Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 1, С. 35–36

УДК **512.542**

ПРИМЕР ДВОЙНОЙ ГРУППЫ ФРОБЕНИУСА С ПОРЯДКОВЫМИ КОМПОНЕНТАМИ КАК У ПРОСТОЙ ГРУППЫ $S_4(3)$[1]

М. Р. Зиновьева, А. С. Кондратьев

Построен пример двойной группы Фробениуса с порядковыми компонентами как у простой группы $S_4(3)$.

Ключевые слова: конечная простая группа, двойная группа Фробениуса, порядковые компоненты.

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга—Кегеля*) $GK(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $GK(G)$ через $s = s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leqslant i \leqslant s\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Для натурального числа n обозначим через $\pi(n)$ множество всех простых чисел, делящих n. Тогда $|G|$ можно записать в виде произведения $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_s$, где m_i — натуральные числа с $\pi(m_i) = \pi_i(G)$ для $i = 1, \ldots, s$. Числа $m_1, m_2, \ldots, m_s$ называются *порядковыми компонентами* группы G. Пусть $OC(G) = \{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$ — множество порядковых компонент группы G.

Группа G называется *двойной группой Фробениуса*, если $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G, и AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно. Через F_{20} обозначим группу Фробениуса порядка 20.

В [2, § 4] сформулирована следующая

Гипотеза. *Если G — конечная неабелева простая группа с несвязным графом $GK(G)$ и H — конечная группа с $OC(G) = OC(H)$, то $G \cong H$.*

Работа [4] открыла большой цикл работ, в которых эта гипотеза была подтверждена для многих конечных неабелевых простых групп.

В статье [6] утверждается, что конечная неабелева простая группа не может иметь то же множество порядковых компонент, как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса.

В этой заметке мы строим пример двойной группы Фробениуса H с $OC(H) = OC(S_4(3))$, где $S_4(3)$ обозначает простую симплектическую группу степени 4 над полем порядка 3. Тем самым мы получаем контрпример к утверждению из [6] и к упомянутой гипотезе.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00148.

Заметим, что в статье первого автора [1] доказано, что конечная простая группа, изоспектральная двойной группе Фробениуса, изоморфна $U_3(3)$ или $S_4(3)$.

Наши обозначения и терминология взяты из [3, 5].

Пусть $G = S_4(3)$. Тогда $s(G) = 2$, $m_1 = 2^6 \cdot 3^4$, $m_2 = 5$. Построим двойную группу Фробениуса $H = ABC$, где $|A| = 2^4 \cdot 3^4$, $|B| = 5$, $|C| = 4$. Так как A — ядро группы Фробениуса AB, то A нильпотентна, а значит $A = A_2 \times A_3$, где A_2 — силовская 2-подгруппа в A и A_3– силовская 3-подгруппа в A. Предположим, что $1 < \Phi(A_2) < A_2$. Так как числа $2, 4, 8$ не сравнимы с 1 по модулю 5, то $C_{A_2}(B) \neq 1$, противоречие. Значит, $\Phi(A_2) = 1$, поэтому подгруппа A_2 элементарная абелева. Аналогично, подгруппа A_3 элементарная абелева.

Убедимся, что в группах $GL_4(2)$ и $GL_4(3)$ есть подгруппа, изоморфная F_{20}. Рассмотрим сначала группу $GL_4(2) \cong A_8$. Пусть $X = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant 8\}$ — множество точек, на котором естественно действует группа S_8, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset X$. Стабилизатор в S_8 подмножества E равен $L_1 \times L_2$, где $L_1 \cong S(E) \cong S_5$, $L_2 \cong S(X \setminus E) \cong S_3$. Так как $L_1 = M_1\langle t_1\rangle$, $L_2 = M_2\langle t_2\rangle$, где $M_1 \cong A_5$, $M_2 \cong A_3$, $|t_1| = |t_2| = 2$, то стабилизатор в A_8 подмножества E равен $(M_1 \times M_2)\langle t_1t_2\rangle$. Так как $M_1\langle t_1t_2\rangle \cong S_5$ и в S_5 есть подгруппа, изоморфная F_{20}, то и в $GL_4(2)$ есть такая подгруппа.

Рассмотрим теперь группу $GL_4(3)$. По [5] группа $GL_4(3)$ содержит подгруппу $GO_4^-(3)$, изоморфную $2 \times S_6$, а S_6 содержит подгруппу, изоморфную S_5. Но в S_5 есть подгруппа, изоморфная F_{20}, поэтому и $GL_4(3)$ содержит такую подгруппу.

Построим двойную группу Фробениуса H с $OC(H) = OC(S_4(3))$. Положим $K_1 = E_1\langle f_1, t_1\rangle < Hol(E_1)$, где $E_1 \cong 2^4$, $|f_1| = 5$, $|t_1| = 4$ и $\langle f_1, t_1\rangle \cong F_{20}$, $K_2 = E_2\langle f_2, t_2\rangle < Hol(E_2)$, где $E_2 \cong 3^4$, $|f_2| = 5$, $|t_2| = 4$ и $\langle f_1, t_1\rangle \cong F_{20}$. Рассмотрим в группе $K_1 \times K_2$ подгруппу $E_1E_2\langle f_1f_2, t_1t_2\rangle$, где $\langle f_1f_2, t_1t_2\rangle \cong F_{20}$. Тогда G — двойная группа Фробениуса с $OC(G) = OC(S_4(3))$.

Литература

1. *Алеева М. Р.* О конечных простых группах с множеством порядков элементов, как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса // Мат. заметки.—2003.—Т. 73, № 3.—С. 323–339.
2. *Кондратьев А. С.* Граф Грюнберга—Кегеля конечной группы и его приложения // Тр. межд. сем. «Алгебра и линейная оптимизация».—Екатеринбург: УрО РАН, 2002.—С. 141–158.
3. *Aschbacher M.* Finite group theory.—Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
4. *Chen G.* A new characterization of Suzuki-Ree group // Sci. China.—1997.—Ser. A40, № 8.—P. 807–812.
5. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups.—Oxford: Clarendon Press, 1985.
6. *Darafsheh M. R., Karamzadeh N. S., Moghaddamfar A. R.* Relation between Frobenius and 2-Frobenius groups with order components of finite groups // J. Appl. Math. and Computing.—2006.—V. 21, № 1/2.—P. 437–450.

Статья поступила 18 января 2008 г.

Зиновьева Марианна Рифхатовна
ГОУ ВПО «Уральский государственный
технический университет-УПИ»
Екатеринбург, 620002, РОССИЯ
E-mail: `mafenka@yandex.ru`

Кондратьев Анатолий Семенович
Институт математики и механики УрО РАН
Екатеринбург, 620219, РОССИЯ
E-mail: `a.s.kondratiev@imm.uran.ru`