Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 1, С. 68–74

УДК **512.544.2**

О ПОРОЖДАЕМОСТИ ГРУППЫ $PSL_N(Z)$ ТРЕМЯ ИНВОЛЮЦИЯМИ, ДВЕ ИЗ КОТОРЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫ[1]

Я. Н. Нужин

Доказано, что проективная специальная линейная группа $PSL_n(Z)$, $n \geqslant 2$, над кольцом целых чисел Z тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n \geqslant 5$.

Ключевые слова: кольцо целых чисел, специальная линейная группа, порождающие элементы.

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Проективная специальная линейная группа $PSL_n(Z)$, $n \geqslant 2$, над кольцом целых чисел Z тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n \geqslant 5$.*

Группы, порожденные тремя инволюциями, две из которых перестановочны, будем называть (2×2,2)-порожденными, причем не исключаются случаи, когда какие-то две или даже все три инволюции совпадают. Ясно, что если какая-то группа допускает нетривиальный гомоморфный образ, который не является (2×2,2)-порожденной группой, то она также не будет (2×2,2)-порождена. Поэтому в силу гомоморфизма $PSL_n(Z)$ на $PSL_n(Z_n)$ утверждение теоремы для $n = 2, 3, 4$ вытекает из того, что группы $PSL_2(7)$, $PSL_3(2)$, $PSL_4(2)$ не являются (2×2,2)-порожденными [1]. Для $n \geqslant 5$ порождающие тройки инволюций, две из которых перестановочны, группы $PSL_n(Z)$ выписываются явно, причем, если $n \neq 2(2k+1)$, то порождающие тройки инволюций берутся из $SL_n(Z)$. Таким образом, при $n \geqslant 5$ и $n \neq 2(2k+1)$ получаем более сильное утверждение: группа $SL_n(Z)$ является (2×2,2)-порожденной. Ранее [4] М. К. Тамбурини и П. Цукка доказали (2×2,2)-порождаемость группы $SL_n(Z)$ при $n \geqslant 14$. Теорема 1 анонсировалась в [2].

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Здесь фиксируются некоторые специальные элементы из общей линейной группы $GL_n(Z)$ над кольцом целых чисел Z. Для элементов из $PSL_n(Z)$ будем также использовать матричную запись, считая при этом два элемента равными, если они различаются лишь умножением на скалярную матрицу из $SL_n(Z)$.

Как обычно, через $t_{ij}(k)$, $k \in Z$, $i \neq j$, будем обозначать трансвекции, т. е. матрицы $E_n + ke_{ij}$, где E_n — единичная $(n \times n)$-матрица, а e_{ij} — матричные единицы. Следующая лемма хорошо известна (см., например, [3, с.107]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00824.

Лемма 1. *Группа $SL_n(Z)$ порождается трансвекциями $t_{ij}(1)$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.*

Пусть

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица τ — инволюция, а μ имеет порядок n и действует сопряжениями регулярно на следующем множестве трансвекций:

$$M = \{t_{1n}(1),\, t_{i+1i}(1),\, i = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Коммутируя между собой трансвекции из множества M, можно получить все трансвекции $t_{ij}(1)$. Следовательно, множество M порождает группу $SL_n(Z)$. Более того, справедлива

Лемма 2. *Группа $SL_n(Z)$ порождается одной из трансвекций*

$$t_{1n}(1), \quad t_{i+1i}(1), \quad t_{n-1n}(1), \quad t_{ii+1}(1), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и мономиальной матрицей $\eta\mu$ для любой $(1, -1)$-диагональной матрицы η с условием, что $\eta\mu \in SL_n(Z)$.

Здесь и далее под $(1, -1)$-диагональной матрицей понимается диагональная матрица с элементами ± 1 по диагонали.

В следующем параграфе наряду с матричной записью элементов из групп $SL_n(Z)$ и $PSL_n(Z)$ будем использовать терминологию групп Шевалле, рассматривая $SL_n(Z)$ и $PSL_n(Z)$ соответственно как универсальную и присоединенную группу Шевалле типа A_{n-1}.

Пусть Φ — система корней типа A_l с базой $\Pi = \{r_1, r_2, \ldots, r_l\}$, $l = n - 1$.

Группа Шевалле $A_l(Z)$ (универсальная или присоединенная) типа A_l над кольцом целых Z порождается своими корневыми элементами $x_r(1)$, $r \in \Phi$.

Для любого $r \in \Phi$ и $t \neq 0$ положим

$$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t), \quad n_r = n_r(1), \quad h_r(-1) = n_r^2.$$

Отображение

$$t_{i+1i}(t) \to x_{r_i}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, l,\ t \in Z,$$

продолжается до изоморфизма группы $SL_n(Z)$ на универсальную группу Шевалле $A_l(Z)$, а выписанные выше мономиальные матрицы τ и μ являются соответственно прообразами элементов w_0 и w из группы Вейля W при естественном гомоморфизме мономиальной подгруппы N на группу W, где $w_0(r) \in \Phi^-$ для любого $r \in \Phi^+$, а $w = w_{r_1}w_{r_2}\ldots w_{r_l}$. Здесь Φ^+ — положительные корни, а Φ^- — отрицательные корни. Поэтому лемму 2 можно переформулировать в терминах групп Шевалле.

Лемма 3. *Группа Шевалле $A_l(Z)$ порождается любым корневым*

$$x_{\pm r_i}(1), \quad r_i \in \Pi, \quad x_{\pm(r_1+\cdots+r_l)} \tag{1}$$

и мономиальным n_w элементами, если $w = w_{r_1}w_{r_2}\ldots w_{r_l}$.

В статье приняты следующие сокращения:

$$a^b = bab^{-1}, \quad [a, b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

2. Порождающие тройки инволюций при $n \geqslant 5$

Пусть τ и μ такие же как в первом параграфе. Матрицы τ и

$$\tau\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются инволюциями, но не всегда лежат $SL_n(Z)$ (это зависит от их размерности). Подберем (1,-1)-диагональные матрицы η_1 и η_2 так, чтобы матрицы $\eta_1\tau$ и $\eta_2\tau\mu$ лежали в $SL_n(Z)$, а их образы в $PSL_n(Z)$ были бы инволюциями. Выбираем η_1, η_2 следующим образом:

при $n = 4k+1$ $(= 5, 9, \dots)$ $\eta_1 = \eta_2 = E_n$;

при $n = 2(2k+1)+1$ $(= 7, 11, \dots)$ $\eta_1 = -E_n$, $\eta_2 = E_n$;

при $n = 4k$ $(= 8, 12, \dots)$ $\eta_1 = E_n$, $\eta_2 = \mathrm{diag}(E_{n-1}, -1)$;

при $n = 2(2k+1)$ $(= 6, 10, \dots)$ $\eta_1 = \mathrm{diag}(-E_{2k+1}, E_{2k+1})$, $\eta_2 = E_n$.

Пусть $\alpha = t_{21}(-1)t_{n-1n}(-1)\,\mathrm{diag}(-1, E_{n-2}, -1)$, при $n = 5, 6$,

$\alpha = t_{21}(1)t_{n-1n}(1)\,\mathrm{diag}(1, -1, -1, E_{n-6}, -1, -1, 1)$, при $n \geqslant 7$,

$\beta = \eta_1\tau$, при $n \geqslant 5$,

$\gamma = \eta_2\tau\mu$, при $n \geqslant 5$.

Утверждения следующей леммы проверяются непосредственно.

Лемма 4. *Пусть α, β, γ — такие как и выше. Тогда:*

1) $\alpha\beta = \beta\alpha$;

2) α, γ — инволюции из $SL_n(Z)$;

3) β — инволюция из $SL_n(Z)$, если $n \neq 2(2k+1)$;

4) если $n = 2(2k+1)$, то $\beta^2 = -E_n$ и, следовательно, образ β является инволюцией в $PSL_n(Z)$.

В следующих параграфах 3–5 показывается, что инволюции α, β, γ порождают группу $PSL_n(Z)$ при $n \geqslant 7$, $n = 6$ и $n = 5$ соответственно. Далее будет полезно следующее замечание. В силу построения $\beta\gamma = \eta_3\mu$ для некоторого $(1, -1)$-диагонального элемента η_3. Поэтому по лемме 2 доказательство теоремы 1 можно свести к проверке предположения следующей леммы.

Лемма 5. *Если группа, порожденная инволюциями α, β, γ, содержит одну из трансвекций*

$$t_{1n}(1), \quad t_{i+1i}(1), \quad t_{n-1n}(1), \quad t_{ii+1}(1), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

в терминологии групп Шевалле один из корневых элементов

$$x_{\pm r_i}(1), \quad r_i \in \Pi, \quad x_{\pm(r_1+\dots+r_l)}(1),$$

то она совпадает с группой $PSL_n(Z)$.

3. Доказательство теоремы 1 при $n \geqslant 7$

Пусть α, β, γ, τ, μ, η_1, η_2, η_3 такие как и в параграфах 1 и 2, $n \geqslant 7$ и $l = n - 1$. Тогда $\alpha = x_{r_1}(1)x_{-r_l}(1)h_{r_2}(-1)h_{r_{l-1}}(-1)$, $\beta = \eta_1\tau$, $\gamma = \eta_2\tau\mu$, $\eta \equiv \beta\gamma = \eta_3\mu$.

Вычисления показывают, что при $l \geqslant 6$

$$\alpha^{\eta} = x_{r_2}(\pm 1) x_{r_1+\dots+r_l}(\pm 1) h_{r_3}(-1) h_{r_l}(-1),$$
$$\alpha^{\eta^2} = x_{r_3}(\pm 1) x_{-r_1}(\pm 1) h_{r_4}(-1) h_{r_1+\dots+r_l}(-1),$$
$$[\alpha, \alpha^{\eta}] = x_{r_1+r_2}(\pm 1) x_{r_1+\dots+r_{l-1}}(\pm 1),$$
$$([\alpha, \alpha^{\eta}]\alpha^{\eta^2})^2 = x_{r_1+r_2+r_3}(\pm 1) x_{r_2}(\pm 1) x_{r_2+r_3}(\pm 1) x_{r_2+\dots+r_{l-1}}(\pm 1),$$
$$\theta \equiv (([\alpha, \alpha^{\eta}]\alpha^{\eta^2})^2)^{\eta} = x_{r_2+r_3+r_4}(\pm 1) x_{r_3}(\pm 1) x_{r_3+r_4}(\pm 1) x_{r_3+\dots+r_l}(\pm 1),$$
$$[\theta, [\alpha, \alpha^{\eta}]] = x_{r_1+r_2+r_3}(\pm 1) x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(\pm 1) x_{r_1+\dots+r_l}(\pm 1).$$

Пусть $l \geqslant 7$. Тогда

$$[\alpha, [\theta, [\alpha, \alpha^{\eta}]]] = x_{r_1+\dots+r_{l-1}}(\pm 1),$$
$$[\alpha, [\theta, [\alpha, \alpha^{\eta}]]]^{\beta} = x_{-r_2-\dots-r_l}(\pm 1),$$
$$[[\theta, [\alpha, \alpha^{\eta}]], [\alpha, [\theta, [\alpha, \alpha^{\eta}]]]^{\beta}] = x_{r_1}(\pm 1).$$

Таким образом, в силу леммы 5 теорема 1 доказана для $n \geqslant 8$.

Пусть $l = 6$. Используя предыдущие вычисления, справедливые при $l = 6$, получаем

$$[\alpha, [\theta, [\alpha, \alpha^{\eta}]]] = x_{r_1+\dots+r_5}(\pm 1) x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(\pm 2),$$
$$[\alpha, [\theta, [\alpha, \alpha^{\eta}]]]^{\beta} = x_{-r_2-\dots-r_6}(\pm 1) x_{-r_3-r_4-r_5-r_6}(\pm 2),$$
$$[[\theta, [\alpha, \alpha^{\eta}]], [\alpha, [\theta, [\alpha, \alpha^{\eta}]]]^{\beta}] = x_{r_1}(\pm 1) x_{r_1+r_2}(\pm 2),$$
$$(x_{r_1}(\pm 1) x_{r_1+r_2}(\pm 2))^{\eta} = x_{r_2}(\pm 1) x_{r_2+r_3}(\pm 2),$$
$$[x_{r_1}(\pm 1) x_{r_1+r_2}(\pm 2), x_{r_2}(\pm 1) x_{r_2+r_3}(\pm 2)] = x_{r_1+r_2}(\pm 1) x_{r_1+r_2+r_3}(\pm 2),$$
$$[\alpha, x_{r_1+r_2}(\pm 1) x_{r_1+r_2+r_3}(\pm 2)] = x_{r_1+r_2}(\pm 2).$$

Сейчас легко получаем, что корневой элемент $x_{r_1}(1)$ лежит в группе, порожденной инволюциями α, β, γ, и остается только воспользоваться леммой 5. Таким образом, для $n \geqslant 7$ теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 1 для $n = 6$

В этом параграфе наряду с матричной записью элементов из группы $SL_6(Z)$ будем использовать и терминологию групп Шевалле. Это удобно для быстрого контроля матричных вычислений, хотя в некоторых длинных произведениях (коммутаторах), для того чтобы точно указать знак у коэффициента трансвекции (корневого элемента), входящей в правую часть равенства, без матричного представления трудно обойтись.

Пусть α, β, γ, τ, μ, η_1, η_2 такие как и в параграфах 1 и 2. Тогда при $n = 6$

$$\eta_1 = \mathrm{diag}(-1, -1, -1, 1, 1, 1), \quad \eta_2 = E_n,$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = x_{r_1}(-1) x_{-r_5}(-1) h_{r_1+\dots+r_5}(-1),$$

$$\beta=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\eta_1\tau,\quad \gamma=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=\eta_2\tau\mu=\tau\mu,$$

$$\eta\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-1\\-1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}=\beta\gamma=\eta_1\tau\cdot\tau\mu=\eta_1\mu$$

$$=\eta_1 h_{r_1+\dots+r_5}(-1)h_{r_2+r_3+r_4}(-1)h_{r_3}(-1)n_{r_1}n_{r_2}\cdots n_{r_5}.$$

Пусть $M=\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$. Вычисления показывают, что

$$\alpha^\eta=x_{r_2}(\pm1)x_{r_1+\dots+r_5}(\pm1)h_{r_3}(-1)h_{r_5}(-1),$$
$$\alpha^{\eta^2}=x_{r_3}(\pm1)x_{-r_1}(\pm1)h_{r_4}(-1)h_{r_1+\dots+r_5}(-1),$$
$$[\alpha,\alpha^\eta]=x_{r_1+r_2}(\pm1)x_{r_1+\dots+r_4}(\pm1),$$
$$[\alpha,\alpha^\eta]^\eta=x_{r_2+r_3}(\pm1)x_{r_2+\dots+r_5}(\pm1),$$
$$[\alpha,\alpha^\eta]^{\eta^2}=x_{r_3+r_4}(\pm1)x_{-r_1-r_2}(\pm1),$$
$$[\alpha,\alpha^\eta]^{\eta^3}=x_{r_4+r_5}(\pm1)x_{-r_2-r_3}(\pm1).$$

Так как корневые элементы $x_{r_1+r_2}(\varepsilon_1)$ и $x_{r_1+\dots+r_4}(\varepsilon_2)$, а также $x_{r_3+r_4}(\varepsilon_3)$ и $x_{-r_1-r_2}(\varepsilon_4)$ перестановочны и их произведения лежат в M для любых ε_2, $\varepsilon_4=\pm1$ при подходящих ε_1, $\varepsilon_3=\pm1$, зависящих от ε_2, ε_4, то положив $\varepsilon_4=-1$ и подобрав соответствующим образом ε_2, получим включение

$$\delta\equiv[\alpha,\alpha^\eta][\alpha,\alpha^\eta]^{\eta^2}[\alpha,\alpha^\eta]^{-1}=x_{r_1+r_2}(\varepsilon_2)x_{-r_1-r_2}(-1)x_{r_1+r_2}(-\varepsilon_2)\in M.$$

При $\varepsilon_2=1$, $\delta=n_{r_1+r_2}x_{r_1+r_2}(-2)$, а при $\varepsilon_2=-1$ $\delta=x_{r_1+r_2}(-2)n_{r_1+r_2}$.

Рассмотрим только первый случай, второй рассматривается аналогично, нужно только δ заменить на δ^{-1}. В этом случае имеем

$$\alpha^\delta=x_{-r_2}(\pm1)x_{-r_5}(\pm1)x_{-r_1-r_2}(\pm2)h_{r_1}(-1)h_(r_4)(-1),$$
$$\theta\equiv([\alpha,\alpha^\eta]^{\eta^3}\cdot\alpha^\delta)^2=x_{r_4}(\pm1)x_{-r_2-r_3}(\pm2),$$
$$\theta^\eta=x_{r_5}(\pm1)x_{-r_3-r_4}(\pm2),$$
$$\theta^{\beta\eta}=(\theta^\eta)^\beta=x_{-r_1}(\pm1)x_{r_2+r_3}(\pm2),$$
$$(\theta^{\beta\eta})^{\eta^{-1}}=x_{r_1+\dots+r_5}(\pm1)x_{r_1+r_2}(\pm2),$$
$$\delta((\theta^{\beta\eta})^{\eta^{-1}})^{\pm1}=n_{r_1+r_2}x_{r_1+\dots+r_5}(\pm1),$$
$$(\delta((\theta^{\beta\eta})^{\eta^{-1}})^{\pm1})^2=h_{r_1+r_2}(-1)x_{r_3+r_4+r_5}(\pm1)x_{r_1+\dots+r_5}(\pm1),$$
$$(\delta((\theta^{\beta\eta})^{\eta^{-1}})^{\pm1})^2\cdot(\theta^{\beta\eta})^{\eta^{-1}}=h_{r_1+r_2}(-1)x_{r_3+r_4+r_5}(\pm1)x_{r_1+r_2}(\pm2),$$
$$((\delta((\theta^{\beta\eta})^{\eta^{-1}})^{\pm1})^2\cdot(\theta^{\beta\eta})^{\eta^{-1}})^2=x_{r_1+r_2}(\pm4),$$
$$(x_{r_1+\dots+r_5}(\pm1)x_{r_1+r_2}(\pm2))^{\pm2}\cdot x_{r_1+r_2}(\pm4)=x_{r_1+\dots+r_5}(\pm2),$$

$$(x_{r_1+\dots+r_5}(\pm 2))^{\eta^2} = x_{-r_2}(\pm 2),$$
$$[\alpha^{\eta^2}, (x_{-r_2}(\pm 2))] = x_{-r_1-r_2}(\pm 2),$$
$$(x_{-r_1-r_2}(\pm 2))^{\delta^{-1}} = x_{r_1+r_2}(\pm 2),$$
$$(x_{+r_1+r_2}(\pm 2))^{\eta} = x_{r_2+r_3}(\pm 2),$$
$$\theta^{\beta\eta} \cdot (x_{r_2+r_3}(\pm 2))^{\pm 1} = x_{-r_1}(\pm 1).$$

Сейчас остается только применить лемму 5. Таким образом, для $n = 6$ теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 1 для $n = 5$

Пусть α, β, γ, τ, μ, η_1, η_2 такие как и в параграфах 1 и 2, а $\eta \equiv \beta\gamma$. Тогда при $n = 5$ матрицы η_1, η_2 единичные и, следовательно,

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \tau\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисления показывают, что

$$[\alpha, \alpha^{\eta}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\alpha, \alpha^{\eta}]^{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[\alpha, [\alpha, \alpha^{\eta}]^{\eta}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\alpha, [\alpha, \alpha^{\eta}]^{\eta}]^{\eta^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[[\alpha, \alpha^{\eta}]^{\eta}, [\alpha, [\alpha, \alpha^{\eta}]^{\eta}]^{\eta^{-1}}] = t_{42}(1), \quad (t_{42}(1))^{\eta^3} = t_{25}(1), \quad [t_{42}(1), t_{25}(1)]^{\beta} = t_{21}(1).$$

Сейчас остается лишь применить лемму 5.

Литература

1. *Нужин Я. Н.* Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 // Алгебра и логика.—1990.—Т. 29, № 2.—С. 192–206.
2. *Нужин Я. Н.* О $(2 \times 2, 2)$-порождаемости групп Шевалле над кольцом целых чисел // Межд. сем. по теории групп, посвященный 70-летию А. И. Старостина и 80-летию Н. Ф. Сесекина.—Екатеринбург, 2001.—С. 168–169.

3. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле.—М.: Мир, 1975.—262 с.
4. *Tamburini M. C., Zucca P.* Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute // J. of Algebra.—1997.—V. 195.—P. 650–661.

Статья поступила 16 января 2008 г.

Нужин Яков Нифантьевич
Сибирский федеральный университет
Красноярск, 660074, РОССИЯ
E-mail: `nuzhin@fipu.krasnoyarsk.edu`