Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 1, С. 37–39

УДК **512.542.5**

ФУНКЦИИ Ф. ХОЛЛА НА ГРУППАХ ЛИЕВА ТИПА РАНГА 1[1]

Д. В. Левчук

Для групп лиева типа ранга 1 над конечными полями вычисляется обобщенная функция Эйлера, введенная Ф. Холлом, которая для циклических групп совпадает с обычной арифметической функцией Эйлера.

Ключевые слова: группа лиева типа, группа Ри, n-базы группы, функции Эйлера на группах.

Введение

Ф. Холл в работе [1] выделил важный инвариант $\varphi_n(G)$ произвольной конечной группы G, названный n-той функцией Эйлера: это число всех n-баз в G, т. е. упорядоченных порождающих наборов из n элементов группы G. Ясно, что $\varphi_n(G) > 0$ только для n-порожденной группы G, а для циклической группы имеем $\varphi_1(G) = \varphi(|G|)$, где φ есть обычная арифметическая функция Эйлера. Другой инвариант из [1] наиболее естественно определяется для конечной простой неабелевой группы G: это наибольшее число $d = d_n(G)$ такое, что прямое произведение d групп, изоморфных G, есть n-порожденная группа. Ф. Холл установил также связь введенных инвариантов (см. лемму 1 ниже).

Известно, что всякая конечная простая неабелева группа G порождается двумя элементами. Вопрос о нахождении ее инварианта $d_2(G)$ записал в Коуровской тетради С. А. Сыскин [2, вопрос 12.86]. Инварианты $d_2(G)$ и $\varphi_2(G)$ были найдены в [1] для знакопеременных групп малых степеней и групп PSL_2 над полем простого порядка; Н. М. Сучков и Д. М. Приходько [3] вычислили их для групп $SL_2(q)$, $q = 2^n$, и групп Сузуки $Sz(q)$. В настоящей работе инварианты исследуются в классе групп лиева типа ранга 1.

1. Как заметил Ф. Холл [1], группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} G$ произвольной группы G действует как регулярная группа подстановок на множестве всех n-баз в G. Для простых групп отсюда вытекает

Лемма 1. *Если G — конечная простая неабелева группа, то*

$$\varphi_n(G) = d_n(G) \cdot |\operatorname{Aut} G|. \tag{1}$$

Множество всех пар $(x, y) \in (G, G)$, для которых подгруппа $\langle x, y\rangle$ нормализует какую-либо неединичную абелеву подгруппу группы G, далее обозначаем через $W(G)$ или,

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00824а.

кратко, W. Совокупность всех пар из W с первым элементом порядка t обозначаем через W_t.

Простая группа $G(q)$ лиева типа ранга 1 определяется над конечным полем порядка $q > 3$. Для нее возможны всего 4 типа: $PSL_2(q)$, $Sz(q)$, $q = 2^{2n+1}$ (группа Сузуки), $\mathrm{Re}(q)$, $q = 3^{2n+1}$ (группа Ри) и $PSU_3(q)$ (унитарный случай), где q есть квадрат.

К основным результатам статьи относится

Теорема 2. *Если $G(q)$ — простая группа Ри $\mathrm{Re}(q)$, то*

$$\varphi_2(G(q)) = |G(q)|^2 - |W| - |G(q)| \sum_{GF(m)\subset GF(q)} \frac{\varphi_2(G(m))}{|G(m)|} - \varphi_2(SL_2(8)) \frac{|G(q)|}{|G(3)|}. \qquad (2)$$

Равенство (2) выполняется также для групп $SL_2(q)$, $q = 2^n$, и $Sz(q)$, если в правой части равенства опустить последнее слагаемое.

2. Нам потребуются предварительные сведения о группах лиева типа ранга 1 и их подгруппах. В стандартном линейном представлении группы $G(q)$ ее порождают антидиагональная инволюция τ с коэффициентами из простого подполя $GF(p) \subseteq GF(q)$ и силовская p-подгруппа U — нижняя (или верхняя) унитреугольная подгруппа в $G(q)$. Основными являются также диагональная подгруппа H, мономиальная подгруппа $N = H \leftthreetimes \langle\tau\rangle$ (она является диэдральной группой, исключая унитарный случай) и подгруппа Бореля $B = U \leftthreetimes H$ — нормализатор подгруппы U. В соответствии с выбором $G(q)$, известны равенства [4, 5]:

$$|H| = (q-1)/d, \quad d = \text{НОД}\,(2, q-1),\ 1,\ 1 \text{ или } \ \text{НОД}\,(3, \sqrt{q}+1); \qquad (3)$$

$$|\mathrm{Aut}\, G(q)| = dn \cdot |G(q)| \quad (q = p^n), \qquad |U| = q,\ q^2,\ q^3 \text{ или } \ q\sqrt{q}. \qquad (4)$$

Разложение Брюа $G(q) = B\langle\tau\rangle B$ $(= B\langle\tau\rangle U)$ приводит к дважды транзитивному представлению группы $G(q)$ и дает, наряду с канонической формой элементов, формулу порядка группы:

$$|G(q)| = |B|(1 + |U|) = |H| \cdot |U| \cdot (1 + |U|).$$

Лемма 3. *Группа $G(q)$ действует сопряжениями на множестве сопряженных с U подгрупп, как дважды транзитивная группа подстановок. Любые две различные сопряженные с U подгруппы пересекаются по единице.*

Отметим, что в группе $PSL_2(q)$ существует циклическая подгруппа A_1 порядка $(1 + |U|)/d = (q+1)/d$ и каждая из подгрупп H и A_1 имеет индекс 2 в своем нормализаторе, являющемся диэдральной группой.

Как обычно, $C_G(S)$ и $N_G(S)$ (или, кратко, $C(S)$ и $N(S)$) обозначают, соответственно, централизатор и нормализатор подмножества S в группе G. В группе Ри $\mathrm{Re}(q)$ централизатор (единственной) диагональной инволюции η имеет вид $C(\eta) = \langle\eta\rangle \times L(q)$, $L(q) \simeq PSL_2(q)$, и содержит мономиальную подгруппу N. Поэтому группа Ри содержит циклические холловы подгруппы нечетных порядков $(q-1)/2$ и $(q+1)/4$, соответственно, подгруппу A_0 индекса 2 в H и подгруппу A_1 в $L(q)$. В группах Ри и Сузуки существуют также самоцентрализуемые циклические холловы подгруппы A_2 и A_3 порядка $q+1+\sqrt{pq}$ и $q+1-\sqrt{pq}$, соответственно. Нормализатор такой подгруппы A_i есть группа Фробениуса с ядром A_i и неинвариантным множителем $< t >$ порядка $2p$, причем число $1 + |U|$ равно $1 + q^2 = |A_2| \cdot |A_3|$ для групп Сузуки и $1 + q^3 = 4|A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3|$ для групп Ри.

Группу $\widehat{G}(q)$ с расширенной диагональной подгруппой $\widehat{H}$ выбираем как и в [4, § 8.4], В частности, $\widehat{G}(q) \simeq PGL_2(q)$ при $G(q) = PSL_2(q)$ и $\widehat{G}(q) \simeq PU_3(q)$ при $G(q) = PSU_3(q)$.

Нормализатор $N[G(m)]$ подгруппы $G(m)$ есть самонормализуемая подгруппа; он изоморфен группе $\widehat{G}(m)$ при $|N[G(m)] : G(m)| > 1$. Согласно [4, 8.4.7], имеем

$$\widehat{G}(q) = G(q)\widehat{H} = \widehat{B}\langle\tau\rangle\widehat{B}, \quad \widehat{B} = U \leftthreetimes \widehat{H}, \quad |\widehat{G}(q)/G(q)| = |\widehat{H}/H| = d.$$

Группа $\mathrm{Re}(3)$ ($\simeq \mathrm{Aut}\, SL_2(8)$) является единственной непростой группой Ри. Согласно [6, теорема 1], подгруппы

$$B = N(U) = U \leftthreetimes H, \quad C(\eta), \quad N(A_i) \quad (i = 1, 2, 3), \quad \mathrm{Re}(m), \tag{5}$$

исчерпывают, с точностью до сопряженности, все максимальные подгруппы простой группы Ри $\mathrm{Re}(q)$. Поэтому, если подгруппа M группы $\mathrm{Re}(q)$ не лежит в одной из сопряженных с B, $C(\eta)$ или $N(A_i)$ подгрупп, то она сопряжена либо с какой-либо подгруппой $\mathrm{Re}(m)$ при $GF(m) \subset GF(q)$, либо с коммутантом $\mathrm{Re}(3)' \simeq SL_2(8)$, причем $|G(q) : N(\mathrm{Re}(3)')| = |G(q) : G(3)|$. Это завершает доказательство для групп Ри. Поскольку случай групп $G(q) = SL_2(q)$, $q = 2^n$, $Sz(q)$ исследован в [3], то теорема полностью доказана.

3. Число НОД $(|H|, (1 + |U|))$ равно $\sqrt{q} + 1$ при $G(q) = PSU_3(q)$, а в остальных случаях, очевидно, не превосходит числа 2. Для группы $G(q)$ через $W_{(-)}$ (аналогично, $W_{(+)}$) обозначим множество пар $(x, y) \in W$, $|x| > 2$, для которых подгруппа $\langle x, y\rangle$ сопряжением переводится в B или N (соответственно, нормализует циклическую подгруппу порядка, делящего число $1 + |U|$ и не делящего $|H|$). Несложно убедиться, что

$$W(\mathrm{Re}(q)) = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_6 \cup W_9 \cup W_{(+)} \cup W_{(-)}.$$

Это число находим по аналогии с подобными числами $W(Sz(q))$ и $W(SL_2(q))$ в [1] и [3].

Отметим, что для вычисления инвариантов $d_2(G)$ и $\varphi_2(G)$ для групп $G(q) = PSL_2(q)$ с нечетным q и унитарных групп, в отличие от групп из теоремы 2, приходится вычислять инварианты для подгрупп сопряженных с $\widehat{G}(m)$).

Литература

1. *Hall P.* The Eulerian functions of a group // Qurt. J. Math.—1936.—V. 7.—P. 134–151.
2. Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). 14-е изд. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.—134 с.
3. *Сучков Н. М., Приходько Д. М.* О числе пар порождающих групп $L_2(2^m)$ и $Sz(2^{2k+1})$ // Сиб. мат. журн.—2001.—Т. 42, № 5.—С. 1162–1167.
4. *Carter R.* Simple groups of Lie type.—New York: Wiley and Sons, 1972.—331 p.
5. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле.—М.: Мир, 1975.—262 с.
6. *Левчук В. М., Нужин Я. Н.* О строении групп Ри // Алгебра и логика.—1985.—Т. 24, № 1.—С. 26–41.

Статья поступила 8 февраля 2008 г.

Левчук Денис Владимирович
Сибирский федеральный университет
Красноярск, 660074, РОССИЯ
E-mail: levchuk@lan.krasu.ru