобщается алгебраической структурой, которая называется *одулем*. Одули введены Л. В. Сабининым в [3]: одуль над кольцом $\mathbf{K}$ на алгебраической структуре Ω получается в результате введения на структуре Ω внешней операции умножения элементов структуры Ω на скаляры из $\mathbf{K}$. Если $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbf{K}$, то определяется элемент $t\omega$, принадлежащий Ω. Требуется выполнение аксиом одуля:

$$s(t\omega) = (st)\omega, \quad (s+t)\omega = s\omega + t\omega$$

для всех $\omega \in \Omega$, $t, s \in \mathbf{K}$. Если Ω структура с нейтральным элементом ϑ, то еще выполняется равенство $t\vartheta = \vartheta$.

Одули Ли определены в [1] в результате введения внешней операции умножения элементов группы Ли на действительные числа.

Теорема 5. *Множество всех замен базисов линейного пространства $\mathbf{L}^2$ является 4-мерным одулем Ли.*

$\triangleleft$ В [4] дано описание одуля Ли аффинных преобразований аффинной плоскости $\mathbf{A}^2$. Аффинному преобразованию плоскости соответствует матрица из $GL(2,\mathbf{R})$. Согласно [4], каждая матрица из $GL(2,\mathbf{R})$ является представлением либо ненулевого комплексного числа $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $i^2 = -1$; либо двойного числа, записываемого в виде $z = r(\operatorname{ch}\alpha + i\operatorname{sh}\alpha)$, $i^2 = 1$; либо дуального числа, записываемого в виде $z = r(1 + i\alpha)$, $i^2 = 0$, $r > 0$. Среди указанных 2-мерных чисел нет делителей нуля. Числа каждого вида составляют мультипликативную группу 2-мерных чисел. Для рассматриваемых чисел определены операции возведения в действительную степень

$$z^t = (r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^t = r^t(\cos t\alpha + i\sin t\alpha);$$
$$z^t = (r(\operatorname{ch}\alpha + i\operatorname{sh}\alpha))^t = r^t(\operatorname{ch} t\alpha + i\operatorname{sh} t\alpha);$$
$$z^t = (r(1 + i\alpha))^t = r^t(1 + it\alpha).$$

В результате получаются 2-мерные мультипликативные линейные пространства. Степени 2-мерного числа соответствует степень матрицы из $GL(2,\mathbf{R})$. Тем самым на группе Ли $GL(2,\mathbf{R})$ определен одуль Ли (одули Ли рассматриваются в [1]). Заменам базисов пространства $\mathbf{L}^2$ тоже соответствуют матрицы из $GL(2,\mathbf{R})$, это означает, что одуль Ли аффинных преобразований аффинной плоскости содержит пододуль Ли замен базисов пространства $\mathbf{L}^2$. Степени C^t матрицы C соответствует степень φ^t замены базиса **Б** базисом **Б**$'$. Формулы замен зависят от четырех параметров, т. е. одуль Ли является 4-мерным. Тем самым, получено уточнение теоремы 4. $\triangleright$

Одуль Ли замен базисов пространства $\mathbf{L}^2$ обозначим $\mathbf{\Phi}$.

Теорема 6. *Одуль Ли* $\mathbf{\Phi}$ *замен базисов линейного пространства* $\mathbf{L}^2$ *порождается родственными преобразованиями и растяжениями с подпространствами инвариантных векторов* $\langle\vec{e}_1\rangle, \langle\vec{e}_2\rangle$ *— оболочками векторов базиса* **Б**.

$\triangleleft$ Параметры замены φ базиса линейного пространства $\mathbf{L}^2$ обозначим u, v, w, z; они могут изменяться непрерывно. В этих обозначениях формулы замены φ имеют вид

$$\varphi : \begin{cases} x = ux' + vy', \\ y = wx' + zy'; \end{cases} \quad C = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}, \quad \det C \neq 0.$$

Рассмотрим 1-мерные пододули одуля Ли Φ. Обозначим Φ_u одуль Ли замен по формулам

$$\varphi_u : \begin{cases} x = ux', \\ y = y'; \end{cases} \quad C_u = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det C_u \neq 0.$$

Это одуль Ли растяжений с подпространством $\langle\vec{e}_2\rangle$ инвариантных векторов. Пусть Φ_v есть одуль Ли замен

$$\varphi_v : \begin{cases} x = x' + vy', \\ y = y'; \end{cases} \quad C_v = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det C_v \neq 0.$$

Это одуль Ли родственных преобразований с подпространством $\langle\vec{e}_1\rangle$ инвариантных векторов. Φ_w есть одуль Ли замен

$$\varphi_w : \begin{cases} x = x', \\ y = wx' + y'; \end{cases} \quad C_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix}, \quad \det C_w \neq 0.$$

Это одуль Ли родственных преобразований с подпространством $\langle\vec{e}_2\rangle$ инвариантных векторов. Наконец, Φ_z есть одуль Ли замен

$$\varphi_z : \begin{cases} x = x', \\ y = zy'; \end{cases} \quad C_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad \det C_u \neq 0$$

— одуль Ли растяжений с подпространством $\langle\vec{e}_1\rangle$ инвариантных векторов.

Имеем

$$C_w C_z C_v C_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ uw & z \end{pmatrix}.$$

Следовательно, одуль Ли Φ порождается 1-мерными пододулями $\Phi_u, \Phi_v, \Phi_w, \Phi_z$. Сомножители $\Phi_u, \Phi_v, \Phi_w, \Phi_z$ неперестановочны. (Здесь важно,что в левом нижнем углу последней матрицы находится число, отличное от других трех элементов матрицы.) $\triangleright$

Заметим, что одуль Ли аффинных преобразований плоскости порождается не только родственными преобразованиями и растяжениями, оси которых совпадают с осями координат.

Отметим еще одно свойство матриц C_v и C_w.

Теорема 7. *Одуль Ли замен базисов линейного пространства* $\mathbf{L}^2$ *порождается мультипликативными линейными пространствами дуальных чисел и 1-мерными мультипликативными линейными пространствами действительных чисел.*

$\lhd$ Матрицами C_v и C_w представляются дуальные числа $1+iv$, $i^2=0$ и соответственно $1+iw$, $i^2=0$. Справедливы равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v+v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & vt \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w+w' & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ wt & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, множество $\{C_v, v \in \mathbf{R}\}$ всех матриц вида C_v и множество родственных преобразований $\{\varphi_v, v \in \mathbf{R}\}$ представляются мультипликативным линейным пространством дуальных чисел модуля 1 и множество сдвигов $\{\varphi_w, w \in \mathbf{R}\}$ представляются мультипликативным линейным пространством дуальных чисел модуля 1. Матрицы $C_u = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ обладают свойствами

$$C_u C_{u'} = C_{uu'}, \quad C_z C_{z'} = C_{zz'},$$

поэтому множества матриц $\{C_u, u \in \mathbf{R}\}$, $\{C_z, z \in \mathbf{R}\}$ и множества растяжений $\{\varphi_u, u \in \mathbf{R}\}$, $\{\varphi_z, z \in \mathbf{R}\}$ представляют 1-мерное мультипликативное линейное пространство действительных чисел. (Здесь мы рассматриваем только линейные пространства над полем $\mathbf{R}$.) Линейные пространства мультипликативное дуальных чисел модуля 1 и 1-мерное мультипликативное пространство изоморфны. С учетом теоремы 6, утверждение доказано. $\rhd$

Отметим, что среди всех замен базисов классического линейного пространства $\mathbf{L}^2$ выделяются *гомотетии* — замены γ: $\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'$, где $\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{k}\vec{e}_1$, $\vec{e}\,'_2 = \frac{1}{k}\vec{e}_2$, $k \neq 0$.

Теорема 8. *Гомотетии линейного пространства* $\mathbf{L}^2$ *составляют одуль Ли* $\mathbf{H}$. *Пододуль Ли* $\mathbf{H}$ *гомотетий линейного пространства* $\mathbf{L}^2$ *является инвариантным пододулем одуля* $\mathbf{\Phi}$ *замен базисов линейного пространства* $\mathbf{L}^2$, *более того,* $\mathbf{H}$ *есть центр одуля Ли* $\mathbf{\Phi}$.

$\lhd$ Формулы замены-гомотетии с коэффициентом k

$$\gamma^{-1}: \begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky; \end{cases} \qquad K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \qquad \det K \neq 0.$$

Гомотетии составляют пододуль $\mathbf{H}$ в одуле Ли $\mathbf{\Phi}$ всех замен базисов, являющийся 1-мерным мультипликативным линейным пространством. Операции на пространстве $\mathbf{H}$ индуцируются операциями на скалярных матрицах

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} km & 0 \\ 0 & km \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} k^t & 0 \\ 0 & k^t \end{pmatrix}.$$

Для всякой замены базиса с матрицей C выполняется соотношение

$$C^{-1}KC = K,$$

которое означает поэлементную перестановочность и рассматриваемых замен, и что пододуль гомотетий **H** не только инвариантен в одуле Ли **Φ**, но и является его центром **Φ**. $\triangleright$

2.3. Замена базиса в альтернативном линейном пространстве $^a\mathbf{L}^2$. Базис **Б** $= (\alpha, \beta)$ линейного пространства $^a\mathbf{L}^2$, неоднороден, он состоит из векторов α, β различных свойств. Произведение $t\alpha$, вектора с одной ненулевой компонентой $\alpha = (1, 0)$ на число t есть вектор с двумя ненулевыми компонентами (6), компоненты вектора $t\alpha$ не пропорциональны компонентам вектора α; а произведение вектора с одной ненулевой компонентой $\beta = (0, 1)$ на число t есть также вектор с одной ненулевой компонентой. Всякий базис $\mathbf{Б}' = (\alpha', \beta')$ линейного пространства $^a\mathbf{L}^2$, должен обладать такими же свойствами: векторы $t\alpha'$ должны иметь две ненулевые компоненты, не пропорциональные компонентам вектора α'; а векторы $t\beta'$ должны иметь одну ненулевую компоненту. Для всякого вектора $\mu = (m, k)$, $m \neq 0$, вектор $t\mu = \left(mt, kt + m^2\frac{t(t-1)}{2}\right)$ (4), имеет компоненты, не пропорциональные соответствующим компонентам вектора α'. Вектор α' может иметь две ненулевые компоненты, но обязательно первая компонента ненулевая. Поэтому возможно только, чтобы базис $\mathbf{Б}' = (\alpha', \beta')$ состоял из векторов

$$\alpha' = (a, p), \quad a \neq 0, \quad \beta' = (0, b), \quad b \neq 0;$$

заданных в базисе **Б**.

Теорема 9. *Формулы замены координат векторов при заменах базисов альтернативного линейного пространства $^a\mathbf{L}^2$ нелинейны; они таковы:*

$$\varphi : \begin{cases} x = ax', \\ y = (a^2 - b)\frac{x'(x'-1)}{2} + px' + by'. \end{cases} \tag{8}$$

Формулы замены координат нелинейны, имеют порядок 2.

$\triangleleft$ Рассмотрим координаты произвольного вектора v в разных базисах. В базисе **Б** обозначим $v = (x, y)$, в базисе $\mathbf{Б}'$ обозначим $v = (x', y')$. Выразим компоненты x', y' через компоненты x, y. Имеем, с использованием разложения (7):

$$\begin{aligned}(x', y') &= x'\alpha' + \left(y' - \frac{x'(x'-1)}{2}\right)\beta' = x'(a, p) + \left(y' - \frac{x'(x'-1)}{2}\right)(0, b) \\ &= \left(ax', px' + a^2\frac{x'(x'-1)}{2}\right) + \left(0, by' - b\frac{x'(x'-1)}{2}\right) \\ &= \left(ax', px' + by' + (a^2 - b)\frac{x'(x'-1)}{2}\right) = (x, y).\end{aligned}$$

Мы получили различные выражения для компонент вектора v в одном и том же базисе **Б** линейного пространства $^a\mathbf{L}^2$; эти выражения соответственно равны одно другому, что дает зависимость (8) между координатами вектора v в различных базисах. $\triangleright$

Рассматриваемая замена базисов обозначена φ в формулах (8). При замене базиса **Б** базисом $\mathbf{Б}'$ координаты всякого вектора $v = (x, y)$ в базисе **Б** заменяются координатами (x', y') того же вектора v в базисе $\mathbf{Б}'$.

2.4. Группа Ли замен базисов пространства $^a\mathbf{L}^2$. Проведем аналогию с линейным пространством $\mathbf{L}^2$ в изучении замен базисов альтернативного линейного пространства $^a\mathbf{L}^2$.

Теорема 10. *Множество замен базисов пространства $^a\mathbf{L}^2$ относительно композиции замен является группой. Это 3-параметрическая группа Ли.*

$\lhd$ Из формул (8) замены имеем формулы обратной замены

$$\varphi^{-1}: \begin{cases} x' = \frac{x}{a}, \\ y' = -(a^2-b)\frac{x(x-a)}{2a^2b} - \frac{px}{ab} + \frac{y}{b}. \end{cases} \tag{9}$$

Вторая формула этой замены в стандартной записи, т. е. как в (8), имеет вид

$$y' = -\frac{a^2-b}{a^2b}\cdot\frac{x(x-1)}{2} - \left(\frac{p}{ab} + \frac{a+1}{2a^2b}\right)x + \frac{y}{b}.$$

Ввиду нелинейности формул замены базиса в ${}^a\mathbf{L}^2$, заменам не соответствуют матрицы и композициям замен нет возможности сопоставить операции над матрицами. Воспользуемся тем, что при замене базиса компоненты вектора заменяются взаимно однозначно, т. е. каждой замене базиса соответствует преобразование пар из $\mathbf{R}^2$. Пусть задана еще замена базиса $\mathbf{Б}' \to \mathbf{Б}''$:

$$x' = cx'', \quad y' = (c^2-d)\frac{x''(x''-1)}{2} + qx'' + dy'',$$

тогда композиция замен $\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}' \to \mathbf{Б}''$ описывается формулами

$$x = acx'', \quad y = \left((a^2-b)c^2 + b(c^2-d)\right)\frac{x''(x''-1)}{2} + \left(\frac{(a^2-b)(c-1)}{2}pc + bq\right)x'' + bdy''.$$

Это формулы вида (8). Формулы (9) говорят об обратимости преобразований вида (8). На основе сопоставления замен базисов и преобразований множества $\mathbf{R}^2$ получаем, что доказываемое утверждение выполняется. Формулы замены зависят от трех параметров a, b, p. $\rhd$

Рассмотрим частные случаи замен базисов альтернативного линейного пространства ${}^a\mathbf{L}^2$, а именно: *линейные замены* и *гомотетии*.

При следующем соотношении между параметрами $b = a^2$. В этом случае векторы базиса $\mathbf{Б}'$ в базисе $\mathbf{Б}$ задаются координатами

$$\alpha' = (a, p), \quad \beta' = (o, a^2), \quad a \neq 0.$$

Такие базисы пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ обеспечивают линейную замену координат. Формулы замены (8) превращаются в *линейные* с соответствующей матрицей:

$$\lambda: \begin{cases} x = ax', \\ y = px' + a^2y; \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ p & a^2 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \tag{10}$$

линейны и формулы обратной замены (9):

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = -\frac{p}{a^3}x + \frac{y}{a^2}.$$

Для линейных замен (10) базисов имеем

Теорема 11. *В группе Ли всех замен базисов пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ выделяется подгруппа Ли линейных замен. Она является инвариантной в группе Ли всех замен базисов.*

$\lhd$ Если $x' = bx''$, $y' = qx'' + b^2y''$, еще одна линейная замена базиса, то композиция замены (10) и указанной замены описывается формулами

$$\begin{cases} x = abx'', \\ y = (pb + a^2q)x'' + a^2b^2y'', \end{cases} \tag{11}$$

которые также линейны.

Далее, рассмотрим замены базисов φ^{-1}, φ — произвольные замены и линейную замену базиса λ; в замене $\varphi^{-1} : (x,y) \to (x',y')$, в $\lambda : (x',y') \to (x'',y'')$ в $\varphi : (x'',y'') \to (x''',y''')$. Формулы замены φ^{-1} есть (9), формулы λ есть (10), формулы φ есть (8). Выпишем эти формулы заново применительно к новым обозначениям:

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} x = \frac{x'}{a}, \\ y = -\frac{a^2-b}{a^2b} \cdot \frac{x'(x'-1)}{2} - (\frac{p}{ab} + \frac{a+1}{2a^2b})x' + \frac{y'}{b}; \end{cases}$$

$$\lambda : \begin{cases} x' = rx'', \\ y' = qx'' + r^2y''; \end{cases}$$

$$\varphi : \begin{cases} x'' = ax''', \\ y'' = (a^2-b)\frac{x'''(x'''-1)}{2} + px''' + by'''. \end{cases}$$

Найдем формулы композиции замен базисов $\varphi^{-1}\lambda\varphi$, подставив последовательно одни формулы в другие. В результате получаем

$$\varphi^{-1}\lambda\varphi : \begin{cases} x = rx''', \\ y = sx''' + r^2y''', \end{cases}$$

где $s = \frac{pr}{b} + \frac{(a+1)r}{2ab} + \frac{aq}{b} + \frac{pr^2}{b}$. Формулы замены $\varphi^{-1}\lambda\varphi$ имеют вид (10), поэтому замена $\varphi^{-1}\lambda\varphi$ является линейной. Подгруппа линейных замен инвариантна в группе всех замен. $\rhd$

Гомотетии с коэффициентом k линейного пространства ${}^a\mathbf{L}^2$, как и пространства $\mathbf{L}^2$, соответствует замена базиса **Б** базисом **Б**$'$, где $\alpha' = \frac{1}{k}\alpha$, $\beta' = \frac{1}{k}\beta$. Формулы замены координат векторов в гомотетии получаем из (9) при $a = b = \frac{1}{k}$, $p = \frac{1-k}{2k^2}$:

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = -\frac{k(k-1)}{2}x^2 + ky. \end{cases} \tag{12}$$

Формулы нелинейны.

Теорема 12. *Гомотетии линейного пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ составляют группу Ли.*

$\lhd$ Если

$$\begin{cases} x'' = mx', \\ y'' = -\frac{m(m-1)}{2}(x')^2 + my' \end{cases}$$

— еще одна гомотетия, то композиция двух гомотетий описывается формулами

$$\begin{cases} x'' = mkx, \\ y'' = -\frac{mk(mk-1)}{2}x^2 - m(k-1)\frac{kx(kx-1)}{2} + mky, \end{cases}$$

которые имеют вид (12). $\rhd$

Теорема 13. *Только линейной заменой $x = x'$, $y = px' + y'$, являющейся сдвигом, гомотетия пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ отображается на гомотетию.*

(В теории преобразований, как известно, отображение преобразования γ преобразованием φ есть преобразование $\varphi^{-1}\gamma\varphi$.)

$\lhd$ При $a = 1$ замене (10) соответствует *сдвиг* с подпространством $\langle\vec{e}_2\rangle$ инвариантных векторов. Обозначим замену (8) через φ, гомотетию (12) через γ. Пусть $\varphi^{-1} : (x,y) \to$

(x', y'), $\gamma : (x', y') \to (x'', y'')$, $\varphi : (x'', y'') \to (x''', y''')$. На основании формул (9), (11), (8) получаем формулы замены $\varphi^{-1}\gamma\varphi$:

$$x = kx''', \quad y = -\frac{a^2}{b} \cdot \frac{k(k-1)}{2}(x''')^2 + ky'''.$$

Эти формулы имеют вид (12), т. е. определяют гомотетию только в случае $a = 1$. $\rhd$

Сравнивая свойства группы Ли замен базисов пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ со свойствами группы Ли замен базисов классического пространства $\mathbf{L}^2$, см. п. 2.2 (превращающейся в одуль Ли замен), видим, что свойства группы Ли замен базисов $\mathbf{L}^2$ богаче, чем свойства группы Ли замен базисов пространства ${}^a\mathbf{L}^2$. Это закономерный результат, так как операции (3) и (4) на векторах в ${}^a\mathbf{L}^2$ не симметричны относительно компонент векторов. Интересно было бы посмотреть свойства линейного пространства с симметричной операцией сложения $(x, y) + (u, v) = (x + u + yv, y + v + xu)$, но таким линейным пространством мы здесь не занимаемся.

Опишем еще структуру линейных замен базисов пространства ${}^a\mathbf{L}^2$.

Композиция (11) линейных замен есть линейная замена. Для матриц замен имеем:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ p & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ q & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ pb + a^2q & a^2b^2 \end{pmatrix}.$$

Всякое положительное действительное число a можно представить в экспоненциальном виде $a = e^r$, $r = \ln a$. Сопоставим замене (10) пару действительных чисел

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ p & a^2 \end{pmatrix} \leftrightarrow (r, p), \quad a = e^r.$$

Тогда композиции замен (11) соответствует пара $(r + s, pe^s + qe^{2r})$. Тем самым, на множестве пар $\mathbf{R}^2$ определена операция

$$(r, p) + (s, q) = (r + s, pe^s + qe^{2r}). \tag{13}$$

Нулевой является пара $(0, 0)$, т. е. $(r, p) + (0, 0) = (r, p)$. Пара, противоположная паре (r, p), такова

$$-(r, p) = (-r, -pe^{-3r}).$$

Следовательно, множество пар $\mathbf{R}^2$ с операцией (13) является неабелевой группой Ли. На парах из $\mathbf{R}^2$ зададим внешнюю операцию, согласованную с внутренней операцией (13):

$$t(r, p) = \left(rt, pe^{r(t-1)} \frac{e^{rt} - 1}{e^r - 1} \right), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{14}$$

Множество пар $\mathbf{R}^2$ с операциями (13) и (14) является 2-мерным одулем Ли. Согласно [5, с. 83] существует только два вида 2-мерных алгебр Ли, одна абелева, другая неабелева, она тоже разрешима, ступень ее разрешимости равна 2. В [1] на 3-мерных (а, значит и 2-мерных) разрешимых группах Ли определены внешние операции умножения элементов групп Ли на действительные числа, тем самым определены и 2-мерные одули Ли. Абелев 2-мерный одуль Ли является линейным пространством, а неабелев — растраном. Получена

Теорема 14. *Линейные замены базисов альтернативного 2-мерного линейного пространства* ${}^a\mathbf{L}^2$ *составляют 2-мерный неабелев одуль Ли, являющийся растраном.*

Операции на этом растране отличаются от операций на растранах, определенных в [1].

В следующей работе авторов строится аффинная плоскость с альтернативным линейным пространством ${}^{a}\mathbf{L}^2$ над полем действительных чисел $\mathbf{R}$.

Литература

1. *Долгарев А. И.* Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств.— Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005.—306 с.
2. *Долгарев А. И.* Сетевые уравнения двумерных линейных пространств над **R**. Движения в обобщенных пространствах // Межвуз. сб. научн. тр.—Пенза: ПГПУ, 2000.—С. 117–124.
3. *Сабинин Л. В.* Одули как новый подход к геометрии со связностью // Докл. АН СССР.—1977.— № 5.—С. 800–803.
4. *Долгарев А. И.* Одулярное описание аффинных преобразований плоскости.—М., 1997.—59 с.—Деп. в ВИНИТИ 02.07.97.—№ 369.
5. *Петров А. З.* Пространства Эйнштейна.—М.: Наука, 1961.—464 с.

Статья поступила 23 июля 2007 г.

Долгарев Артур Иванович
Пензенскйи государственный университет
Пенза, 440026, РОССИЯ

Долгарев Иван Артурович
Пензенский государственный университет
Пенза, 440026, РОССИЯ
E-mail: delivar@yandex.ru