Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 1, С. 10–23

УДК **512+514**

ГЕОМЕТРИЯ МИКРОВЕСОВЫХ ТОРОВ[1]

Н. А. Вавилов, В. В.Нестеров

В работе анонсируются недавние результаты авторов, относящиеся к геометрии микровесовых и длинных корневых торов. Формулируются теоремы редукции в задаче описания подгрупп, порожденных парами торов такого вида, и теорема, утверждающая существование в таких порождениях небольших унипотентных элементов. До работ авторов эти результаты были известны лишь для модельного случая 1-торов в полной линейной группе (первый автор, Коэн, Кейперс, Стерк). Формулируются дальнейшие нерешенные вопросы в этой области.

Ключевые слова: группа Шевалле, весовые элементы, микровесовые торы, длинные корневые торы, маленькие унипотентные элементы.

Настоящая работа посвящена довольно подробному, но не слишком техническому описанию доказанных нами недавно результатов [15, 18–21], закладывающих основы геометрии микровесовых торов, параллельной классической геометрии *длинных* корневых подгрупп. Кроме того, мы хотим обрисовать ближайшие перспективы геометрии торов в целом и сформулировать несколько важнейших нерешенных проблем.

С содержательной точки зрения смысл наших основных результатов в этих работах состоит в том, что (для достаточно больших полей) они позволяют *полностью* свести изучение подгрупп, содержащих маленькие полупростые элементы, к изучению подгрупп, содержащих маленькие унипотентные элементы. Известно, что задачи порождения унипотентными элементами много проще, чем задачи порождения полупростыми элементами.

Результаты такого типа интересны сами по себе, но в нашей работе они естественно возникли в связи с различными задачами описания подгрупп и в первую очередь в связи с попытками поиска более простого доказательства результатов о надгруппах расщепимых максимальных торов (см., в частности, [13, 14, 80, 94, 118, 119], где можно найти детальное обсуждение истории этой задачи и много дальнейших ссылок).

Упомянем еще три цикла работ, *теснейшим* образом связанные в техническом плане с настоящей работой.

• Статьи первого автора о разложении Брюа микровесовых элементов [8, 9, 13, 16]. Проведенные в этих работах вычисления орбит борелевской подгруппы (см. также [98–100]) служат основой как для проводимых нами редукций, так и для сокращения перебора случаев.

• Статьи второго автора по геометрии *коротких* корневых подгрупп [46–50]. В этих работах разработаны важные технические приемы описания орбит и порождений, которые мы используем в наших работах, в особенности при доказательстве результатов для исключительных групп в [20, 21].

[1]Настоящая работа была поддержана проектом INTAS 03-51-3251.

• Статьи первого автора и Андрея Семенова о длинных корневых торах [10–12, 24, 25, 52, 53] и статьи Лино Ди Мартино, первого автора и Игоря Певзнера о тройках длинных корневых подгрупп в группах Шевалле [23, 78]. Там тоже происходит редукция к ортогональной группе $\mathrm{SO}(8, K)$, после чего вопрос решается непосредственным вычислением в этой группе.

Многие аспекты этих результатов были угаданы нами и сформулированы, частично как теоремы, частично как гипотезы, в середине 1990-х гг. В частности, в то время мы уже владели доказательствами большинства редукционных теорем, о которых мы рассказали на конференциях по группам и геометриям в Сиене и Обервольфахе в 1996 г. На основе изучения орбит в случае алгебраически замкнутого поля и конкретных вычислений в случае конечных полей нам было ясно, появление какого рода унипотентных элементов естественно ожидать в каждом случае. Мы были уверены, что аналогичные результаты справедливы для любого не слишком маленького поля. Однако, в то время мы так и не смогли преодолеть серьезные технические трудности, стоящие на пути полного осуществления этой программы над произвольными полями. К тому же, тогда мы относились к результатам для микровесовых торов несколько легкомысленно, считая их всего лишь подготовкой к рассмотрению главного случая — длинных корневых торов. Содержание настоящей работы было представлено в нашем докладе на конференции по алгебраическим группам и группам преобразований в Билефельде (июль 2007 г.).

1. Весовые элементы

Напомним, что микровесовые элементы — это самые просто устроенные, и, в некотором смысле, самые *маленькие*, полупростые элементы в группах Шевалле $G(\Phi, K)$. В присоединенных группах эти элементы были построены самим Шевалле в его основополагающей работе [55]. Построить аналогичные элементы в односвязном случае гораздо сложнее, так как они, вообще говоря, принадлежат не самой группе Шевалле, а ее диагональному расширению — расширенной группе Шевалле $\overline{G}(\Phi, K)$. Это было сделано Берманом и Муди в [61].

В конце 1980-х гг. в связи с работами по описанию надгрупп максимальных торов в группах Шевалле первый автор предпринял систематическое исследование микровесовых элементов. В частности, тогда он вычислил их разложение Брюа, действие в представлениях, диагональные автоморфизмы индуцированные на подсистемах и другие подобные вещи. Эти результаты были анонсированы в [8, 9, 13, 14] детальные доказательства большинства из них циркулировали в виде препринта [118], но не были своевременно опубликованы. Полная публикация, содержащая все детали вычислений [16], появилась только сейчас, именно в связи с потребностями работ [18–21].

Напомним основные используемые в дальнейшем обозначения. Определения всех понятий, относящихся к системам корней, группам Вейля, весам и представлениям, классическим группам и группам Шевалле можно найти в [6, 7, 54, 63, 79, 89].

Пусть Φ — приведенная неприводимая система корней в l-мерном эвклидовом пространстве V, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение на V. Для двух корней $\alpha, \beta \in \Phi$ через $\langle \beta, \alpha \rangle = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) = (\beta, \alpha^\vee)$ обозначается соответствующее число Картана, где $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ — двойственный корень. Через $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee, \alpha \in \Phi\}$ обозначается двойственная система корней. Далее, пусть $Q(\Phi)$ — решетка корней, порожденная всеми $\alpha \in \Phi$, а $P(\Phi)$ — решетка весов, состоящая из всех $\omega \in V$ таких, что $(\alpha^\vee, \omega) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha^\vee \in \Phi^\vee$. Зафиксируем систему простых корней $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ в Φ. Пусть Φ^+ и Φ^- — соответствующие множества положительных и отрицательных корней. Выбор Π задает на $P(\Phi)$ следующий частичный порядок: $\lambda \succeq \mu$, если $\lambda - \mu = \sum m_i \alpha_i$, где все $m_i \geqslant 0$.

Далее, пусть K — поле; P — решетка, лежащая между $Q(\Phi)$ и $P(\Phi)$; $G = G(\Phi, K)$ — группа Шевалле типа Φ, P над K; $T = T(\Phi, K)$ — расщепимый максимальный тор в G. В случае, когда $P = P(\Phi)$, группа $G = G_{\mathrm{sc}}$ называется односвязной, а в случае $P = Q(\Phi)$ группа $G = G_{\mathrm{ad}}$ называется присоединенной. Обычно мы предполагаем, что группа G односвязна. Для корня $\alpha \in \Phi$ и элемента $\xi \in K$ через $x_\alpha(\xi)$ обозначается соответствующий элементарный корневой унипотент в G. Для фиксированного α множество всех $x_\alpha(\xi)$ образует элементарную корневую унипотентную подгруппу $X_\alpha = \{x_\alpha(\xi),\ \xi \in K\}$.

Пусть $\omega \in P(\Phi^\vee)$. Тогда по определению $(\alpha, \omega) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in \Phi$. Таким образом, для $\varepsilon \in K^*$ можно определить K-характер $\chi = \chi_{\omega,\varepsilon}$ решетки корней $Q(\Phi)$ посредством $\chi_{\omega,\varepsilon}(\alpha) = \varepsilon^{(\alpha,\omega)}$. Теперь можно рассмотреть диагональный автоморфизм, связанный с этим характером [34, 43]. Обозначим через $h_\omega(\varepsilon)$ элемент, сопряжение при помощи которого реализует этот диагональный автоморфизм. Иными словами, этот элемент коммутирует со всеми элементами T и удовлетворяет следующему коммутационному соотношению:

$$h_\omega(\varepsilon)x_\alpha(\xi)h_\omega(\varepsilon)^{-1} = x_\alpha(\varepsilon^{(\alpha,\omega)}\xi), \tag{1}$$

для всех $\alpha \in \Phi$, $\xi \in K$. Эти элементы, вообще говоря, принадлежат не самой группе G, а ее диагональному расширению $\overline{G}$ — *расширенной группе Шевалле* — которая соотносится с обычной группой Шевалле так же, как полная линейная группа $\mathrm{GL}(n, K)$ соотносится со специальной линейной группой $\mathrm{SL}(n, K)$ или полная симплектическая группа $\mathrm{GSp}(2l, K)$ соотносится с обычной симплектической группой $\mathrm{Sp}(2l, K)$. Мы называем элемент h группы $\overline{G}$ *весовым элементом* типа ω, если он сопряжен с некоторым $h_\omega(\varepsilon)$.

В случае, когда ω является *микровесом* системы $\Phi^\vee$ — `poids minuscule` в смысле Бурбаки [6] — весовые элементы $h_\omega(\varepsilon)$ устроены особенно просто. В статье [16] можно найти ссылки на дальнейшие работы, содержащие детальное обсуждение роли микровесов в изучении групп Шевалле. Приведем список микровесов: все фундаментальные веса A_l; ϖ_l для B_l; ϖ_1 для C_l; ϖ_1, ϖ_{l-1} и ϖ_l для D_l; ϖ_1 и ϖ_6 для E_6 и, наконец, ϖ_7 для E_7. У систем типов E_8, F_4, G_2 микровесов вообще нет. Вес ω системы $\Phi^\vee$ в том и только том случае является микровесом, когда унипотентный радикал соответствующей параболической подгруппы в G абелев. Иными словами, абелевым должно быть множество $\Sigma_\omega = \{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, \omega) > 0\}$ — сумма любых двух корней из Σ_ω не является корнем. Весовые элементы типа ω, где ω является микровесом $\Phi^\vee$, называются *микровесовыми элементами*.

2. Пары микровесовых торов

Пусть $\omega \in P(\Phi^\vee)$ — микровес системы $\Phi^\vee$. Мы рассматриваем однопараметрическую подгруппу

$$Q_\omega = \{h_\omega(\varepsilon) \mid \varepsilon \in K^*\} \leqslant \overline{G}(\Phi, K).$$

Любая подгруппа в $\overline{G}(\Phi, K)$, сопряженная с Q_ω, называется *микровесовым тором* типа ω. В дальнейшем, чтобы не писать постоянно черту над G, мы будем для простоты рассматривать только присоединенный случай, когда $Q_\omega \leqslant G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$.

Нашей основной целью является построение геометрии микровесовых торов в группах Шевалле. Одним из первых шагов в этом направлении служит изучение орбит группы Шевалле $G(\Phi, K)$, действующей одновременным сопряжением на парах и тройках микровесовых торов данного типа.

При этом с точки зрения большинства приложений для нас важна даже не столько классификация орбит, сколько классификация *порождений* $\langle X, Y\rangle$ таких пар X, Y.

Так как наши результаты носят достаточно технический характер и часто формулируются в виде (не слишком коротких!) таблиц, здесь мы ограничимся лишь двумя просто формулируемыми качественными прелиминариями/следствиями наших основных результатов.

Во-первых, одним из ключевых инструментов при доказательстве наших результатов являются теоремы редукции, утверждающие, что каждая подгруппа $\langle X, Y\rangle$, порожденная двумя микровесовыми торами X, Y, содержится в классической подгруппе небольшого ранга.

С другий стороны, основным мировоззренческим итогом наших результатов является утверждение, что в случае $|K| \geqslant 7$ каждая подгруппа $\langle X, Y\rangle$, порожденная двумя *некоммутирующими* микровесовыми торами X, Y, содержит однопараметрическую унипотентную подгруппу, состоящую из совсем маленьких элементов.

А именно, в цикле наших совместных работ [15, 18–21] эти вопросы решаются, соответственно, для следующих случаев пар микровесовых торов:

- типа ϖ_1 в группе Шевалле $G(\mathrm{A}_l, K)$ [15],
- типа ϖ_2 в группе Шевалле $G(\mathrm{A}_l, K)$ [18],
- типа ϖ_1 в группе Шевалле $G(\mathrm{D}_l, K)$ [19],
- типа ϖ_1 в группе Шевалле $G(\mathrm{E}_6, K)$ [20],
- типа ϖ_7 в группе Шевалле $G(\mathrm{E}_7, K)$ [21].

Результаты первой из этих статей были фактически доказаны в 1995 г. и циркулировали в виде препринта [121], однако, также не были своевременно опубликованы. В 1999 г. появилась важная работа А. Коэна, Х. Кейперса и Х. Стерка [66], содержащая геометрический подход к доказательству этих — и несколько более общих — результатов.

В процессе работы над статьями [18–21] несколько неожиданно для нас самих выяснилось, что эти случаи вложены друг в друга как матрешки и каждый из них абсолютно необходим для рассмотрения всех следующих случаев.

Заметим, что все наши результаты относятся к случаю (почти) произвольного поля. Ранее результаты такого типа имелись лишь для алгебраически замкнутых полей, где они получаются с использованием теории представлений алгебраических групп, и, отчасти, для случая конечного поля, в тех случаях, когда их удается свести к абсолютному случаю, либо к классификации конечных простых групп.

С другой стороны, в работах первого автора [13, 14, 80, 119, 120] результаты такого типа доказывались для подгрупп, содержащих расщепимый *максимальный* тор. Так же можно найти ссылки на предшествующие работы З. Боревича, первого автора, Е. Дыбковой, В. Койбаева, О. Кинга и других, посвященные аналогичным вопросам для классических групп. В излагаемых здесь работах мы доказываем *гораздо* более сильные результаты, из которых видно, что весь максимальный тор для этого не нужен, а достаточно иметь лишь два некоммутирующих одномерных тора!

Наши результаты отличаются от результатов для корневых подгрупп в одном важном отношении. А именно, в то время как для пар (X, Y) корневых подгрупп орбитали и соответствующие им порождения $\langle X, Y\rangle$ не зависят от поля, в нашем случае поля K, $|K| \leqslant 7$, являются истинными исключениями. В этих случаях конкретный вид порождения $\langle X, Y\rangle$ отличается от того, что получается в общем случае.

3. Редукция к меньшим рангам

Ключом к нашим основным результатам в работах [18–21] является наблюдение, что пара микровесовых торов — или хотя бы редуктивная часть порожденной ими подгруппы — содержится в классической подгруппе небольшого ранга. После этого все доказательства завершаются трудоемким, но достаточно рутинным прямым вычислением.

Редукции для редуктивной части были в принципе известны и ранее, так как они вытекают уже из результатов первого автора по разложению Брюа микровесовых элементов, см., в частности, [8, 9, 13] и в особенности [16]. Однако, для полного описания орбиталей этого результата совершенно недостаточно, так как нам нужно еще проследить за унипотентной частью. Более того, для некоторых случаев, например, для (E_6, ϖ_1) все трудные вычисления нужны именно здесь, так как из общих соображений, связанных с двойными смежными классами группы Вейля, сразу видно, что редуктивная часть попадает в D_5, а вот то, что происходит с унипотентной частью, требует абсолютно конкретного детального анализа.

Редукции, включающие унипотентную часть, доказаны нами в [18–21]. Заметим, что мы не стремились сразу получить подгруппы Γ и Δ наименьшего возможного ранга, так как нам достаточно иметь такой результат, который позволяет сослаться на результат предыдущей работы. В классических случаях наши доказательства носят геометрический характер, примерно в духе того, что происходит в соответствующих местах в [15, 23, 78].

В исключительных случаях мы вообще не пытались сразу ограничивать унипотентную часть, для $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$ мы берем тривиальную оценку $\Delta = \Phi$. Однако, так как редуктивная часть попадает в подгруппу Леви собственной параболической подгруппы, и каждый раз уже известна из предыдущей работы, все вычисления теперь сводятся к вычислениям в унипотентных радикалах. А как замечает по этому поводу известный герой, NOBODY BEATS ME IN THE KITCHEN, [16, 46–50].

Теорема 1. *Пусть $G = G(\Phi, K)$ — группа Шевалле, X и Y — два микровесовых тора типа ω. Тогда найдется подсистемы корней $\Gamma \leqslant \Delta \leqslant \Phi$ и $u \in U(\Phi, K)$ такие, что*

$$\langle X, Y\rangle \leqslant uG(\Delta, K)u^{-1},$$

причем редуктивная часть подгруппы $\langle X, Y\rangle$ содержится уже в $uG(\Gamma, K)u^{-1}$. Подсистемы Γ и Δ перечислены в следующей таблице:

- $\Gamma \leqslant \mathrm{A}_{2m-1}$, $\Delta \leqslant \mathrm{A}_{3m-1}$ *для* (A_l, ϖ_m),
- $\Gamma = \Delta \leqslant \mathrm{D}_3$ *для* (D_l, ϖ_1),
- $\Gamma \leqslant \mathrm{D}_5$ *для* (E_6, ϖ_1),
- $\Gamma \leqslant \mathrm{E}_6$ *для* (E_7, ϖ_7).

Доказывается эта теорема не слишком сложно, а действенность ее весьма велика, так как она эффективно сводит изучение порождений парами микровесовых торов данного типа к прямым вычислениям в достаточно маленькой — и с точностью до унипотентной части, классической — подгруппе.

Заметим, что в работе [22] нам вместе с Андреем Семеновым удалось провести аналогичную редукцию и для подгрупп, порожденных парами длинных корневых торов. Напомним, что это сопряженные тора $H_\alpha = \{h_\alpha(\alpha) \mid \varepsilon \in K^*\}$, где $\alpha \in \Phi$ — длинный корень.

Теорема 2. *Пусть $G = G(\Phi, K)$ — группа Шевалле, X и Y — два длинных корневых тора. Тогда найдется подсистема $\Delta \leqslant \Phi$, изоморфная скручиванию какой-то подсистемы в D_5 и $u \in U(\Phi, K)$ такие, что*

$$\langle X, Y\rangle \leqslant uG(\Delta, K)u^{-1}.$$

Эта теорема говорит, что с точки зрения пар длинных корневых торов вообще все группы Шевалле — включая группы типов E_6, E_7, E_8! — устроены не сложнее, чем

$\mathrm{SO}(10,K)$. Обратите внимание, что здесь речь идет о самой группе $\langle X,Y\rangle$, а не о ее редуктивной части! Для *редуктивных* подгрупп, порожденных парами длинных корневых торов, аналогичная редукция к D_4 вытекает уже из наших предшествующих работ [10–13, 24, 25, 52, 53] и независимо переоткрыта Герхардом Рерле [99, 100]. С использованием этого результата в дальнейшем мы намереваемся доказать, что если поле K достаточно велико (например, бесконечно), а два длинных корневых тора X и Y не коммутируют, то в порожденной ими подгруппе $\langle X,Y\rangle$ содержится однопараметрическая подгруппа, состоящая из небольших унипотентных элементов. Однако, так как группа $\mathrm{SO}(10,K)$ довольно большая, нам не удалось пока завершить необходимые для этого вычисления.

4. Маленькие унипотентные элементы

Как мы уже говорили, наши основные результаты формулируются в виде таблиц, в которых мы явным образом перечисляем орбиты группы Шевалле, действующей одновременным сопряжением на парах микровесовых торов и (для достаточно больших полей) отождествляем соответствующие порождения. Мы не будем воспроизводить эти результаты ввиду их чрезмерной техничности и громоздкости, а ограничимся следующим их качественным следствием, которое само по себе достаточно для многих важных приложений.

Теорема 3. *Пусть поле K содержит по крайней мере 7 элементов. Тогда если X, Y — два некоммутирующих микровесовых тора в группе Шевалле $G(\Phi,K)$, то в каждом из следующих случаев*

- (A_l,ϖ_2), (D_l,ϖ_1), (E_6,ϖ_1), $m=2$,
- (E_7,ϖ_7), $m=3$,

порожденная ими подгруппа $\langle X,Y\rangle$ содержит, с точностью до сопряженности, однопараметрическую подгруппу унипотентных элементов вида

$$\{x_{\alpha_1}(\xi\zeta_1)\dots x_{\alpha_m}(\xi\zeta_m)\mid \xi\in K\},$$

для попарно ортогональных корней $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in\Phi$ и каких-то $\zeta_1,\dots,\zeta_m\in K$, не все из которых равны 0.

Перечисленные здесь четыре случая как раз и рассмотрены в наших работах [18–21], по одному в каждой. Мы уверены, что могли бы имеющимися у нас методами доказать аналогичный результат и для остальных микровесовых торов, со следующей оценкой на m:

- $\min(m,l+1-m)$ для (A_l,ϖ_m),
- l для (C_l,ϖ_l),
- $l/2$ для $(\mathrm{D}_l,\varpi_{l-1})$ и (D_l,ϖ_l).

Если мы не сделали этого до сих пор, то потому, что применимость результатов, дающих унипотентные элементы столь большого вычета, весьма ограничена. Нам кажется, что во всех этих случаях проще сразу использовать длинные корневые элементы, для которых, как мы уверены, аналогичный результат должен иметь место с $m=4$.

Стоит упомянуть, что подгруппы, содержащие маленькие унипотентные элементы, очень хорошо изучены.

Прежде всего, имеется огромное количество результатов, относящихся к геометрии длинных корневых подгрупп [30–33, 68–71, 87, 91, 93].

Франц Тиммесфельд развил *чрезвычайно* глубокую геометрическую теорию абстрактных корневых подгрупп [111–117]. Эта теория в значительной степени сводит явную классификацию таких подгрупп к теории представлений алгебраических групп. В работах самого Тиммесфельда, Ани Штайнбах, Ханса Кейперса и других эта теория доведена во многих случаях до явных ответов [73–77, 105–109].

Среди прочего, теория Тиммесфельда служит очень широким обобщением теории Томпсона квадратичных пар [60, 97, 110].

В некоторых важных случаях описание подгрупп, содержащих маленькие унипотентные элементы следует также из работ Е. Башкирова [1–5, 57–59] и Ли Шанчжы [90], посвященных описанию подгрупп классических групп над телами. Среди прочего, в этих работах Башкирову удалось получить *полные* ответы для случая квадратичных унипотентных элементов вычета 2, теснейшим образом связанного с арифметикой тел кватернионов.

5. Where next?

Морально наши результаты являются чрезвычайно широкими обобщениями результатов о надгруппах расщепимых максимальных торов. Однако, чтобы показать, что они фактически являются более общими, нужно, конечно, еще решить следующую задачу.

Проблема 1. *Проверить, что в случае надгрупп максимальных торов унипотентные подгруппы, существование которых гарантируется нашими результатами, удовлетворяют аксиомам абстрактных корневых подгрупп Тиммесфельда.*

После этого можно непосредственно сослаться на списки подгрупп, порожденных подгруппами, состоящими из маленьких унипотентных элементов, полученные самим Тиммесфельдом и его последователями, Штайнбах, Кейперсом и другими. Впрочем, может оказаться, что это совсем непростое дело. Не исключено, что легче вовсе не ссылаться на глубокую теорию Тиммесфельда, а провести все рассуждения в нужных случаях непосредственно, используя редукцию к малоранговым группам.

Проблема 2. *Записать доказательства результатов о надгруппах расщепимых максимальных торов в присоединенных группах Шевалле типов* E_6 *и* E_7*, основанные на результатах настоящей работы.*

Мы уверены, что описанные в наших работах методы позволяют получить полное решение следующей задачи.

Проблема 3. *Получить аналогичные результаты о классификации орбит и порождений пар* (X, Y) *для всех остальных типов микровесовых торов.*

Для многих приложений было бы уместно иметь точный результат, покрывающий совсем маленькие поля.

Проблема 4. *Описать порождения пары торов в исключительных случаях маленьких полей.*

Нормализаторы длинной корневой подгруппы являются параболическими подгруппами. С другой стороны, нормализаторами микровесовых торов являются некоторые редуктивные подгруппы.

Проблема 5. *Переформулировать результаты о порождении микровесовыми торами на языке их нормализаторов.*

В действительности, любая серьезная попытка развить геометрию торов, полностью параллельную геометрии корневых подгрупп, упирается в решение следующей гораздо более трудной задачи, по крайней мере для троек с какими-то дополнительными ограничениями.

Проблема 6. *Описать орбиты группы Шевалле* $G(\Phi, K)$*, действующей сопряжениями на тройках микровесовых торов* (X, Y, Z) *и соответствующие порождения.*

Заменить здесь три тора на четыре, пять, ... в полном объеме вряд ли удастся. В частности, тот факт, что группа E_8 порождается пятью корневыми подгруппами, был серьезным препятствием при доказательстве принципа Хассе для типа E_8 в работах В. Черноусова и А. Премета. Для корневых подгрупп этот вопрос был систематически исследован в [67]. Можно, однако, ставить следующий частичный вопрос.

Проблема 7. *Вычислить количество микровесовых торов данного типа, необходимых для порождения группы Шевалле $G(\Phi, K)$.*

Еще одно направление, в котором наши результаты могут сыграть ключевую роль, это задачи порождения в духе теоремы Маклафлина [98] и теоремы Коксетера — Шевалле — Шепарда — Тодда [64, 72, 104]. Сформулируем три типичных задачи такого типа, в порядке возрастающей сложности.

Проблема 8. *Классифицировать все неприводимые подгруппы, порожденные микровесовыми торами данного типа.*

Проблема 9. *Классифицировать все неприводимые алгебраические подгруппы, содержащие микровесовые элементы данного типа.*

Проблема 10. *Классифицировать все неприводимые конечные подгруппы, порожденные микровесовыми элементами данного типа.*

Насколько нам известно, эти задачи полностью решены лишь в некоторых очень специальных случаях (см. систематический обзор результатов в этом направлении в [30–32, 42, 88]).

Для псевдоотражений, в работах Вагнера, Залесского и Сережкина [34, 35, 122, 123].

Для некоторых классов двумерных элементов, в работах Хаффмана — Уэйлса и Корлюкова [43–45, 82–85, 124].

Заметим, что для случая $\mathrm{GL}(n, K)$ Койбаев существенно использовал результаты Вагнера, Залесского и Сережкина при описании надгрупп торов в исключительных случаях [5, 36–38]. Таким образом, можно думать, что и решение этих задач окажется полезным при описании подгрупп в других группах Шевалле.

Конечно, еще труднее будет эффективизировать результаты о порождении, наподобие того, как это сделано для порождения трансвекциями в [62].

Проблема 11. *Построить алгоритм, который по данным микровесовым торам/элементам распознает порожденную ими подгруппу.*

Упомянем теперь несколько еще более амбициозных задач. У групп Шевалле типов E_8, F_4 и G_2 вообще нет микровесов. Таким образом, в этих случаях рассмотрение корневых полупростых элементов $h_\alpha(\varepsilon)$ становится жесткой необходимостью. Но даже и для односвязных групп других типов использование микровесовых элементов дает явно завышенные оценки на порядок основного поля. Таким образом, по большому счету, результаты настоящей работы являются разминкой для решения следующей задачи.

Проблема 12. *Описать орбиты группы Шевалле $G(\Phi, K)$, действующей сопряжениями на парах длинных корневых торов*

$$X, Y \sim \{h_\alpha(\varepsilon) \mid \varepsilon \in K^*\}, \qquad \alpha \in \Phi_l,$$

и соответствующие порождения.

Естественно, для длинных корневых торов имеет смысл ставить также и все остальные задачи, которые мы только что сформулировали для микровесовых торов, в частности аналоги проблемы 6 и проблем 8–10. Однако, — кроме, быть может, проблемы 9, которая в основном решена в работе Либека — Зейтца [92] — все эти задачи представляются исключительно сложными, по крайней мере при нашем сегодняшнем уровне техники.

В следующей задаче мы предлагаем дать еще одно обобщение этого результата — только для классических групп, но зато некоммутативное и с нетривиальной инволюцией! По поводу баковских унитарных групп, о которых здесь идет речь [26–29, 51, 56, 79, 81, 95] и содержащиеся там ссылки.

Проблема 13. *Описать орбиты группы* $\mathrm{SU}(n, T, \Lambda)$, *действующей сопряжениями на парах подгрупп вида*

$$X, Y \sim \{\mathrm{diag}\,(\varepsilon, 1 \ldots, 1, \overline{\varepsilon}^{-1}) \big| \, \varepsilon \in K^*\},$$

и соответствующие порождения. Дать на основе этого новые доказательства результатов о надгруппах диагональной группы.

Следующая задача может оказаться чрезвычайно трудной. Во всяком случае, уже при решении гораздо более простой задачи о порождении кватернионными псевдоотражениями в качестве одного из примеров возникает группа Холла — Янко [65, 128].

Проблема 14. *Классифицировать конечные неприводимые подгруппы, унитарной группы, порожденные элементами вида* $\{\mathrm{diag}\,(\varepsilon, 1 \ldots, 1, \overline{\varepsilon}^{-1})\}$.

Видимо, на данном этапе было бы совершенно нереалистично ставить задачу построения геометрии нерасщепимых торов над произвольным полем. На самом деле, как видно из работ В. Койбаева [39–41] и В. Платонова [96] даже описание надгрупп нерасщепимых максимальных торов в случае бесконечных полей представляет собой задачу, сложность которой не поддается анализу. Тем не менее, в свете работ Г. Зейтца [102, 103] представляется, что для конечного поля подобная задача все еще чрезвычайно трудна, но все же вполне реальна.

Проблема 15. *Описать орбиты конечной группы Шевалле* $G(\Phi, q)$, *действующей сопряжениями на парах нерасщепимых торов данного типа и соответствующие порождения.*

Вообще, про геометрию анизотропных торов известно совсем мало. Между тем, в анизотропных группах их изучение становится жесткой необходимостью. Здесь можно упомянуть чрезвычайно интересные, но к сожалению, не получившие развития работы Б. Вейсфейлера и Д. Джеймса [86, 125–127].

В качестве еще одной дальнейшей задачи можно попытаться вычислить тонкое разложение Брюа микровесовых и длинных корневых полупростых элементов [17]. Вероятно, его можно с успехом применить для упрощения некоторых наших доказательств, как это уже было сделано для задачи о надгруппах максимальных торов в работе М. Митрофанова и первого автора [94].

Идея работ [15, 18–21] возникла в начале 1990-х гг. во время наших бесед с Г. Зейтцем и А. Залесским, которые (независимо) заметили, что изучение орбит группы Шевалле, действующей сопряжениями на парах (длинных) корневых торов может привести к гораздо более простым доказательствам результатов о надгруппах расщепимых максимальных торов, чем те, которые описаны в [12, 101]. Авторы благодарят Е. Башкирова, Л. Ди Мартино, Е. Дыбкову, У. Кантора, В. Койбаева, А. Кондратьева, А. Коэна, Б. Куперстейна, Ли Шанчжы, А. Семенова, И. Супруненко, Ф. Тиммесфельда и А. Штайнбах за чрезвычайно полезные обсуждения всего этого круга идей и критику первых вариантов наших доказательств. Кроме того, мы признательны В. Петрову и А. Ставровой, которые внимательно прочли рукопись и исправили несколько неточностей.

Литература

1. *Башкиров Е. Л.* О линейных группах, порожденных двумя длинными корневыми подгруппами // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 2.—С. 15–23.

2. *Башкиров Е. Л.* О подгруппах полной линейной группы степени 4 над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу индекса 1 // Алгебра и анализ.—2001.—Т. 13, № 3.—С. 18–42.
3. *Башкиров Е. Л.* Группа Spin_8 и некоторые подгруппы унитарных групп степени 4 над телом кватернионов // Алгебра и анализ.—2001.—Т. 13, № 3.—С. 43–64.
4. *Башкиров Е. Л.* Линейные группы над телами, содержащие подгруппы квадратичных унипотентных элементов // Дисс. … докт. физ.-мат. наук.—Минск: Белорусский гос. ун-т информатики и Радиоэлектроники, 2006.—С. 1–270.
5. *Боревич З. И., Койбаев В. А.* Подгруппы полной линейной группы над полем из пяти элементов // Алгебра и теория чисел.—Владикавказ, 1978.—№ 3.—С. 9–32.
6. *Борель А.* Свойства и линейные представления групп Шевалле // Семинар по алгебраическим группам.—М.: Мир, 1973.—С. 9–59.
7. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли.—М.: Мир, 1972.—334 с.
8. *Вавилов Н. А.* Весовые элементы групп Шевалле // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 298, № 3.—С. 524–527.
9. *Вавилов Н. А.* Теоремы сопряженности для подгрупп расширенных групп Шевалле, содержащих расщепимый максимальный тор // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 299, № 2.—С. 269–272.
10. *Вавилов Н. А.* Разложение Брюа длинных корневых элементов в группах Шевалле // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей.—Ленинград, 1988.—№ 2.—С. 18–39.
11. *Вавилов Н. А.* Разложение Брюа двумерных преобразований // Вестник ЛГУ. Сер. I.—1989.—№ 3.—С. 5–10.
12. *Вавилов Н. А.* Полупростые корневые элементы и тройки унипотентных корневых подгрупп в группах Шевалле // Вопросы алгебры.—Минск, 1989.—Т. 4.—С. 162–173.
13. *Вавилов Н. А.* Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор // Тр. Ленингр. мат. об-ва.—1990.—Т. 1.—С. 64–109.
14. *Вавилов Н. А.* Унипотентные элементы в подгруппах расширенных групп Шевалле, содержащих расщепимый максимальный тор // Докл. РАН.—1993.—Т. 328, № 5.—С. 536–539.
15. *Вавилов Н. А.* Геометрия 1-торов в GL_n // Алгебра и анализ.—2007.—Т. 19, № 3.—С. 120–151.
16. *Вавилов Н. А.* Весовые элементы групп Шевалле // Алгебра и анализ.—2008.—Т. 20, № 1.—С. 34–85.
17. *Вавилов Н. А., Митрофанов М. Ю.* Пересечения двух клеток Брюа // Докл. РАН.—2001.—Т. 377, № 1.—С. 7–10.
18. *Вавилов Н. А., Нестеров В. В.* Геометрия 2-торов в GL_n // Алгебра и анализ.—2008.—Т. 20.—В печати.
19. *Вавилов Н. А., Нестеров В. В.* Геометрия ϖ_1-торов в SO_{2l} // Алгебра и анализ.—2008.—Т. 20.—В печати.
20. *Вавилов Н. А., Нестеров В. В.* Пары микровесовых торов в группе Шевалле типа E_6.—2008.—В печати.
21. *Вавилов Н. А., Нестеров В. В.* Пары микровесовых торов в группе Шевалле типа E_7.—В печати.
22. *Вавилов Н. А., Нестеров В. В., Семенов А. А.* Длинные корневые торы в группах Шевалле.—2008.—В печати.
23. *Вавилов Н. А., Певзнер И. М.* Тройки длинных корневых подгрупп // Зап. научн. сем. ПОМИ.—2007.—Т. 343.—С. 54–83.
24. *Вавилов Н. А., Семенов А. А.* Разложение Брюа длинных корневых торов в группах Шевалле // Зап. науч. семин. ЛОМИ.—1989.—Т. 175.—С. 12–23.
25. *Вавилов Н. А., Семенов А. А.* Длинные корневые полупростые элементы в группах Шевалле // Докл. РАН.—1994.—Т. 338.—С. 725–727.
26. *Дыбкова Е. В.* О наддиагональных подгруппах гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом // Зап. научн. семин. ПОМИ.—2002.—Т. 289.—С. 154–206.
27. *Дыбкова Е. В.* Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над некоммутативным телом // Зап. научн. семин. ПОМИ.—2003.—Т. 305.—С. 121–135.
28. *Дыбкова Е. В.* Теорема Боревича для гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом // Зап. научн. семин. ПОМИ.—2005.—Т. 321.—С. 136–167.
29. *Дыбкова Е. В.* Подгруппы гиперболических унитарных групп // Дисс. … докт. физ.-мат. наук.—СПб: СПбГУ, 2006.—С. 1–182.
30. *Залесский А. Е.* Линейные группы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 6.—С. 56–107.
31. *Залесский А. Е.* Линейные группы // В кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия.—М., 1983.—Вып. 21.—С. 135–182.

32. *Залесский А. Е.* Линейные группы // В кн.: Итоги науки. Фундаментальные Направления. Алгебра 4.—М., 1989.—Вып. 37.—С. 114–234.
33. *Залесский А. Е., Сережкин В. Н.* Линейные группы, порожденные трансвекциями // Изв. АН СССР.—1977.—Т. 10.—С. 25–46.
34. *Залесский А. Е., Сережкин В. Н.* Линейные группы, порожденные псевдоотражениями // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. наук.—1977.—Т. 5.—С. 9–16.
35. *Залесский А. Е., Сережкин В. Н.* Конечные линейные группы, порожденные отражениями // Изв. АН СССР.—1981.—Т. 17.—С. 477–503.
36. *Койбаев В. А.* Подгруппы полной линейной группы над полем из четырех элементов // В кн.: Алгебра и Теория Чисел.—Нальчик, 1979.—Вып. 4.—С. 21–31.
37. *Койбаев В. А.* Описание D-полных подгрупп в полной линейной группе над полем из трех элементов // Зап. науч. семин. ЛОМИ.—1980.—Т. 103.—С. 76–78.
38. *Койбаев В. А.* Подгруппы полной линейной группы над полем из трех элементов // В кн: Структурные свойства алгебраических систем.—Нальчик, 1981.—С. 56–68.
39. *Койбаев В. А.* Подгруппы $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 41, № 3.—С. 414–416.
40. *Койбаев В. А.* Подгруппы $\mathrm{GL}(2,K)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Зап. научн. семин. ПОМИ.—1994.—Т. 211.—С. 136–145.
41. *Койбаев В. А.* Подгруппы линейных групп, содержащие максимальный тор // Дисс. … докт. физ.-мат. наук.—СПб.: СПбГУ, 1994.—205 с.
42. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук.—1986.—Т. 41, № 1.—С. 57–96.
43. *Корлюков В. А.* Линейные группы, порожденные двумерными элементами порядка $r \geqslant 5$ // Вестник МГУ.—1983.—Т. 38, № 5.—С. 21–25.
44. *Корлюков В. А.* Конечные линейные группы над полем характеристики 0, порожденные двумерными элементами порядков 3 и 4 // Арифметические и подгрупповые конструкции конечных групп.—1986.—С. 75–86.
45. *Корлюков В. А.* Конечные линейные группы порожденные квадратичными элементами порядка 4 // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.—1986.—Вып. 4.—С. 38–40.
46. *Нестеров В. В.* Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле // Дисс. … канд. физ.-мат. наук.—СПб.: СПбГУ, 1995.—72 с.
47. *Нестеров В. В.* Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле // Докл. РАН.—1997.—Т. 357.—С. 302–305.
48. *Нестеров В. В.* Расположение длинной и короткой корневых подгрупп в группе Шевалле типа G_2 // Зап. науч. семин. ПОМИ.—2000.—Т. 272.—С. 273–285.
49. *Нестеров В. В.* Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле типа G_2 // Зап. науч. семин. ПОМИ.—2001.—Т. 281.—С. 253–273.
50. *Нестеров В. В.* Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле // Алгебра и Анализ.—2004.—Т. 16, № 6.—С. 172–208.
51. *Петров В. А.* Нечетные унитарные группы // Зап. научн. семин. ПОМИ.—2003.—Т. 305.—С. 195–225.
52. *Семенов А. А.* Разложение Брюа корневых полупростых подгрупп в специальной линейной группе // Зап. науч. семин. ЛОМИ.—1987.—Т. 160.—С. 239–246.
53. *Семенов А. А.* Разложение Брюа длинных корневых торов в группах Шевалле // Дисс. … канд. физ.-мат. наук.—СПб.: СПбГУ, 1991.—С. 1–143.
54. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле.—М., 1975.—262 с.
55. *Шевалле К.* О некоторых простых группах // Математика. Период сб. перев. ин. статей.—1958.—Т. 2, № 1.—С. 3–58.
56. *Bak A., Vavilov N.* Structure of hyperbolic unitary groups I. Elementary subgroups // Algebra Colloq.—2000.—V. 7, № 2.—P. 159–196.
57. *Bashkirov E. L.* Some completely reducible linear groups over a division ring, containing a root subgroup // Comm. Algebra.—2003.—V. 31, № 12.—P. 5727–5754.
58. *Bashkirov E. L.* Irreducible linear groups of degree 3 over a quaternion division ring, containing a root subgroup // Comm. Algebra.—2004.—V. 32, № 5.—P. 1747–1763.
59. *Bashkirov E. L.* Irreducible linear groups of degree 4 over a quaternion division algebra that contain a subgroup $\mathrm{diag}(T_3(K,\Phi_0),1)$ // J. Algebra.—2005.—V. 287, № 2.—P. 319–350.
60. *Baumann B., Ho C. Y.* Linear groups generated by a pair of quadratic action subgroups // Arch. Math.—1985.—V. 44.—P. 15–19.

61. *Berman S., Moody R. V.* Extensions of Chevalley groups // Israel J. Math.—1975.—V. 22, № 1.—P. 42–51.
62. *Brown R., Humphries S. P.* Orbits under symplectic transvections. I, II // Proc. London Math. Soc.—1986.—V. 52.—P. 517–531.
63. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type.—London et al.: Wiley, 1972.—331 p.
64. *Cohen A. M.* Finite complex reflection groups // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.—1976.—V. 9.—P. 379–436.
65. *Cohen A. M.* Finite quaternionic reflection groups // J. Algebra.—1980.—V. 64.—P. 293–324.
66. *Cohen A. M., Cuypers H., Sterk H.* Linear groups generated by reflection tori // Canad. J. Math.—1999.—V. 51, № 6.—P. 1149–1174
67. *Cohen A. M., Steinbach A., Ushirobira R., Wales D.* Lie algebras generated by extremal elements // J. Algebra.—2001.—V. 236, № 1.—P. 122–154.
68. *Cooperstein B. N.* Subgroups of the group $\mathrm{E}_6(q)$ which are generated by root subgroups // J. Algebra.—1977.—V. 46.—P. 355–388.
69. *Cooperstein B. N.* The geometry of root subgroups in exceptional groups. I, II // Geom. dedic.—1979.—V. 8.—P. 317–381; 1983.—V. 15.—P. 1–45.
70. *Cooperstein B. N.* Geometry of long root subgroups in groups of Lie type // Proc. Symp. Pure Math.—1980.—V. 37.—P. 243–248.
71. *Cooperstein B. N.* Subgroups of exceptional groups of Lie type generated by long root elements. I, II // J. Algebra.—1981.—V. 70, № 1.—P. 270–282; 283–298.
72. *Coxeter H. S. M.* Finite groups generated by unitary reflections // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.—1967.—V. 31.—P. 125–135.
73. *Cuypers H.* A characterisation of $\mathrm{SL}_2(k)$ by its quadratic action on the natural module // Arch. Math.—1993.—V. 61, № 5.—P. 401–408.
74. *Cuypers H.* The geometry of k-transvection groups // Preprint Eindhoven Univ. Technology.—1994.—P. 1–24.
75. *Cuypers H.* Symplectic geometries, transvection subgroups and modules // J. Comb. Theory. Ser. A.—1994.—V. 65.—P. 39–59.
76. *Cuypers H., Steinbach A.* Linear transvection groups and embedded polar spaces // Invent. Math.—1999.—V. 137, № 1.—P. 169–198.
77. *Cuypers H., Steinbach A.* Special linear groups generated by transvections and embedded projective spaces // J. London Math. Soc.—2001.—V. 64, № 3.—P. 576–594.
78. *Di Martino L., Vavilov N. A.* $(2,3)$-generation of $\mathrm{SL}(n,q)$. I, II. Cases $n=5,6,7$ // Comm. Algebra.—1994.—V. 22, № 4.—P. 1321–1347; 1996.—V. 24, № 2.—P. 487–515.
79. *Hahn A. J., O'Meara O. T.* The classical groups and K-theory.—Berlin et al.: Springer, 1989.—576 p.
80. *Harebov A. L., Vavilov N. A.* On the lattice of subgroups of Chevalley groups containing a split maximal torus // Comm. Algebra.—1996.—V. 24, № 1.—P. 109–133.
81. *Hazrat R., Vavilov N.* Bak's work on lower K-theory of rings.—Belfast: Queen's University, 2008.—47 p.—(Preprint Queen's Univ.).
82. *Huffman W. C.* Linear groups containing an element with an eigenspace of codimension two // J. Algebra.—1975.—V. 34.—P. 260–287.
83. *Huffman W. C., Wales D. B.* Linear groups of degree n containing an element with exactly $n-2$ equal eigenvalues // Linear and multilinear Algebra.—1975.—V. 3.—P. 53–59.
84. *Huffman W. C., Wales D. B.* Linear groups containing an element with an eigenspace of codimension two // In book: Proc. Conf. Finite groups, Utah.—New York: Acad. press, 1976.—P. 425–429.
85. *Huffman W. C., Wales D. B.* Linear groups containing an involution with two eigenvalues -1 // J. Algebra.—1977.—V. 45.—P. 465–515.
86. *James D. G., Weisfeiler B.* On the geometry of unitary groups // J. Algebra.—1980.—V. 63.—P. 514–540.
87. *Kantor W. M.* Subgroups of classical groups generated by long root elements // Trans. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 248, № 2.—P. 347–379.
88. *Kantor W. M.* Generation of linear groups // In book: The geometric Vein: Coxeter Festschrift.—Berlin et al.: Springer, 1981.—P. 497–509.
89. *Kleidman P., Liebeck M. W.* The subgroup structure of the finite classical groups.—Cambridge: Cambridge univ. press, 1990.—303 p.
90. *Li Shang Zhi* Maximal subgroups of $\mathrm{P}\,\Omega(n,F,Q)$ with root subgroups // Scientia Sinica. Ser. A.—1985.—V. 28.—P. 826–838.
91. *Liebeck M. W., Seitz G. M.* Subgroups generated by root elements in groups of Lie type // Ann. Math.—1994.—V. 139.—P. 293–361.
92. *Liebeck M. W., Seitz G. M.* Subgroups of simple algebraic groups containing elements of fundamental subgroups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.—1999.—V. 126, № 3.—P. 461–480.

93. *McLaughlin J.* Some groups generated by transvections // Arch. Math.—1967.—V. 18.—P. 364–368.
94. *Mitrofanov M. Yu., Vavilov N. A.* Overgroups of the diagonal subgroup via small Bruhat cells // Algebra Coll.—To appear.
95. *Petrov V. A.* Overgroups of unitary groups // K-theory.—2003.—V. 29.—P. 77–108.
96. *Platonov V. P.* Subgroups of algebraic group over a local or global field containing a maximal torus // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér Math.—1994.—V. 318, № 10.—P. 899–903.
97. *Premet A. A., Suprunenko I. D.* Quadratic modules for Chevalley groups over fields of odd characteristic // Math. Nachr.—1983.—V. 110.—P. 65–96.
98. *Richardson R., Röhrle G. E., Steinberg R.* Parabolic subgroups with abelian unipotent radical // Invent. Math.—1992.—V. 110, № 3.—P. 649–671.
99. *Röhrle G. E.* On the structure of parabolic subgroups in algebraic groups // J. Algebra.—1993.—V. 157, № 1.—P. 80–115.
100. *Röhrle G. E.* On extraspecial parabolic subgroups // Contemp. Math.—1993.—V. 153.—P. 143–155.
101. *Seitz G. M.* Subgroups of finite groups of Lie type // J. Algebra.—1979.—V. 61, № 1.—P. 16–27.
102. *Seitz G. M.* On the subgroup structure of classical groups // Commun. Algebra.—1982.—V. 10, № 8.—P. 875–885.
103. *Seitz G. M.* Root subgroups for maximal tori in finite groups of Lie type // Pacif. J. Math.—1983.—V. 106, № 1.—P. 153–244.
104. *Shephard G. C., Todd J. A.* Finite unitary reflection groups // Canad. J. Math.—1954.—V. 6.—P. 274–304.
105. *Steinbach A. I.* Untergruppen von klassischen Gruppen, die von Transvektionen oder Siegel-Transvektionen erzeugt werden.—Gießen: Ph.-D. Thesis, 1995.—187 p.
106. *Steinbach A. I.* Subgroups of classical groups generated by transvections or Siegel transvections. I, II // Geom. dedic.—1997.—V. 68.—P. 281–322.
107. *Steinbach A. I.* Subgroups isomorphic to $\mathrm{G}_2(L)$ in orthogonal groups // J. Algebra.—1998.—V. 205, № 1.—P. 77–90.
108. *Steinbach A. I.* Groups of Lie type generated by long root elements in $\mathrm{F}_4(K)$.—Gießen: Habilitationsschrift, 2000.—126 p.
109. *Steinbach A. I.* Subgroups of the Chevalley groups of type $\mathrm{F}_4(K)$ arising from a polar space // Adv. Geom.—2003.—V. 3.—P. 73–100.
110. *Thompson J.* Quadratic pairs / In book: Actes Congrés intern. Math. (Nice.—1970).—V. 1.—P. 375–376.
111. *Timmesfeld F. G.* Groups generated by k-transvections // Invent. Math.—1990.—V. 100.—P. 167–206.
112. *Timmesfeld F. G.* Groups generated by k-root subgroups // Invent. Math.—1991.—V. 106.—P. 575–666.
113. *Timmesfeld F. G.* Groups generated by k-root subgroups — a survey // In book: Groups, Combinatorics and Geometry.—Cambridge: Cambridge univ. press, 1992.—P. 183–204.—(Durham, 1990).
114. *Timmesfeld F. G.* Moufang planes and the groups E_6^K and $\mathrm{SL}_2(K)$, K a Cayley division algebra // Forum Math.—1994.—V. 6, № 2.—P. 209–231.
115. *Timmesfeld F. G.* Subgroups generated by root elements of groups generated by k-root subgroups // Geom. dedic.—1994.—V. 49.—P. 293–321.
116. *Timmesfeld F. G.* Abstract root subgroups and quadratic actions. With an appendix by A. E. Zalesskii // Adv. Math.—1999.—V. 142, № 1.—P. 1–150.
117. *Timmesfeld F. G.* Abstract root subgroups and groups of Lie type.—Basel: Birkhäuser Verlag, 2001.—P. 1–389.
118. *Vavilov N. A.* Weight elements of Chevalley groups // Preprint Univ. Warwick.—1994.—I. 35.—P. 1–46.
119. *Vavilov N. A.* Intermediate subgroups in Chevalley groups // In book: Proc Conf. Groups of Lie Type and their Geometries.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.—P. 233–280.—(Como, 1993).
120. *Vavilov N. A.* Unipotent elements in subgroups which contain a split maximal torus // J. Algebra.—1995.—V. 176.—P. 356–367.
121. *Vavilov N. A.* Geometry of 1-tori in GL_n // Preprint Univ. Bielefeld.—1995.—V. 8.—P. 1–21.
122. *Wagner A.* Collineation groups generated by homologies of order greater than 2 // Geom. dedic.—1978.—V. 7.—P. 387–398.
123. *Wagner A.* Determination of the finite primitive reflection groups over an arbitrary field of characteristic not 2. I–III // Geom. dedic.—1980.—V. 9.—P. 239–253; 1981.—V. 10.—P. 191–203; 475–523.
124. *Wales D. B.* Linear groups of degree n containing an involution with two eigenvalues -1. II // J. Algebra.—1978.—V. 53.—P. 58–67.
125. *Weisfeiler B.* Abstract monomorphisms between big subgroups of some groups of type B_2 in characteristic 2 // J. Algebra.—1979.—V. 60.—P. 209–222.
126. *Weisfeiler B.* Monomorphisms between subgroups of groups of type G_2 // J. Algebra.—1981.—V. 68.—P. 306–334.

127. *Weisfeiler B.* Abstract isomorphisms of simple algebraic groups split by quadratic extension // J. Algebra.—1981.—V. 68.—P. 335–368.
128. *Wilson R. A.* The geometry of the Hall — Janko group as a quaternionic reflection group // Geom. dedic.—1986.—V. 20.—P. 157–173.

Статья поступила 27 декабря 2008 г.

Вавилов Николай Александрович
Санкт-Петербургский госуниверситет
Санкт-Петербург, 199155, РОССИЯ
E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru

Нестеров Владимир Викторович
Балтийский государственный
технический университет «Военмех»
Санкт-Петербург, 190005, РОССИЯ
E-mail: vl.nesterov@mail.ru