Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 1, С. 79–83

УДК **512.542.5**

НОРМАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ УНИПОТЕНТНОЙ ПОДГРУППЫ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ[1]

Г. С. Сулейманова

Устанавливается нормальное строение унипотентной подгруппы симплектической группы над полем характеристики 2.

Ключевые слова: группа Шевалле, унипотентная подгруппа, нормальное строение.

Нормальное строение унипотентной подгруппы классической линейной группы над полем K ранее устанавливалось за некоторыми исключениями в случае $2K = 0$. В статье рассматривается исключительный случай симплектических групп над полем характеристики 2.

1. В группе Шевалле над полем K, ассоциированной с системой корней Φ, унипотентную подгруппу $U\Phi(K)$ порождают корневые подгруппы $x_r(K) = X_r$, $r \in \Phi^+$. Симплектическим группам соответствует тип $\Phi = C_n$.

Пусть $\{r\}^+$ при $r \in \Phi$ есть совокупность $s \in \Phi^+$ с неотрицательными коэффициентами в линейном выражении $s - r$ через базу $\Pi(\Phi)$. Положим

$$T(r) = \langle X_s \mid s \in \{r\}^+ \rangle, \quad Q(L) = \langle X_s \mid s \in \cup_{r \in L}\{r\}^+ \setminus L \rangle, \quad L \subset \Phi^+.$$

Назовем $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ *множеством* $\mathscr{L}(H)$ *углов в* $H \subseteq T(r_1)T(r_2)\ldots T(r_m)$, если при любой замене $T(r_i)$ на $Q(r_i)$ включение нарушается. *Фреймом* для H назовем множество $\mathscr{F}(H) \subseteq \prod_{s \in \mathscr{L}(H)} X_s$ такое, что $\mathscr{F}(H) = H \mod \prod_{s \in \mathscr{L}(H)} Q(s)$. Если s-проекция каждого элемента из H равна произведению r-проекции на фиксированный скаляр, не равный нулю, то r, s называем *связанными в* H*;* их называем p*-связанными* при $p \in G^+$, если также $r + p$, $s + p \in G$.

Ранее [2] на языке углов и фреймов было установлено нормальное строение унипотентных подгрупп групп Шевалле классических типов над полем. Как следует из [3], основная теорема из [2] переносится на исключительные группы $UC_n(K)$, $2K = 0$, $|K| > 2$ с помощью модификации понятий углов и фреймов — 2-углов и 2-фреймов (определения см. ниже). Этот же подход мы применяем для исследования нормального строения группы $UC_n(2)$.

Подмножество S в Φ^+ назовем 2-нормальным, если включения $s \in S$, $t, s+t, is + jt \in \Phi^+$ с нечетной константой $C_{ij,st}$ $(i, j > 0)$ из коммутаторной формулы Шевалле всегда дают включение $is + jt \in S$. Через $\{r\}_2^+$ обозначим минимальное 2-нормальное подмножество в Φ^+, содержащее r. Наряду с $T(r)$ и $Q(L)$ полагаем

$$T\{r\} = \langle X_s \mid s \in \{r\}_2^+ \rangle, \quad Q\{L\} = \langle X_s \mid s \in \cup_{r \in L}\{r\}_2^+ \setminus L \rangle, \quad L \subset \Phi^+.$$

---

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00824а.

Назовем $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ *множеством 2-углов* с обозначением $\mathscr{L}_2(H)$ в $H \subseteq T\{r_1\}T\{r_2\}\ldots T\{r_m\}$, если при любой замене $T\{r_i\}$ на $Q\{r_i\}$ включение нарушается. Заменив в определении фрейма $\mathscr{F}(H)$ множеств $Q(s)$ на $Q\{s\}$ и $\mathscr{L}(H)$ на $\mathscr{L}_2(H)$, приходим к *2-фрейму* $\mathscr{F}_2(H)$.

Наша цель — исследовать исключительный для [2] случай симплектических групп над полем характеристики 2.

Нам потребуется представление группы $U\Phi(K)$ из [1]. Каждый элемент $A \in U\Phi(K)$ однозначно представляется произведением корневых элементов $x_r(t_r)$, $r \in \Phi^+$, расположенных соответственно фиксированному упорядочению корней [4, лемма 18; 5, 5.3.3]. Выберем подалгебру $N\Phi(K)$ с базисом e_r $(r \in \Phi^+)$ в алгебре Шевалле типа Φ над K с базисом e_r $(r \in \Phi), \ldots$ [5, § 4.4] и положим

$$\pi(A) = \sum_{r \in \Phi^+} t_r e_r, \quad \alpha \circ \beta = \pi\left(\pi^{-1}(\alpha)\pi^{-1}(\beta)\right) \quad (\alpha, \beta \in N\Phi(K)).$$

Присоединенное умножение $\circ$ есть групповая операция на $N\Phi(K)$, а отображение $\pi : U\Phi(K) \to (N\Phi(K), \circ)$ есть групповой изоморфизм. Вместо $\circ$ в произведении далее обычно пишем $+$, когда сомножители не зависят от выбора π.

Терминологию для $U\Phi(K)$ переносим также на $N\Phi(K)$.

Теорема 1 [3]**.** *Подгруппа H группы $NC_n(K)$ над полем K порядка, большего 2, и характеристики 2 нормальна тогда и только тогда, когда для любого ее 2-угла r и простого корня p с коротким корнем $r+p$ выполнено одно из следующих условий:*

(A_2) *$\mathscr{F}_2([H, X_p]) + Q\{r+p\} \subseteq H$, и при $|r| \neq |p|$ также $Q\{r+p+s\} \subseteq H$ для короткого корня $s \in \{r, p\}$;*

(B_2) *в $[H, X_p]$ два 2-угла q-связаны для простого корня q, в $[H, X_q]$ два 2-угла связаны, причем $\mathscr{F}_2([H, X_p]) + \mathscr{F}_2([H, X_q]) + Q\{r+p, r+p+q\} \subset H$.*

Обозначим через p_0 длинный простой корень. Рассмотрим следующие условия на s_1, s_2 в $H \trianglelefteq NC_n(K)$ и простой корень p.

$(*)$ существуют простые корни p_j $(1 \leqslant j \leqslant t)$, $p_1 = p$, короткие корни $r_j = s_1 + p_1 + \ldots + p_j$ и длинные корни $r'_j = s_2 + 2p_1 + \ldots + 2p_j$, r_j- и r'_j-проекции каждого элемента из H равны при $j < t-1$, r_{t-1}- и r'_{t-1}-проекции каждого элемента из H равны или в H существует p_t-связанный с r_{t-1} 2-угол, отличный от r'_{t-1}, причем

$$Q\{r_1, r_2, \ldots, r_t\} + Q\{r'_t\} + \mathscr{F}_2([H, X_p]) + \mathscr{F}_2([H, X_{p_t}]) + \sum_{j=2}^{t}(e_{r_j} + e_{r'_j}) \subseteq H;$$

$(**)$ в $[H, X_p]$ два коротких 2-угла q-связаны для простого корня q, в $[H, X_q]$ два 2-угла связаны, существуют простые корни p_j $(1 \leqslant j \leqslant t)$, $p_1 = p$, короткие корни $r_j = s_1 + p_1 + \ldots + p_j$ и длинные корни $r'_j = s_2 + 2p_1 + \ldots + 2p_j$, r_j- и r'_j-проекции каждого элемента из H равны при $j < t-1$, r_{t-1}- и r'_{t-1}-проекции каждого элемента из H равны или в H существует p_t-связанный с r_{t-1} 2-угол, отличный от r'_{t-1}, причем

$$Q\{r_1 + q, r_1, r_2, \ldots, r_t\} + Q\{r'_t\} + \mathscr{F}_2([H, X_{p_t}]) \\ + \mathscr{F}_2([H, X_p]) + \mathscr{F}_2([H, X_q]) + \sum_{j=2}^{t}(e_{r_j} + e_{r'_j}) \subseteq H.$$

Теорема 2. *Подгруппа H группы $NC_n(K)$ над полем K порядка 2 нормальна тогда и только тогда, когда для любого ее 2-угла r и простого корня p с коротким корнем $r+p$ выполнено одно из условий (A_2), (B_2) или следующих условий:*

(C_2) *r — длинный корень, и выполняется условие $(*)$ для $s_1 = s_2 = r$;*

(D_2) *r — длинный корень, существует 2-угол $r' \in \{p_0\}^+$ — короткий корень, p-связанный с корнем r, и выполняется условие $(*)$ или $(**)$ для $s_1 = r'$, $s_2 = r$;*

(E_2) *p — длинный корень, и выполняется условие $(*)$ для $s_1 = r$, $s_2 = 2r - p$;*

(F_2) *$r \in \{p_0\}^+$, существует 2-угол r' — длинный корень, p-связанный с корнем r, и выполняется условие $(*)$ или $(**)$ для $s_1 = r$, $s_2 = r'$;*

2. Известно, что если $H \subseteq N\Phi(K)$ и $[H, X_p] \neq 0$, то углы в $[H, X_p]$ имеют вид $p + s_i$, где $s_i \in \cup_{r \in \mathscr{L}(H)} \{r\}^+$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant k \leqslant 3$, причем равенство $k = 3$ достигается лишь при $\Phi = D_n$ или E_m. Для 2-углов в $[H, X_p]$ справедлива

Лемма 3. *Пусть $H \subseteq NC_n(K)$, $2K = 0$, $p \in C_n^+$ и $[H, X_p] \neq 0$. Тогда*

$$\mathscr{L}_2([H, X_p]) = \{p + s_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}, \quad s_i \in \cup_{r \in \mathscr{L}_2(H)} \{r\}_2^+, \quad 1 \leqslant k \leqslant 3.$$

Если $k = 3$, то в $[H, X_p]$ найдется длинный корень r, причем $\{r\}^+ \subseteq \{s\}^+$ для некоторого короткого корня $s \in \mathscr{L}_2([H, X_p])$. Когда H есть подгруппа аддитивной или присоединенной групп $NC_n(K)$, и $\mathscr{L}_2([H, X_p])$ не содержит длинных корней, то 2-фрейм в $[H, X_p]$ является K-подмодулем в $NC_n(K)$ и равен 2-фрейму лиева произведения H на X_p в подалгебре $NC_n(K)$.

$\lhd$ Очевидно, что каждое из множеств $\mathscr{L}(H)$, $\mathscr{L}_2(H)$ содержит не более, чем n элементов, причем

$$[H, X_p] \subseteq \left\langle T(s + p) \mid s \in \cup_{r \in \mathscr{L}(H)} \{r\}^+,\ s + p \in G^+ \right\rangle,$$

$$[H, X_p] \subseteq \left\langle T\{s + p\} \mid s \in \cup_{r \in \mathscr{L}_2(H)} \{r\}_2^+,\ s + p \in G^+ \right\rangle$$

и $\mathscr{L}_2([H, X_p]) = \{p + s_1, p + s_2, \ldots, p + s_k\}$, $\mathscr{L}([H, X_p]) = \{p + s'_1, p + s'_2, \ldots, p + s'_m\}$. Наименьшая в C_n подсистема корней, содержащая $\mathscr{L}([H, X_p])$ и все корни p, s'_i, имеет связный граф Кокстера, причем множества $\{p + s'_i\}^+$ попарно не инцидентны в C_n. Когда ее ранг $m + 1 > 3$, согласно известной классификации систем корней, подсистема имеет тип D_4, поэтому $m \leqslant 2$. Для коротких корней r, s множества $\{r\}_2^+$ и $\{s\}_2^+$ инцидентны тогда и только тогда, когда инцидентны $\{r\}^+$ и $\{s\}^+$. Множества $\{p + s_i\}_2^+$ для 2-углов $p + s_i$ в $\mathscr{L}_2([H, X_p])$ также попарно не инцидентны. Поэтому, если все корни в $\mathscr{L}_2([H, X_p])$ короткие, то $k \leqslant 2$. Если же $k = 3$ и $r \in \mathscr{L}_2([H, X_p])$ — длинный корень, то множество $\{r\}^+$ содержится в $\{s\}^+$ для некоторого короткого корня $s \in \mathscr{L}_2([H, X_p])$.

Согласно определению, фрейм $\mathscr{F}_2(H)$ дают элементы из H, если в их канонических разложениях отбросить все сомножители ae_s с $s \notin \mathscr{L}_2(H)$. Операции сложения и присоединенного умножения на H по модулю $\sum_{r \in \mathscr{L}_2(H)} Q\{r\}$ совпадают. Отсюда и из коммутаторной формулы Шевалле следует, что для подгруппы H аддитивной или присоединенной групп $NC_n(K)$ в условиях леммы фрейм в $[H, X_p]$ является K-модулем. $\rhd$

Из представления систем классического типа Φ^+-матрицами [1] сразу вытекает

Лемма 4. *Пусть в Φ^+ классического типа существуют простые корни p, q и не инцидентные корни r, s с условием $r + p$, $s + p$, $r + p + q$, $s + p + q \in \Phi^+$. Тогда $\Phi \neq A_n$ и при $r + q \in \Phi$ имеем $s + q \notin \Phi$ и $\Phi = C_n$. Если существует $b \in \Phi^+$ с условием $r + p + q + b$, $s + p + q + b \in \Phi^+$, то $\Phi = D_n$.*

Лемма 5. *Если $H \subseteq N\Phi(K)$, $r \in \mathscr{L}(H)$, $p, r + p \in \Phi^+$ и $(r + p)$-проекции в $[H, X_p]$ и X_{r+p} не равны, то $c_{rp} K = 0$ для структурной константы c_{rp} базиса Шевалле.*

$\lhd$ Ясно, что r-проекция H_r на угол r в H не зависит от упорядочения корней. Очевидно также, что $r + p$ есть угол в $[H, X_p]$ тогда и только тогда, когда взаимный коммутант $[H, X_p]$ имеет $(r + p)$-проекцию $F \neq 0$. Подмножество $\{r, p, r + p\}$ лежит в подсистеме корней типа A_2, B_2 или G_2, причем $F = c_{rp} K H_r = c_{rp} K$; при $F \neq K$ получаем равенство $c_{rp}\, K = 0$ и поэтому либо $|c_{rp}| = p(\Phi)$, либо $\Phi = G_2$ и $2K = 0$. $\rhd$

Следствие 6. *Если* $H \trianglelefteq U = U\Phi(K)$ *и* $s \in \cup_{r\in\mathscr{L}(\mathscr{H})} \{r\}^+$, *то* s *есть угол в* H *или* $[U, H]$, *либо* $p(\Phi)K = 0$ *и корень* s *длинный, либо* $\Phi = G_2$, $2K = 0$.

Рассмотрим следующее условие на угол r в $H \trianglelefteq NC_n(K)$, простой корень p и корень r':

$(***)$ существуют простые корни p_j $(1 \leqslant j \leqslant t)$, $p_1 = p$, короткие корни $r_j = r + p_1 + \ldots + p_j$ и длинные корни $r'_j = r' + 2p_1 + \ldots + 2p_j$, r_j- и r'_j-проекции каждого элемента из H равны при $j < t$, причем

$$Q\{r, r_1, r_2, \ldots, r_t\} + Q\{r'_t\} + \sum_{j=1}^{t}(e_{r_j} + e_{r'_j}) \subseteq H.$$

Лемма 7. *Пусть* $H \trianglelefteq UC_n(2)$, $\mathscr{L}_2(H) = \{r\}$, p *— простой корень с коротким корнем* $r + p$. *Тогда выполняется одно из следующих условий:*

а) $Q\{r\} \subseteq H$;

б) r *— длинный корень, и выполняется условие* $(***)$ *для* $r' = r$;

в) p *— длинный корень, и выполняется условие* $(***)$ *для* $r' = 2p - r$.

$\lhd$ Если r — короткий корень, и $r + p_0$ не является корнем, то взаимный коммутант $[H, X_p]$ имеет единственный 2-угол для всех простых корней p таких, что $r + p \in C_n^+$. Применяя индукцию по высоте корня r, легко получаем включение $T\{r + p\} \subseteq H$ и условие а).

Предположим далее, $Q\{r\} \nsubseteq H$. Тогда r — длинный корень или $r + p_0$ — корень. В первом случае, помимо 2-угла $r + p$, взаимный коммутант $[H, X_p]$ имеет 2-угол $r + 2p$, во втором — $2r + p$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $p_1 = p, p_2, \ldots, p_s$ — простые корни, такие, что $r_j = r + p_1 + \ldots + p_j$, $r'_j = r + 2p_1 + \ldots + 2p_j$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$ — корни, и t — наименьший индекс, для которого $Q\{r_t\} \subseteq H$. Если $t \geqslant 2$, то найдется такой простой корень $q \neq p_3$, что $r_2 + q$ — корень, причем этот корень является единственным углом во взаимном коммутанте $[[[H, X_{p_1}], X_{p_2}], X_q]$. Отсюда получаем включение $T\{r_2 + q\} \subseteq H$ и, таким образом, $Q\{r_1, r_2, \ldots, r_t\} \subseteq H$. Учитывая полученное включение и соотношение

$$H \supseteq [[\ldots[[H, X_{p_1}], X_{p_2}]\ldots], X_{p_s}] \supseteq e_{r_s} + e_{r'_s} \quad (1 \leqslant s \leqslant t),$$

повторными коммутированиями получаем включения $Ke_{r'_j} \subseteq H$ для всех $j > t$ и, таким образом, включение $Q\{r'_t\} \subseteq H$. Пусть, наконец, в H найдется элемент α, у которого r_j- и r'_j-проекции различны, $j < t$. Если при этом r_j-проекция ненулевая, то применяя к взаимному коммутанту $[\alpha, X_{p_{j+1}}]$ с единственным углом r_{j+1} доказанное утверждение а), получаем, что $Ke_{r_{j+1}} \subseteq H$, а значит, и $Ke_{r_t} \subseteq H$, вопреки выбору t. К этому же противоречию приходим в случае, когда r'_j-проекция ненулевая, рассмотрев соотношения

$$H \supseteq [[\ldots[[\alpha, X_{p_{j+1}}], X_{p_{j+2}}]\ldots], X_{p_t}] = Ke_{r'_t} \bmod Q\{r_1, r_2, \ldots, r_t\} + Q\{r'_t\}$$

и $H \supseteq e_{r_t} + e_{r'_t}$. Таким образом, выполняется условие б).

Утверждение в) получаем аналогично, рассмотрев второй случай. $\rhd$

Рассуждения, проведенные для взаимного коммутанта $[H, X_p]$ при рассмотрении случая б) доказанной леммы, почти дословно переносятся для нормальной подгруппы H с двумя связанными углами, один из которых — длинный корень. В результате получаем следующую лемму.

Лемма 8. *Пусть $H \trianglelefteq UC_n(2)$, $\mathscr{L}_2(H) = \{r, r'\}$, где r' — длинный корень, $r \in \{p_0\}^+$, причем эти 2-углы p-связаны для простого корня p с коротким корнем $r + p$. Тогда для r, r' выполняется условие $(***)$.*

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Если r короткий корень, то по лемме 5, $r+p$ является 2-углом в $[H, X_p]$ в условиях теоремы. Когда этот 2-угол единственный, нормальное замыкание коммутанта $[H, X_p]$ по лемме 7 содержит $Q\{r + p\}$, а поэтому и $\mathscr{F}_2([H, X_p])$. Леммы 5, 7 и следствие 6 приводят к тем же включениям, если 2-углы в $[H, X_p]$ не связаны.

Допустим, что для нормальной подгруппы H $Q\{r + p\} \nsubseteq H$. Тогда, в силу сказанного выше, взаимный коммутант $[H, X_p]$ имеет больше одного 2-угла, причем эти углы связаны.

Пусть в $\mathscr{L}_2([H, X_p])$ имеется ровно два 2-угла, эти 2-углы $q-$связаны для некоторого простого корня q, и $T\{r+p+q\} \nsubseteq H$. Рассмотрим вначале случай, когда оба этих угла — короткие корни, имеющие вид $\{r + p, s + p\}$. Тогда и корни r, s, p, а также $r + p + q$, $s + p + q$ — короткие. По лемме 3 фреймы в $[H, X_q]$ и $[[H, X_p], X_q]$ есть инцидентные подмодули 2-мерного $K-$модуля $\mathscr{F}_2(T\{r + p + q\} + T\{s + p + q\})$. Поэтому они 1-мерны и совпадают. Отсюда следует, что прибавлением элемента из фрейма $\mathscr{F}_2([H, X_p])$ можно аннулировать одновременно $r + p$- и $s + p$- проекции любого элемента из H. В силу лемм 4 и 7 имеем включение $Q\{r + p, r + p + q\} \subset H$. Таким образом, H удовлетворяет условию (B_2).

Если один из двух 2-углов взаимного коммутанта $[H, X_p]$ — длинный корень, тогда второй угол должен лежать в $\{p_0\}^+$, и в $\mathscr{L}_2(H)$ есть длинный корень. Пусть r — длинный корень. Если r не связан в H ни с каким углом из множества $\{p_0\}^+$, то взаимный коммутант $[H, X_p]$ имеет 2-углы $r + p$, $r + 2p$, и по лемме 8 получаем условие (C_2). Если же r связан с некоторым углом $r' \in \{p_0\}^+$, то взаимный коммутант $[H, X_p]$ имеет 2-углы $r'+p$, $r+2p$, и вновь с использованием леммы 8, получаем условие (D_2), $(*)$. Если же r — короткий корень, связанный с длинным корнем s, то, применяя лемму 8 ко множеству $[H, X_p]$ с двумя 2-углами $r + p$, $s + 2p$, получаем условие (F_2), $(*)$.

В случае, когда p — длинный корень, получаем случай (E_2).

Пусть, наконец, взаимный коммутант $[H, X_p]$ имеет три связанных 2-угла. Тогда по лемме 3 один из углов — длинный корень, и поэтому приходим к условиям (D_2), $(**)$ или (F_2), $(**)$. $\rhd$

Литература

1. *Левчук В. М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика.—1990.—Т. 29, № 3.—С. 315–338.
2. *Левчук В. М., Сулейманова Г. С.* Нормальное строение и абелевы нормальные подгруппы унипотентной подгруппы группы Шевалле // Межд. конф. «Классы групп, алгебр и их приложения».—Гомель, 2007.—С. 98–99.
3. *Левчук В. М., Сулейманова Г. С.* Нормальное строение унипотентной подгруппы группы лиева типа и смежные вопросы // Доклады Академии наук.—2008.—№ 5.—С. 3–6.
4. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле.— М.: Мир, 1975.—375 с.
5. *Carter R.* Simple groups of Lie type.— N. Y.: Wiley and Sons, 1972.—332 c.

Статья поступила 30 января 2008 г.

Сулейманова Галина Сафиуллановна
Сибирский федеральный университет
Красноярск, 660041, РОССИЯ
E-mail: suleymanova@list.ru