Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 1, С. 27–34

УДК **519.46**

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ПОДГРУППЫ В ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИЕ КВАДРАТИЧНЫЙ ТОР

В. С. Дзигоева, В. А. Койбаев

В работе дается описание подгрупп полной линейной группы $GL(2,k)$ над полем рациональных функций $k = \mathbb{F}_q(t)$ (с коэффициентами из конечного поля нечетной характеристики $\mathbb{F}_q$), содержащих тор, соответствующий квадратичному расширению основного поля k.

Ключевые слова: Группа, подгруппа, промежуточная подгруппа, тор, квадратичный тор.

§ 1. Введение

В рамках задачи исследования структуры подгрупп группы $GL(2,k)$ над глобальным полем k, содержащих тор, соответствующий квадратичному расширению основного поля k [1], мы рассматриваем в данной работе случай, когда основное поле является полем рациональных функций.

Пусть $k = \mathbb{F}_q(t)$ — поле рациональных функций от одной переменной t над конечным полем $\mathbb{F}_q$ нечетной характеристики, $K = k(\sqrt{\mu})$ — квадратичное расширение поля k, где μ — неквадрат поля констант, $\mu \in \mathbb{F}_q^* \backslash \mathbb{F}_q^{*2}$. Рассмотрим регулярное вложение мультипликативной группы K^* в группу всех k — линейных обратимых отображений $\mathrm{Aut}_k(K)$

$$\begin{array}{ll} K^* & \hookrightarrow \mathrm{Aut}_k(K), \\ \alpha & \dashrightarrow \hat{\alpha}, \end{array}$$

где $\hat{\alpha}$ — оператор умножения, $\hat{\alpha}(x) = \alpha x$, $x \in K$. Образом вложения служит максимальный нерасщепимый тор T (квадратичный тор). Зафиксируем базис $1, \sqrt{\mu}$ поля K. Тогда тор T представляет собой подгруппу матриц вида

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x & \mu y \\ y & x \end{pmatrix},\ \text{ где } (x,y) \neq (0,0),\ x,y \in k \right\},$$

в группе $G = GL(2,k)$.

В настоящей работе дается описание решетки $\mathrm{Lat}(T,G)$ подгрупп H полной линейной группы G, содержащих T, т. е. решетки промежуточных подгрупп

$$\mathrm{Lat}(T,G) = \{H : T \leqslant H \leqslant G\}.$$

Для каждой промежуточной подгруппы H, содержащей элементарную трансвекцию, определим модуль транвекций

$$A = A(H) = \left\{ \alpha \in k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H \right\},$$

и кольцо множителей
$$R = R(H) = \{\lambda \in k : \lambda A \subseteq A\}.$$

Если A — подгруппа аддитивной группы поля k, R — кольцо множителей модуля A, то пара (R, A) называется допустимой, если существует промежуточная подгруппа H такая, что $A = A(H)$, $R = R(H)$. Подкольцо R поля k называется допустимым, если $R = R(H)$ для некоторой подгруппы H.

Согласно [2] решетка $\mathrm{Lat}(T, G)$ представляет собой
$$\mathrm{Lat}(T, G) = \{T\} \cup \{N_G(T)\} \cup L,$$
где L — дизъюнктное объединение подрешеток $\mathrm{Lat}(R, A) = \{H \in \mathrm{Lat}(T, H) : R(H) = R,\ A(H) = A\}$ по всем допустимым парам (R, A). Таким образом наша задача сводится к выявлению всех допустимых пар (R, A), а затем, описанию всех подрешеток $\mathrm{Lat}(R, A)$. Заметим, что для произвольного поля k нечетной характеристики, нормализатор $N_G(T)$ тора T совпадает с полупрямым произведением тора T и группы второго порядка, порожденной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

§ 2. Допустимые пары и допустимые кольца

В этом параграфе дается описание допустимых пар и допустимых колец.

Пусть S_0 — множество всех неприводимых многочленов четной степени кольца $\mathbb{F}_q[t]$. Если S — некоторое множество неприводимых многочленов из $\mathbb{F}_q[t]$, то через $S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$ мы обозначаем кольцо всех рациональных дробей, в знаменатели которых входят неприводимые многочлены из S и только они (кольцо частных). Далее, пусть $\nu\Big(\frac{f}{g}\Big) = \deg\, g - \deg\, f$ показатель нормирования. Для произвольного целого k положим
$$\Lambda_k = \left\{ \frac{f}{g} \in F_q(t) : \nu\Big(\frac{f}{g}\Big) \geqslant k \right\}.$$

Ясно, что $\Lambda_i \cdot \Lambda_j = \Lambda_{i+j}$, $\Lambda_i \supseteq \Lambda_{i+1}$, $\Lambda_0 = \Lambda$ — кольцо полуправильных рациональных дробей.

Через R_0 мы обозначаем подкольцо полуправильных рациональных дробей, в знаменатели которых входят неприводимые многочлены четной степени и только они:
$$R_0 = S_0^{-1}(\mathbb{F}_q[t]) \cap \Lambda.$$

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

(a) Пара (R, A) является допустимой тогда и только тогда, когда A — идеал кольца R, содержащего подкольцо R_0.

(b) Если R — допустимое кольцо, то либо $R = S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$, либо $R = S^{-1}(\mathbb{F}_q[t]) \cap \Lambda$ для некоторого $S \supseteq S_0$. Справедливо и обратное утверждение.

Доказательству теоремы предпошлем следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in \mathbb{F}_q[t]$, φ — неприводимый многочлен четной степени,* $\deg\varphi = 2m \geqslant 4$. *Тогда найдутся два неприводимых многочлена ω_1, ω_2 четной степени,* $\deg\omega_1 = 2m - 2$, $\deg\omega_2 = 2$ *такие, что* $(\varphi, \omega_1) = (\varphi, \omega_2) = (\omega_1, \omega_2) = 1$.

Доказательство леммы вытекает из того, что над любым полем нечетной характеристики найдется по крайней мере три различных унитарных неприводимых многочлена второй степени (например, $(t + a)^2 - \mu$, $a \in \mathbb{F}_q$).

Лемма 2. *Пусть $f, \varphi \in \mathbb{F}_q[t]$, $(f, \varphi) = 1$, $\deg\,\varphi \geqslant n$. Пусть, далее,*

$$f \cdot t^k = f_k\omega + \varphi g_k \tag{1}$$

для некоторых f_k, g_k, $\omega \in \mathbb{F}_q[t]$ при всех $k = \overline{0,\, n-1}$. Тогда многочлены f_0, $f_1, \ldots, f_{n-1}$, φ — линейно независимы.

$\lhd$ Действительно, если

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f_k + \lambda\varphi = 0, \tag{2}$$

то из (1) мы имеем

$$f\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k t^k\right) = \omega\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f_k + \lambda\varphi\right) + \varphi\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k g_k - \lambda\omega\right).$$

Тогда из (2)

$$f\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k t^k\right) = \varphi\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k g_k - \lambda\omega\right).$$

Отсюда, так как $(f, \varphi) = 1$, то $\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k t^k\right) \vdots\, \varphi$, но $\deg\,\varphi \geqslant n$, а потому $\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k t^k\right) = 0$. Отсюда и из (2) следует, что $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda = 0$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. (a) То, что A — идеал кольца R следует из [2]. Далее, согласно [2] достаточно показать, что кольцо R_0 совпадает с кольцом

$$R(\mu) = \mathrm{ring}\left\langle 1, \frac{\mu}{x^2 - \mu}\right\rangle_{x \in k} = \mathrm{ring}\left\langle 1, \frac{\mu g^2}{f^2 - \mu g^2}\right\rangle_{f, g \in \mathbb{F}_q[t]}.$$

Всякий многочлен вида $f^2 - \mu g^2$, $(f, g) = 1$, представляет собой произведение неприводимых многочленов четной степени [5], следовательно, $R(\mu) \subseteq R_0$. Докажем обратное включение $R_0 \subseteq R(\mu)$.

Отметим в начале, что $\mathbb{F}_q \subseteq R(\mu)$. Действительно, $\mu \in R(\mu)$ [3], далее, $\mathrm{ring}\left\langle 1, \mu, \frac{1}{z^2-\mu}\right\rangle_{z \in \mathbb{F}_q} \subseteq R(\mu)$. Отсюда $\mathrm{ring}\,\langle 1, \mu, \mathbb{F}_q^2\rangle \subseteq R(\mu)$, а потому $\mathbb{F}_q \subseteq R(\mu)$.

Пусть теперь $\frac{\psi}{\varphi} \in R_0$. Докажем включение $\frac{\psi}{\varphi} \in R(\mu)$ индукцией по $\deg\,\varphi$. Пусть $\deg\,\varphi = 2$. Согласно [5] $\varphi = f^2 - \mu g^2$ для некоторых $f, g, \in \mathbb{F}_q[t]$, $(f, g) = 1$.

С другой стороны

$$\frac{f^2}{f^2 - \mu g^2}, \quad \frac{g^2}{f^2 - \mu g^2}, \quad \frac{fg}{f^2 - \mu g^2}$$

содержатся в $R(\mu)$. Так как $\deg\,\psi \leqslant \deg\,\varphi$, то степени многочленов f^2, g^2, fg не превосходят 2 и эти многочлены линейно независимы, следовательно, $\frac{\psi}{\varphi} \in R(\mu)$. Индукционное предположение состоит в следующем. Если $\frac{\psi}{\varphi} \in R_0$ и $\deg\,\varphi < 2m$, $m \geqslant 2$, то $\frac{\psi}{\varphi} \in R(\mu)$. Пусть теперь $\frac{\psi}{\varphi} \in R_0$ и $\deg\,\varphi = 2m$. Пусть $\varphi = f^2 - \mu g^2$, $(f, g) = 1$. Тогда

$$\frac{f^2}{\varphi} = \frac{f^2}{f^2 - \mu g^2} \in R(\mu).$$

Можно считать, что φ — степень неприводимого многочлена четной степени. Действительно, если $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$, $(\varphi_1, \varphi_2) = 1$, то, разлагая дробь $\frac{\psi}{\varphi}$ в сумму дробей со знаменателями φ_1 и φ_2, мы воспользуемся индукционным предположением. Таким образом, мы можем воспользоваться леммой 1. Выберем ω_1 и ω_2 как в лемме 1 и положим $\omega = \omega_1 \cdot \omega_2$. Тогда $(\varphi, \omega) = 1$. Согласно индукционному предположению $\frac{t^{k-1}}{\omega_1}, \frac{t}{\omega_2} \in R(\mu)$, а потому $\frac{t^k}{\omega} \in R(\mu)$, $k = \overline{0, 2m-1}$. Отсюда $\frac{f^2}{\varphi} \cdot \frac{t^k}{\omega} \in R(\mu)$. Напомним, что $(\varphi, \omega) = 1$. Из разложения

$$\frac{f^2 t^k}{\varphi\omega} = \frac{f_k}{\varphi} + \frac{g_k}{\omega} \tag{3}$$

и того, что $\frac{g_k}{\omega} \in R(\mu)$ — как линейная комбинация многочленов $\frac{t^k}{\omega}$, мы имеем $\frac{f_k}{\varphi} \in R(\mu)$, $k = \overline{0, 2m-1}$. Далее, $\frac{\varphi}{\varphi} = 1 \in R(\mu)$. С другой стороны, из леммы 2 следует, что многочлены $f_0, f_1, \ldots, f_{2m-1}, \varphi$ линейно независимы (и их степени $\leqslant 2m$), поэтому ψ, $\deg \psi \leqslant 2m$, является их линейной комбинацией, а потому $\frac{\psi}{\varphi} \in R(\mu)$.

(b) Пусть R — допустимое подкольцо. Согласно пункту (a) нашей теоремы $R \supseteq R_0$. Рассмотрим случай, когда $R \subseteq \Lambda$ (случай $R \nsubseteq \Lambda$ рассматривается аналогично).

Обозначим через S множество всех неприводимых многочленов входящих в знаменатели дробей из R. Так как $R \supseteq R_0$, то $S \supseteq S_0$.

Покажем, что $R = S^{-1}(\mathbb{F}_q[t]) \cap \Lambda$. Очевидно, что $R \subseteq S^{-1}(\mathbb{F}_q[t]) \cap \Lambda$. Докажем обратное включение. Если $S = S_0$, то доказывать нечего, поэтому пусть $S \supsetneq S_0$. Пусть $p \in S$ — неприводимый многочлен нечетной степени. Для доказательства включения нам нужно показать, что всякая дробь $\frac{f}{p^m}$, где $\deg f \leqslant \deg p^m$, содержится в R. Действительно, кольцо R содержит дробь $\frac{h}{\varphi_1}$, где $p|\varphi_1$, $(p, h) = 1$, но тогда $(R \supseteq R_0)$ кольцо R содержит дробь вида $\frac{h_1}{p\varphi_0}$, где $\varphi_0 \in S_0$. Разлагая последнюю дробь в сумму дробей (заметим, что $(p, \varphi_0) = 1$) со знаменателями p и φ_0 мы получим, что дробь вида $\frac{h}{p}$, а потому и дробь вида $\frac{h}{p^m}$, содержится в R (для некоторого h). Осталось показать, что $\frac{f}{p^m} \in R$ для произвольного многочлена f, $\deg f \leqslant \deg p^m$.

Пусть $\deg p^m = n$, $\varphi_0 \in S_0$, $(p, \varphi_0) = 1$, $\deg \varphi_0 > n$. Тогда $\frac{t^k}{\varphi_0} \in R$, $k = \overline{0, n-1}$, а потому $\frac{h}{p^m} \cdot \frac{t^k}{\varphi_0} \in R$. Имеем, далее, $(\varphi_0, p^m) = 1$,

$$\frac{ht^k}{p^m \varphi_0} = \frac{f_k}{p^m} + \frac{g_k}{\varphi_0} \tag{4}$$

для всех $k = \overline{0, n-1}$. Заметим, что $(h, p) = 1$. Из леммы 2 следует линейная независимость многочленов $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, p^m$ степень которых $\leqslant n$, а потому их линейная комбинация дает нам произвольный многочлен f, $\deg f \leqslant n$. Осталось заметить, что, так как $\frac{g_k}{\varphi_0} \in R_0$, то из (4) следует включение $\frac{f_k}{p^m} \in R$, $k = \overline{0, n-1}$, $1 = \frac{p^m}{p^m} \in R$. Следовательно, $\frac{f}{p^m} \in R$. $\triangleright$

§ 3. Допустимые кольца

Как уже было показано (теорема 1), всякое допустимое кольцо R содержит подкольцо R_0. Точнее, R совпадает либо с $R = S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$, либо $R = S^{-1}(\mathbb{F}_q[t]) \cap \Lambda$ для $S \supseteq S_0$. В этом параграфе мы покажем (теорема 2), что всякое допустимое кольцо R отличное от R_0 является областью главных идеалов, при этом идеал кольца R_0 является либо главным, либо порождается двумя элементами. Если $R = S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$, то кольцо R является кольцом главных идеалов (как кольцо частных области главных идеалов), поэтому, в дальнейшем в этом параграфе, мы предполагаем, что $R = S^{-1}(\mathbb{F}_q[t]) \cap \Lambda$, $S \supseteq S_0$.

Доказательство следующих двух лемм мы опускаем.

Лемма 3. *Пусть* $M \subseteq S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$ — R*-модуль,*

$$F = \left\{ f \in \mathbb{F}_q[t] : \frac{f}{g} \in M,\ (f, g) = 1 \right\}.$$

Пусть НОД $F = 1$. *Тогда*

а) найдутся $\frac{\varphi_1}{\psi_1}, \frac{\varphi_2}{\psi_2} \in M$ *такие, что* $(\varphi_1, \varphi_2) = 1$,

б) $\frac{1}{g} \in M$ *для некоторого* $g \in \langle S \rangle$.

Замечание.Через $\langle S \rangle$ мы обозначим мультипликативное множество многочленов, порожденное множеством S, $S \supseteq S_0$.

Лемма 4. *Пусть* $M \subseteq S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$ — R*-модуль,* $u, u_1 \in M$, $u \neq 0$ *такие, что* $\nu(u_1) \geqslant \nu(u)$. *Тогда для некоторого* $r \in R$ *имеем* $\nu(u_1 - ru) > \nu(u_1)$.

Введем обозначение

$$A_k = \Lambda_k \cap S^{-1}(\mathbb{F}_q[t]).$$

Заметим, что $A_0 = R$ и A_k является R-модулем для любого целого k.

Лемма 5. *Пусть* $u \in S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$, $\nu(u) = l$. *Если* $s \geqslant l$, $s \in Z$, *то*

$$Ru + A_s = A_l.$$

$\lhd$ Пусть $u_1 \in A_l$, $\nu(u_1) \geqslant l$. Согласно лемме 4 мы можем подобрать $r_1, r_2, \ldots,$ такие, что $l = \nu(u) \leqslant \nu(u_1) < \nu(u_1 - r_1 u) < \nu(u_1 - r_1 u - r_2 u) < \ldots$

Процесс продолжаем до тех пор, пока не получим

$$\nu(u_1 - r_1 u - r_2 u - \ldots - r_k u) \geqslant s.$$

Откуда следует, что $u_1 - ru \in A_s$. Итак, $A_l \subseteq R_u + A_s$. Обратное включение очевидно. $\rhd$

Лемма 6. *Пусть* $M \subseteq S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$ — R*-модуль, содержащий* $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2}$ *с условием* $(f_1, f_2) = 1$. *Если* $\nu(M) = \min\limits_{u \in M} \nu(u) = l > -\infty$, *то* $M = A_l$.

$\lhd$ Согласно лемме 2 дробь $\frac{1}{g} \in M$ для некоторого g. Пусть $\deg\, g = k$. Тогда $A_k \subseteq M$. Действительно, пусть $\frac{f_1}{g_1} \in A_k$, тогда $g\frac{f_1}{g_1} \in R$ и $\frac{f_1}{g_1} = \frac{gf_1}{g_1} \cdot \frac{1}{g} \in M$.

Пусть $u \in M$ такой, что $\nu(u) = l$. Заметим, что $k \geqslant l$. Из леммы 4 следует

$$Ru + A_k = A_l,$$

а так как $Ru + A_k \subseteq M$, то $A_l \subseteq M$. Обратное включение очевидно по определению числа l. $\rhd$

Предложение. *Пусть* $A \subseteq R$ — *идеал кольца* R. *Тогда идеал* A *является либо главным, либо имеет вид* $A = uA_1$, *где* $u \in S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$ *и* $\nu(u) + 1 \geqslant 0$.

$\lhd$ Через f_0 и g_0 обозначим НОД всех числителей и знаменателей соответственно дробей из A. Мы предполагаем, что $A \neq (0)$. Тогда $A = \frac{f_0}{g_0}M$, где $M = \left\{ \frac{f}{g} : \frac{f_0 f}{g_0 g} \in A \right\}$. Согласно леммам 1 и 6 имеем $M = A_l$, где $l = \nu(M)$. Отсюда $A = u_0 A_l$, где $u_0 = \frac{f_0}{g_0}$, причем $\nu(u_0) + l \geqslant 0$, так как $A \subseteq R \subseteq \Lambda$. Далее, используя многочлены ω четной степени из S_0, в силу равенства $\omega A_l = A_{l+2s}$, $\deg\, \omega = 2s$, мы получим что в случае, если l четно, то $A = uA_0 = uR$, $u \in R$, если же l нечетно, то $A = uA_1$, где $\nu(u) + 1 \geqslant 0$. $\rhd$

Теорема 2. *Всякое допустимое кольцо R, отличное от R_0, является областью главных идеалов. В кольце R_0 всякий идеал является либо главным, либо порождается двумя элементами.*

$\lhd$ Пусть A идеал кольца R, $R \neq R_0$. Как было отмечено в начале параграфа можно считать, что $R = \Lambda \cap S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$, $S \supseteq S_0$. Тогда согласно предложению

$$A = uA_1,$$

где $\nu(u) + 1 \geqslant 0,\ \ u \in S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$.

Так как $S \supsetneq S_0$, то пусть $\omega \in S$ — неприводимый многочлен нечетной степени n, $\deg\,\omega = n$, пусть, далее, $\omega_0 \in S_0 \subseteq S$ — многочлен четной степени $n+1$, $\deg\,\omega_0 = n+1$. Тогда $\frac{\omega_0}{\omega}A_1 = A_0 = R$,

$$\frac{\omega_0}{\omega}A = u\frac{\omega_0}{\omega}A_1 = uR, \ \ A = \frac{\omega}{\omega_0}uR,$$

где $\frac{\omega}{\omega_0}u \in S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$, $\nu\left(\frac{\omega}{\omega_0}u\right) = \nu\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \nu(u) = 1 + \nu(u) \geqslant 0$, а потому $\frac{\omega}{\omega_0}u \in R$.

Рассмотрим теперь идеалы кольца R_0. Пусть A — идеал кольца R_0, который не является главным. Согласно предложению тогда

$$A = uA_1, \quad \nu(u) + 1 \geqslant 0, \quad u \in S_0^{-1}(\mathbb{F}_q[t]).$$

Пусть $u = \frac{f}{\varphi_0}$, где $\nu(u) = k \geqslant -1$, $\varphi_0 \in \langle S_0\rangle$, $\deg\,\varphi_0 = 2l$, $\deg\,f = 2l - k$, $k \geqslant -1$. Нетрудно проверить, что идеал A кольца R_0 порождается двумя элементами. Точнее,

$$A = \frac{f}{\varphi_0}A_1 = \frac{f}{\varphi}R_0 + \frac{f\cdot t}{\varphi}R_0,$$

где $\varphi \in S_0$, $\deg\,\varphi = 2l + 2$. $\rhd$

§ 4. Подрешетка $\mathrm{Lat}\,(R, A)$

Перейдем теперь к описанию подрешеток $\mathrm{Lat}(R, A)$, связанных с допустимыми парами.

В ходе описания мы используем [2] факторизацию промежуточных подгрупп $H \in \mathrm{Lat}(R, A)$, а именно представление H в виде

$$H = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \Delta(H) \leqslant R^*$.

Согласно [2], роль наименьшей F_0 и наибольшей F^0 подгрупп в подрешетке $\mathrm{Lat}(R, A)$ играют

$$F_0 = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega_0(A) \end{pmatrix}, \qquad F^0 = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix},$$

где подгруппы $\Omega_0(A)$ и $\Omega^0(A)$ мультипликативной группы R^* кольца R определяются следующим образом:

$$\Omega_0(A) = \left\langle f(x,\alpha) = \left(1 + \frac{\mu x}{x^2 - \mu}\alpha\right)^2 - \mu\left(\frac{\mu}{x^2 - \mu}\alpha\right)^2,\ x \in k,\ \alpha \in A \right\rangle,$$
$$\Omega^0 = \langle \theta \in R^* : \theta^2 - 1 \in A\rangle.$$

Очевидно, что

$$\Omega_0(A) \leqslant \Delta \leqslant \Omega^0(A).$$

На множестве $\mathrm{Lat}(R, A)$ рассмотрим две унарные операции:

1) операция спуска:

$H \to H_{(1)} = T^H = \langle h^{-1}Th,\ h \in H\rangle$ — нормальное замыкание H (относительно T);

2) операция подъема:

$H \to H^{(1)} = N_G(H)$ — нормализатор H в группе G.

Операции допускают итерирование:

$$H_{(n)} = ((H)_{(n-1)})_{(1)}, \quad H^{(n)} = ((H)^{(n-1)})^{(1)}.$$

Теорема 3. *Если стабильный ранг* (s. r. R) *кольца R равен 1, то для любой подгруппы $H \in \mathrm{Lat}(R, A)$ второе нормальное замыкание совпадает с наименьшей подгруппой подрешетки, $H_{(2)} = F_0$.*

$\lhd$ Обозначим через $H_0 = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & (1+A)^* \end{pmatrix}$ промежуточную подгруппу из $\mathrm{Lat}(R, A)$.

Покажем, что нормальное замыкание любой подгруппы H содержится в H_0.

Пусть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$. Тогда [2]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix},$$

где $\gamma_1 = 1 + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \cdot \frac{\mu}{x^2-\mu} + \frac{2\mu\beta x}{\gamma(x^2-\mu)} + \frac{\mu^2\beta^2}{(x^2-\mu)\gamma^2}$, $b \in T$.

Имеем $\gamma_1 \in (1 + A)$, и, так как $\gamma_1 \in R^*$, то $\gamma_1 \in (1 + A)^*$. Таким образом,

$$\Delta_{(1)} = \Delta(H_{(1)}) \leqslant (1 + A)^*,$$

и $H_{(1)} \leqslant H_0$.

Покажем теперь, что нормальное замыкание H_0 совпадает с F_0. Согласно [2], при условии s. r. $R = 1$ справедливо

$$\Delta((H_0)_{(1)}) = \Omega_0(A) \cdot (1 + A)^{*2}.$$

Если $\gamma \in (1 + A)^*$, то $\gamma^2 \in \Omega_0(A)$ [2].

Таким образом, $(1 + A)^{*2} \subseteq \Omega_0(A)$ и $\Delta((H_0)_{(1)}) \subseteq \Omega_0(A) \to (H_0)_{(1)} = F_0$.

Осталось воспользоваться монотонностью операции спуска

$$H_1 \leqslant H_2 \to (H_1)_{(1)} \leqslant (H_2)_{(1)}.$$

Имеем

$$(H)_{(2)} = (H_{(1)})_{(1)} \leqslant (H_0)_{(1)} = F_0.$$

Откуда $H_{(2)} = F_0$. $\rhd$

Теорема 4. *Если* s. r. $R = 1$, *то второй нормализатор произвольной подгруппы из* $\mathrm{Lat}\ (R, A)$ *совпадает с наибольшей подгруппой подрешетки,* $(H)^{(2)} = F^0$.

$\lhd$ Так как нормальное замыкание $H_{(1)} = T^H$ — наименьшая нормальная подгруппа в H, содержащая тор, то $H \leqslant N_G(H_{(1)})$. В частности, из $(H_0)_{(1)} = F_0$ следует $H_0 \leqslant N_G(F_0)$, т. е. $H_0 \leqslant F_0^{(1)}$.

Далее, очевидно, что $H_0^{(1)} \leqslant F^0$. Докажем обратное включение. Пусть

$$H_0^{(1)} = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta' \end{pmatrix}, \quad \text{где } \Delta' \leqslant \Omega^0(A).$$

Согласно [2],

$$\Delta' = \left\{\theta \in \Omega^0(A) : \, g(x,\theta) \in (1+A)^*\right\},$$

где $g(x,\theta) = \frac{\theta^2 x^2 - \mu}{\theta^2(x^2-\mu)} = 1 + \frac{\mu}{x^2-\mu} \cdot \frac{\theta^2-1}{\theta^2}$.

Отметим, что

$$g^{-1}(x,\theta) = \frac{(x^2-\mu)\theta^2}{(x\theta)^2-\mu} = 1 + \frac{\mu}{(x\theta)^2-\mu} \cdot \frac{\theta^{-2}-1}{\theta^{-2}} = g\left(x\theta, \theta^{-1}\right).$$

Докажем, что $\Omega^0(A) \leqslant \Delta'$. Пусть $\gamma \in \Omega^0(A)$, тогда $\gamma^2 - 1 \in A$. Имеем

$$g(x,\gamma) = 1 + \frac{\mu}{x^2-\mu} \cdot \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} \in 1 + A,$$

а значит $g(x,\gamma) \in (1+A)^*$ и $\gamma \in \Delta'$. Таким образом, $\Delta' = \Omega^0(A)$, следовательно, $(H_0)^{(1)} = F^0$. Осталось воспользоваться монотонностью операции подъема, $H_1 \leqslant H_2 \to H_1^{(1)} \leqslant H_2^{(1)}$. Имеем

$$F^0 = (H_0)^{(1)} \leqslant (F_0)^{(2)} \leqslant (H)^{(2)}.$$

Из чего следует, что $H^{(2)} = F^0$. $\triangleright$

Литература

1. *Койбаев В. А.* Подгруппы группы $GL(2,Q)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 312, № 1.—С. 36–38.
2. *Койбаев В. А.* Подгруппы группы $GL(2,k)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Зап. науч. семинаров ПОМИ РАН.—1994.—Т. 211.—С. 136–145.
3. *Боревич З. И., Койбаев В. А.* О кольцах множителей, связанных с промежуточными подгруппами, для квадратичных торов // Вестник СПбГУ. Сер. 1.—1993.—№ 2.—С. 5–10.
4. *Дзигоева В. С., Койбаев В. А.* Подгруппы полной линейной группы степени 2 над полем рациональных функций, содержащие нерасщепимый тор // Междунар. алгебр. конф. Тезисы докл.—С.-Петербург, 1997.—С. 193.
5. *Дзигоева В. С., Койбаев В. А.* О подгруппах полной линейной группы степени 2 над полем рациональных функций, содержащих нерасщепимый тор // Вестник СОГУ.—1999.—№ 1.—С. 22–23.

Статья поступила 10 февраля г.

Дзигоева Валентина Созрыкоевна
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
Владикавказ, 362040, РОССИЯ

Койбаев Владимир Амурханович
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова;
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
Владикавказ, 362040, РОССИЯ
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru