Владикавказский математический журнал
июль–сентябрь, 2007, Том 9, Выпуск 3

УДК **517.98**

МАЖОРИРУЕМЫЕ ОПЕРАТОРЫ УРЫСОНА В ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ[1]

М. А. Плиев

Памяти Г. Я. Лозановского посвящается

Рассматриваются мажорируемые операторы Урысона, действующие в пространствах со смешанной нормой. Изучаются условия непрерывности и различные типы компактности для таких операторов.

Ключевые слова: мажорируемые операторы Урысона, пространства со смешанной нормой, BM-компактность, EC-компактность, почти компактность.

Введение

Изучение топологических и порядковых свойств операторов, действующих в функциональных пространствах, является традиционной задачей анализа. Линейным операторам, действующим в банаховых решетках и решеточно нормированных пространствах, посвящена обширная литература [2, 6, 7]. В книгах [1, 5, 8] изучались нелинейные операторы типа Урысона и Гаммерштейна, действующие в банаховых и локально выпуклых пространствах. В работах [9, 10] интегральные операторы Урысона рассматривались с точки зрения порядкового анализа. При изучении таких операторов, как впрочем и для линейного случая, оказывается полезной техника решеточно нормированных пространств и мажорируемых операторов. В работах [2, 3] были введены мажорируемые операторы Урысона, действующие в решеточно нормированных пространствах и был найден критерий интегрального представления мажорируемого оператора Урысона. Настоящая заметка продолжает этот круг исследований и посвящена изучению топологических свойств мажорируемых операторов Урысона, действующих в пространствах со смешанной нормой.

1. Предварительные сведения

Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Стандартный источник для ссылок по теории векторных решеток и решеточно нормированных пространств — монография [2]. Теория операторов Урысона, действующих в векторных решетках, подробно изложена в [9].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00622.

1.1. Рассмотрим векторную решетку F и векторное пространство W. Говорят, что оператор $T:\,F\to W$ *ортогонально аддитивен*, если $T(f_1+f_2)=Tf_1+Tf_2$ для дизъюнктных f_1 и f_2. Ортогонально аддитивный оператор T называется *порядково ограниченным*, если он переводит порядково ограниченные множества в порядково ограниченные множества. Оператор $T:\,E\to F$, действующий между векторными решетками E и F, называется *абстрактным оператором Урысона*, если он порядково ограничен и ортогонально аддитивен. Множество всех абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается $\mathscr{U}(E,F)$. Частичный порядок в векторном пространстве $\mathscr{U}(E,F)$ вводится с помощью конуса $\mathscr{U}_+(E,F)$, определяемого следующим образом:

$$T\in\mathscr{U}_+(E,F)\Leftrightarrow(\forall e\in E)\;Te\geqslant 0.$$

При этом оператор $S\geqslant T$ в том и только том случае, если $S-T\in\mathscr{U}_+(E,F)$.

В случае, когда пространство F порядково полно, для $\mathscr{U}(E,F)$ можно построить порядковое исчисление типа Рисса-Канторовича, аналогично линейному случаю.

1.2. *Пусть E и F — векторные решетки, причем решетка F порядково полна. Тогда $\mathscr{U}(E,F)$ — порядково полная векторная решетка и для любых двух операторов T, $S\in\mathscr{U}(E,F)$ и вектора $f\in E$ справедливы формулы* [9]:

$$\begin{gathered}(T\vee S)(f):=\sup\{Tg+Sh:\,g+h=f;\,g\perp h\};\\(T\wedge S)(f):=\inf\{Tg+Sh:g+h=f;\,g\perp h\};\\T^+(f):=\sup\{Tg:\,g\leqslant f,\,(f-g)\perp g\};\\T^-(f):=-\inf\{Tg:\,g\leqslant f,\,(f-g)\perp g\};\\|Tf|\leqslant|T|(f).\end{gathered}$$

1.3. В [3] были введены мажорируемые операторы Урысона, действующие в решеточно нормированных пространствах. Пусть (V,E) — решеточно нормированное пространство, а (W,F) — пространство Банаха-Канторовича. Оператор $T:\,V\to W$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(v+w)=Tv+Tw$, когда v и w дизъюнктны. Оператор $T:\,V\to W$ называется *мажорируемым оператором Урысона*, если выполняются следующие условия:

1) T ортогонально аддитивен;

2) существует $S\in\mathscr{U}_{\mathrm{sim}}(E,\,F)$ такой, что выполняется неравенство:

$$\lvert Tv\rvert\leqslant S(\lvert v\rvert)\quad(v\in V).$$

Символом $\mathscr{U}_{\mathrm{sim}}(E,F)$ обозначается множество ортогонально аддитивных, положительных, возрастающих, симметричных операторов. Выражаясь точнее, $T\in\mathscr{U}_{\mathrm{sim}}(E,F)$ в том и только том случае, когда T ортогонально аддитивен, $Te\in F_+$ для любого вектора $e\in E$, T возрастает на E_+ и кроме того $T(-e)=Te$ для любого $e\in E_+$. Оператор S, обладающий указанными свойствами называется *мажорантой* T. Множество всех мажорант обозначается через $\mathrm{maj}(T)$. Множество $\mathscr{U}_{\mathrm{sim}}(E,F)$ само является подрешеткой $\mathscr{U}(E,F)$, и поэтому наследует векторный порядок из $\mathscr{U}(E,F)$. Наименьший элемент в $\mathrm{maj}(T)$ относительно этого естественного порядка, называется *точной мажорантой* оператора T и обозначается $\lvert T\rvert$. Множество всех мажорируемых операторов Урысона из V в W обозначается через $M_U(V,W)$. Разложимость мажорантной нормы не имеет места, однако существует некоторый аналог разложимости [3]. Для любого $T\in M_U(V,W)$ и любых S, $P\in\mathscr{U}_{\mathrm{sim}}(E,\,F)$ таких, что

$$0\leqslant S\leqslant\lvert T\rvert;\quad 0\leqslant P\leqslant\lvert T\rvert;\quad P\perp S;\;P+S=\lvert T\rvert;$$

найдется оператор $S_T \in M_U(V, W)$ и

$$|T| = |S_T| + |T - S_T|; \quad |S_T| = S; \quad |T - S_T| = P.$$

1.4. Говорят, что сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\Xi} \subset V$ латерально сходится к элементу v, если $v = \lim\limits_{\alpha} v_\alpha$ и $(v_\alpha - v_\beta)\perp v_\beta$ для любых $\alpha, \beta \in \Xi, \beta \leqslant \alpha$. При этом пишут $v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$. Рассмотрим теперь, так называемые, латерально непрерывные операторы. Оператор $T : (V, E) \to (W, F)$ называется *латерально непрерывным*(*латерально σ-непрерывным*), если из $v = l\text{-}\lim\limits_{\alpha} v_\alpha (v = l\text{-}\lim\limits_{n} v_n)$ следует $Tv = o\text{-}\lim\limits_{\alpha} (Tv_\alpha)$ $\Big(Tv = o\text{-}\lim\limits_{n} Tv_n\Big)$.

Далее в тексте под $\mathfrak{Br}(E)$ будем понимать булеву алгебру проекторов пространства E. На банаховы пространства X и Y, встречающиеся в тексте, накладываются следующие ограничения: X — сепарабельное банахово пространство, а для банахового пространства Y найдется счетное, всюду плотное подмножество $Z^\sharp \subset Z$, где $Z \subset Y^*$ — нормирующее подпространство в Y^*. Имеет место следующий критерий слабой интегральной представимости мажорируемого оператора Урысона [4].

Пусть $T : E(X) \to F(Y)$ — мажорируемый оператор Урысона. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T — слабый интегральный оператор Урысона;

2) для любых двух ограниченных последовательностей вектор-функций $\vec{f}_n$, $\vec{g}_n$ из $|\vec{f}_n - \vec{g}_n| \to 0$ по мере вытекает $|T\vec{f}_n - T\vec{g}_n| \to 0$ почти всюду.

2. Непрерывные по норме мажорируемые операторы Урысона

2.1. В настоящем пункте мы установим непрерывность по норме слабого интегрального мажорируемого оператора Урысона, действующего в пространствах измеримых вектор-функций. Если пара (V, E) — решеточно нормированное пространство (РНП), где E — банахова решетка, то для произвольного элемента $x \in V$ существует так называемая смешанная норма

$$|||x||| := \| |x| \|_E.$$

РНП с указанным свойством будем *пространством со смешанной нормой.* В случае *br*-полноты пространство со смешанной нормой (V, E) становится банаховым пространством с нормой $|||\cdot|||$. Все встречающиеся в тексте РНП со смешанной нормой будем считать *bo*-полными. В дальнейшем элементы пространств со смешанной нормой будем обозначать буквами x, y, z, u. За элементами нормирующих банаховых решеток зарезервируем буквы e, f, g, h. Пусть $e \in E_+$ и $M \subset V$. Множество M называется *абсолютно эквинепрерывным относительно* e, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что $|||\pi x||| < \varepsilon$ для всех $x \in M$ и порядковых проекторов $\pi \in \mathfrak{Br}(E)$, таких что $\|\pi e\| < \delta$. Напомним, что элемент $e \in E_+$ банаховой решетки называется *квазивнутренней точкой*, если порядковый идеал E_e, порожденный e, плотен по норме в E. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Для любого $x \in V$ можно написать

$$|x| = f_1 + f_2; \ \ f_1 = \pi|x|;$$

где π — проектор на полосу $\{(|x| - \lambda e)^+\}^{\perp\perp}$ и $f_2 = |x| - f_2$. В силу разложимости решеточной нормы найдутся такие x_1 и x_2, что $|x_1| = f_1$ и $|x_2| = f_2$. Пусть теперь $\varphi_\lambda(x) := x_2$.

Лемма. *Пусть E — банахова решетка с квазивнутренней точкой e, (V, E) — пространство со смешанной нормой, а последовательность $\{x_n\} \subset V$ сходится к x по норме $|||\cdot|||$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *множество* $\{x\}$ *абсолютно эквинепрерывно относительно* e;

(б) *множество* $M \subset V$, *имеющее вид*

$$M = \{\varphi_\lambda(x) : \lambda > 0\} \cup \{\varphi_\lambda(x_n) : \lambda > 0,\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x,\, x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$$

абсолютно эквинепрерывно относительно e.

$\lhd$ Пусть $x \in V$ и $\varepsilon > 0$. Так как e квазивнутренная точка в E, то порядковый идеал E_e плотен в E и существует такой элемент $f \in E_e$, что $\| |x| - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Используем изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{Br}(E)$ и $\mathfrak{Br}(V, E)$. Тогда

$$\|\pi |x| - \pi f\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для любого порядкового проектора π. Так как $f \in E_e$, то $|f| < \lambda e$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Тогда $\|\pi f\| < \lambda \|\pi e\|$. Возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{2\lambda}$. Тогда если $\|\pi e\| < \delta$, то $|||\pi x||| < \varepsilon$, так как справедливы формулы:

$$|||\pi x||| \leqslant \|\pi |x| - \pi f\| + \|\pi f\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\pi |x| - \pi f\| + \lambda \|\pi e\| < \varepsilon.$$

Докажем утверждение б). Для данного $\varepsilon > 0$ в силу сходимости последовательности (x_n) к x найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такой что $|||x - x_n||| < \frac{\varepsilon}{2}$, когда $n > n_0$. По доказанному выше существует $\delta_1 > 0$, такой что $|||\pi x||| < \frac{\varepsilon}{2}$, когда $\|\pi e\| < \delta_1$. С другой стороны существует $\delta_2 > 0$, такой что $|||\pi x_n||| < \varepsilon$, для $n \in \{1, \ldots, n_0 - 1\}$, когда $\|\pi e\| < \varepsilon$. Возьмем в качестве δ число $\min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда будет справедлива оценка

$$|||\pi x_n||| \leqslant |||\pi x_n - \pi x||| + |||\pi x||| < \varepsilon;\ \forall n \geqslant n_0.$$

Для элементов последовательности (x_n) с номерами, принадлежащими множеству $\{1, \ldots, n_0 - 1\}$ неравенство очевидно. Далее, так как $|\varphi_\lambda(x)| \leqslant |x|$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $x \in V$, то $|||\varphi_\lambda(x)||| < \varepsilon$, когда $\|\pi e\| < \delta$ и $|||\varphi_\lambda(x_n)||| < \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$. $\rhd$

2.2. Существование квазивнутренней точки в нормирующей решетке облегчает изучение латерально непрерывных мажорируемых операторов Урысона.

Лемма. *Пусть* E *и* F *— банховы решетки, причем* E *—* K_σ*-пространство с квазивнутренней точкой* e, (V, E) *и* (W, F) *— пространства со смешаннми нормами,* $x \in V$. *Если* $T \in M_U(V, W)$ *— латерально непрерывный оператор, то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *такое что* $|||T\pi x||| < \varepsilon$, *для любых* $\pi \in \mathfrak{Br}(V)$, *таких, что* $\|\pi e\| < \delta$.

$\lhd$ Проведем доказательство от противного. Тогда существует $y \in V$, $\varepsilon > 0$ и последовательность порядковых проекторов $(\pi_n)_{n=1}^\infty$, такая что, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\pi_n e\| = 0$ но $\lim\limits_{n\to\infty} |||T\pi_n y||| > \varepsilon$, для любого $n \in \mathbb{N}$. Переходя если надо к подпоследовательности будем считать, что $\sum_{n=1}^\infty \|\pi_n e\| < \infty$. Воспользуемся теперь σ-полнотой нормирущей решетки E. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует порядковый проектор $\rho_k = \sup_{n \geqslant k} \pi_n$. Ясно, что последовательность проекторов $(\rho_k)_{k=1}^\infty$ невозрастающая и для каждого $k \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$|||T\rho_k y||| \geqslant |||T\pi_k y||| > \varepsilon.$$

Далее имеем

$$\|\rho_k e\| \leqslant \left\| \sum_{n=k}^\infty \pi_n e \right\| \leqslant \sum_{n=k}^\infty \|\pi_n e\|.$$

Отметим, что $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \|\pi_n e\| \to 0$ когда $k \to \infty$. Пусть теперь $\rho = \inf\limits_{k \in \mathbb{N}} \rho_k$. Ясно, что $\|\rho_k e\| \geqslant \|\rho e\|$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Таким образом $\rho e = 0$. Так как e квазивнутренная точка в E, то $\rho = 0$. Таким образом $(\rho_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю в булевой алгебре проекторов $\mathfrak{Br}(V)$ и следовательно $(\rho_k y)_{k=1}^{\infty}$ латерально сходится к 0 в пространстве (V, E). Так как оператор T латерально непрерывен, то последовательность $(|T\rho_k y|)_{k=1}^{\infty}$ порядково сходится к нулю в пространстве F. Используя порядковую непрерывность нормы F, получаем, что $\lim\limits_{k \to \infty} |||T\rho_k y||| = 0$. Пришли к противоречию. $\rhd$

2.3. В этом пункте путем небольшой модификации мы усилим лемму 2.2.

Лемма. *Пусть (V, E) и (W, F) — те же, что и в 2.2, e — квазивнутренная точка в E и $T \in M_U(V, W)$ — латерально σ-непрерывный оператор. Если множество M абсолютно эквинепрерывно относительно e, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что*

$$\forall \pi \in \mathfrak{Br}(V) \quad \|\pi e\| < \delta \Rightarrow \sup_{x \in M} |||T\pi x||| < \varepsilon.$$

$\lhd$ Проведем доказательство от противного. Тогда существует $\varepsilon' > 0$ и последовательность элементов $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$, а также последовательность порядковых проекторов $(\pi_n)_{n=1}^{\infty}$, такие что $\sum_{n=1}^{\infty} \|\pi_n e\| < \infty$ и $|||T\pi_n x_n||| > \varepsilon'$. Как и в 2.2 пусть $\rho_k = \sup_{n \geqslant k} \pi_n$. Тогда мы имеем, что $|||T\rho_k x_k||| > \varepsilon'$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \|\rho_k e\| = 0$. С другой стороны, применяя лемму 2.2 к каждому x_k, можем написать $\lim\limits_{\|\pi_n e\| \to 0} |||T\pi_n x_k||| = 0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ мы можем найти $n(k)$, $n(k) > k$, такой, что

$$|||T(\rho_{n(k)} - \rho_k) x_k||| > \varepsilon'.$$

Возьмем $k_1 = 1$ и $k_i = n_{k_{i-1}}$ и $\theta_i = \rho_{k_i} - \rho_{k_{i+1}}$. Так как $(\rho_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ убывающая последовательность проекторов, то проекторы θ_i попарно взаимно дизъюнктны. Кроме того $\theta_i \leqslant \rho_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{i \to \infty} \|\theta_i e\| = 0$. Пусть $y_i = x_{k_i}$, Тогда $|||T\theta_i y_i||| > \varepsilon'$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Так как множество $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ абсолютно эквинепрерывно относительно e, то $\lim\limits_{i \to \infty} |||\theta_i y_i||| = 0$. Переходя, если надо к подпоследовательности, получаем, что $\sum_{i=1}^{\infty} |||\theta_i y_i||| < \infty$. Пусть $v = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i y_i$. Так как проекторы θ_i попарно дизъюнктны, то суммы $\sum_{i=1}^{n} \theta_i y_i$ латерально сходятся к v. Учитывая это, получаем, что суммы $\sum_{i=1}^{n} T\theta_i y_i$ латерально сходятся к Tv. Так как норма в F порядково непрерывна,то можем написать

$$|||Tv||| = \lim_{n \to \infty} \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{n} T\theta_i y_i \right|\right|\right|.$$

Получили противоречие. $\rhd$

2.4. В настоящем пункте мы установим главный результат настоящего параграфа — непрерывность по норме слабого интегрального оператора Урысона. Предварительно докажем вспомогательную лемму.

Лемма. *Пусть (V, E) (W, F) — пространства со смешанными нормами, где E, F-банаховы решетки и E кроме того K_σ-пространство, e — квазивнутренная точка в E, $x \in V$, $r, \delta \in \mathbb{R}_+$. Пусть π — порядковый проектор на полосу, порожденную $(|x| - \frac{r}{\delta} e)^+$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) $\pi|x| \geqslant \pi(\frac{r}{\delta} e)$;

2) $(I - \pi)|\varphi_{\frac{r}{\delta}}(x)| = (I - \pi)|x|$;

3) *Если кроме того* $|||x||| < r$, *то* $\|\pi e\| < \delta$.

$\lhd$ Первое утверждение очевидно. Второе утверждение следует из того, что

$$|\varphi_{\frac{r}{\delta}}(x)| \perp \{(|x| - r/\delta e)^+\}^{\perp\perp}$$

и простого наблюдения, что проекторы $I - \pi$ и π — дизъюнктны. Пусть теперь

$$\|\pi(r/\delta e)\| \leqslant \|\pi|x|\,\| \leqslant \||x|\,\| = |||x|||.$$

Отсюда следует, что $\|\pi e\| < \delta$ когда $|||x||| < r$. $\rhd$

Теорема. *Пусть* (V, E) *и* (W, F) *— пространства со смешанными нормами, где* E, F *— банаховы решетки,* E *кроме того* K_σ*-пространство,* e *— квазивнутренная точка в* E*, норма в* F *порядково непрерывна. Пусть* $T \in M_U(V, W)$ *—* σ*-латерально непрерывный оператор. Если* T *равномерно непрерывен по норме на каждом порядково ограниченном множестве, то он непрерывен по норме на всем пространстве* V.

$\lhd$ Пусть $(x_n)_{n=1}^\infty$ последовательность в V, сходящаяся по норме к x и предположим, что $|||x||| < r$, $|||x_n||| < r$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и некоторого $r \in \mathbb{R}_+$. Требуется установить, что последовательность $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ сходится по норме к Tx. Рассмотрим множество

$$M = \{\varphi_\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N},\, \lambda \in \mathbb{R}_+\} \cup \{\varphi_\lambda(x) : \lambda \in \mathbb{R}_+\} \cup \{x,\, (x_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Используя лемму 2.3, мы можем заключить, что множество M абсолютно эквинепрерывно относительно e. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ мы можем найти такое $\delta > 0$, что $|||T\pi y||| < \frac{\varepsilon}{3}$ для любого $y \in M$ и любого порядкового проектора π, такого что $\|\pi e\| < \delta$. Определим теперь элемент $\varphi(x) := \varphi_{\frac{r}{\delta}}(x)$. Пусть π_n — порядковые проекторы на полосы $\{(|x_n| - \frac{r}{\delta}e)^+\}^{\perp\perp}$ и π проектор на полосу $\{(|x| - \frac{r}{\delta}e)^+\}^{\perp\perp}$. Из леммы 2.4 следует, что $\|\pi_n e\| < \delta$ и $\|\pi e\| < \delta$. Тогда $|||T\pi_n x_n||| < \frac{\varepsilon}{3}$ и $|||T\pi_n\varphi_\lambda(x_n)||| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|||T\pi\varphi_\lambda(x)||| < \frac{\varepsilon}{3}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Легко видеть, что $\varphi(x_n)$ сходится по норме к $\varphi(x)$ в пространстве V. Кроме того $|\varphi(x)| \leqslant \frac{r}{\delta}e$ и $|\varphi(x_n)| \leqslant \frac{r}{\delta}e$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Используя равномерную непрывность оператора T на порядково ограниченных множествах мы можем указать такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство $|||T\varphi(x) - T\varphi(x_n)||| < \frac{\varepsilon}{3}$. Далее мы можем написать

$$\begin{aligned} |||Tx_n - Tx||| &= |||T(I - \pi_n)x_n + T\pi_n x_n - T(I - \pi)x - T\pi x||| \\ &= |||T\varphi(x_n) - T\varphi(x) + T\pi_n x_n - T\pi x||| \\ &\leqslant |||T\varphi(x_n) - T\varphi(x)||| + |||T\pi_n x_n||| + |||T\pi x||| < \varepsilon. \ \rhd \end{aligned}$$

2.5. Опираясь на доказанную выше теорему, можно установить непрерывность по норме слабого интегрального оператора Урысона, действующего в пространствах измеримых вектор-функций.

Лемма. *Пусть* E, F *— банаховы идеальные подпространства пространств измеримых функций* $L_0(\nu)$ *и* $L_0(\mu)$*, норма в* F *порядково непрерывна,* X, Y *— банаховы пространства и* $E(X)$*,* $F(Y)$ *— соответствующие пространства измеримых вектор-функций. Пусть* $T :\ E(X) \to F(Y)$ *— мажорируемый слабый интегральный оператор Урысона. Тогда* T *равномерно непрерывен на порядково ограниченных множествах в* $E(X)$.

$\lhd$ Пусть $(x_n)_{n=1}^\infty$ и $(y_n)_{n=1}^\infty$ — порядково ограниченные последовательности в $E(X)$ и предположим, что

$$\||x_n - x|\,\| = |||x_n - y_n||| \to 0.$$

Тогда используя свойства нормы в E, получаем что $|x_n - x| \to 0(\nu)$. Так как T — слабый интегральный оператор Урысона, то $|Tx_n - Ty_n| \to 0$ почти всюду в F. Следовательно $|||Tx_n - Ty_n||| \to 0$ ввиду порядковой непрерывности нормы в F. $\rhd$

Так как слабый интегральный оператор Урысона латерально непрерывен, то справедливо следущее утверждение.

Следствие. *Пусть E, F — банаховы идеальные подпространства пространств измеримых функций $L_0(\nu)$ и $L_0(\mu)$, норма в F порядково непрерывна, X, Y — банаховы пространства и $E(X)$, $F(Y)$ — соответствующие пространства измеримых вектор-функций. Пусть $T : E(X) \to F(Y)$ — мажорируемый слабый интегральный оператор Урысона. Тогда T непрерывен по норме.*

Замечание. Если в 2.1–2.4 рассмотреть частный случай, когда пространства со смешанными нормами совпадают с нормирующими решетками, то мы получим результаты Ж. Мазона и С. де Леона, установленные в работе [10]. Похожими задачами, в контексте операторов, действующих в квазинормированных пространствах, занимался В. Г. Фетисов [5].

3. Компактность операторов Урысона

3.1. В этой главе мы установим достаточные условия для разных типов компактности мажорируемых операторов Урысона, действующих в пространствах со смешанной нормой. Пусть (V, E) и (W, F) — пространства со смешанными нормами, а $T : (V, E) \to (W, F)$ — мажорируемый оператор Урысона. Оператор называется *компактным*, если для каждого ограниченного по норме множества $M \subset V$ его образ $T(M)$ предкомпактен в W. Компактный и непрерывный оператор называется *вполне непрерывным.*

Оператор T называется *BM-компактным*, если для любого $x \in V$ оператор отображает множеств $M_x := \{y : y \in V, |y| \leqslant |x|\}$ в предкомпактное множество в W. В случае, когда пространства со смешанными нормами (V, E) и (W, F) имеют вид (E, E) и (F, F) BM-компактность совпадает с AM-компактностью введенной в [10]. Если же $E = F = \mathbb{R}$, то BM-компактность — обычная компактность оператора в нормированных пространствах. Пусть $x \in V$. Напомним, что $y \in V$ называется осколком x, если $|x - y| \perp |y|$. Множество осколков x обозначается $\mathfrak{B}_x$. Отметим, что булевы алгебры осколков x и $|x|$ изоморфны. Оператор T называется *C-компактным*, если для любого $x \in X$ $T(\mathfrak{B}_x)$ предкомпактное множество в W.

Оператор T называется *почти компактным*, если для любого $\varepsilon > 0$ и порядково ограниченного множества $D \subset V$ существует $x \in V$, такой что

$$T(D) \subset T(M_x) + \varepsilon B_W,$$

где $B_W := \{z : z \in W;\ |||z||| \leqslant 1\}$ — единичный шар пространства W.

В контексте теории банаховых решеток, операторы с вышеуказанными свойствами изучались в работе [10]. Для операторов, действующих в решеточно нормированных пространствах можно ввести свойство, близкое к C-компактности. Пусть $\mathfrak{E}_x := \{y : |y| = |z|;\ z \in \mathfrak{B}_x\}$. Оператор T называется *EC-компактным*, если для любого $x \in X$ образ $T(\mathfrak{E}_x)$ предкомпактное множество в W.

Простейшие примеры показывают, что в пространствах со смешанной нормой множества EC-компактных и C-компактных операторов не совпадают. В случае операторов, действующих в банаховых решетках, картина выглядит проще.

Лемма. *Пусть E и F банаховы решетки. Тогда оператор $T \in \mathscr{U}(E,F)$ будет EC-компактным тогда и только тогда, когда он C-компактен.*

$\lhd$ Пусть $T \in \mathscr{U}(E,F)$ и оператор C-компактен. Так как $T(\mathfrak{E}_f) = T(\mathfrak{B}_f) \cup T(\mathfrak{B}_{-f})$, то $T(\mathfrak{E}_f)$ также предкомпактное множество. Обратная импликация очевидна. $\rhd$

Теорема. *Пусть (V,E) и (W,F) — пространства со смешанными нормами, E, F — банаховы решетки и E — K_σ-пространство. Пусть $T \in M_U(V,W)$ и T — EC-компактный оператор. Если T равномерно непрерывен на порядково ограниченных множествах в V, то тогда он BM-компактен.*

$\lhd$ Пусть x произвольный элемент V. Требуется установить, что множество $T(M_x)$ предкомпактно в W. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда по предположению найдется такое $\delta > 0$, что справедливо неравенство $|||Ty_1 - Ty_2||| < \varepsilon/2$ для y_1, $y_2 \in M_x$ таких, что $|||y_1 - y_2||| < \delta$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, такое что $\frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2|||x|||}$.Так как оператор C-компактнен, то для данного $\varepsilon/2^n > 0$ найдется конечное множество D_j, $j \in \{1,\dots,n-1\}$ осколков элемента $j/2^n x$, такое, что для каждого осколка z элемента $\frac{j}{2^n}x$ существует $u_j \in D_j$, удовлетворяющий неравенству

$$|||Tz - Tu_j||| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Пусть $D := \{\sum_{j=1}^{2^{n-1}} Tu_j : u_j \in D_j\}$. Возьмем произвольный элемент $y \in M_x$. Применяя спектральную теорему Фрейденталя к $|y|$, можем найти такой элемент $h \in E_+$, что $h = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \frac{j}{2^n} g_i$, где g_i — осколки элемента $|x|$ и $|y| - h < \frac{1}{2^{n-1}}|x|$. Через v_i обозначим такие осколки x, что $|v_i| = g_i$. Отметим, кроме того, что элемент h можно подобрать удовлетворяющим условию $|y| - h \geqslant 0$. Используя разложимость решеточной нормы, найдем такой элемент $y^* \in V$, такой что $|y^*| = h$. Тогда

$$|||y - y^*||| = \| |y - y^*| \| = \| |y| - h \| \leqslant \left\| \frac{1}{2^{n-1}} |x| \right\| < \delta$$

Таким образом, в силу равномерной непрерывности оператора имеем $|||Ty - Ty^*||| < \frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, так как $\frac{j}{2^n} g_i$ — осколки элемента $\frac{j}{2^n}|x|$, то существуют $u_j \in D_j$

$$\left|\left|\left| T(\frac{j}{2^n} v_i) - Tu_j \right|\right|\right| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Далее можем написать

$$\left|\left|\left| \sum_{j=1}^{2^{n-1}} Tu_j - Ty^* \right|\right|\right| = \left|\left|\left| \sum_{j=1}^{2^{n-1}} Tu_j - \sum_{j=1}^{2^{n-1}} T(\frac{j}{2^n} v_i) \right|\right|\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом $\left|\left|\left| \sum_{j=1}^{2^{n-1}} Tu_j - Ty \right|\right|\right| < \varepsilon$. Это означает, что D является ε-сетью и множество $T(M_x)$ предкомпактно. $\rhd$

3.2. В настоящем пункте докажем следующий результат.

Теорема. *Пусть (V,E), (W,F), (H,G) — пространства со смешанными нормами, где E, F, G — банаховы решетки. Предположим, что $T \in M_U(V,W)$ почти компактный оператор и $S \in M_U(W,H)$ — BM-компактен и равномерно непрерывен. Тогда оператор $R := ST : V \to H$ компактен.*

$\lhd$ Так как S равномерно непрерывен, то $|||Sy_1 - Sy_2||| < \frac{\varepsilon}{2}$ когда $|||y_1 - y_2||| < \delta$. Так как T почти компактен, то существует $x^* \in V$, такой что

$$T(D) \subset T(M_{x^*}) + \delta B_W,$$

где D — ограниченное по норме множество в V.Так как T мажорируемый оператор, то найдется $y_0 \in W$, такое что $T(M_{x^*}) \subset M_{y_0}$. Воспользовавшись BM-компактностью оператора S можем найти такое конечное множество $z_1, \ldots, z_n$ элементов H, что справедлива формула

$$S(M_{y_0}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(z_i + \frac{\varepsilon}{2} B_H \right).$$

В качестве ε-сети для множества $R(D)$ можем взять набор $z_1, \ldots, z_n$. Действительно, пусть $y \in M_{y_0}$, $v \in \delta B_W$. Тогда справедливы формулы

$$|||S(y+v) - z_i||| \leqslant |||S(y+v) - Sy + Sy - z_i||| \leqslant |||S(y+v) - Sy||| + |||Sy - z_i||| \leqslant \varepsilon$$

Далее можем написать

$$R(D) = (ST)(D) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(z_i + \frac{\varepsilon}{2} B_H \right).$$

Следовательно R — компактный оператор. $\rhd$

3.3. Накладывая некоторые ограничения на пространство на котором определен оператор, можно получить дополнительную характеризацию почти компактных операторов.

Теорема. *Пусть (V, E), (W, F) — пространства со смешанными нормами, где E, F — банаховы решетки и E это K_σ-пространство. Пусть $T \in M_U(V, W)$. Если для любого $r \in \mathbb{R}_+$ существует $e \in E_+$, $e \neq 0$, такое что, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ и*

$$(\forall x \in V) \quad (\forall \pi \in \mathfrak{Pr}(V)) \quad (|||x||| \leqslant r; \ \|\pi e\| < \delta \Rightarrow |||T\pi x||| < \varepsilon)$$

то оператор T почти компактен.

$\lhd$ Требуется установить, что если $D = \{x : x \in V, |||x||| \leqslant r\}$ и $\varepsilon > 0$, то существует такой элемент $x_0 \in V$, что $T(D) \subset T(M_{x_0}) + B_W$. Для заданных $r \in \mathbb{R}_+$ и $\varepsilon > 0$ по предположению существует $e \in E_+$, $e \neq 0$ и $\delta > 0$, такие что

$$\sup_{|||x||| \leqslant r} |||T\pi x||| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для каждого порядкового проектора π, где $\|\pi e\| < \delta$. Для каждого $x \in V$ через π_x обозначим проектор на полосу $\{(|x| - \frac{r}{\delta} e)^+\}^{\perp\perp}$. В силу разложимости решеточной нормы найдутся такие x_1 и x_2, что

$$x = x_1 + x_2; \quad |x_1| = \pi_x |x|; \quad |x_2| = |x| - |x_1|.$$

Пусть $\varphi(x) := x_2$. Используя лемму 2.4 можем написать

$$(I - \pi_x)\varphi(x) = (I - \pi_x)x; \quad |||x||| \leqslant r \Rightarrow \|\pi_x e\| < \delta.$$

Если $|||x||| \leqslant r$, тогда $|||\varphi(x)||| \leqslant r$, так как $|\varphi(x)| \leqslant |x| \wedge \frac{r}{\delta} e$. Кроме того $\|\pi_x e\| < \delta$. Далее справедливы оценки

$$|||T\pi_x x||| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad |||T\pi_x \varphi(x)||| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$|||Tx-T\varphi(x)||| = |||T\pi_x x+T(I-\pi_x)x-T(I-\pi_x)\varphi(x)-T\pi_x\varphi(x)||| \leqslant |||T\pi_x|||+|||T\pi_x\varphi(x)||| < \varepsilon.$$

Следовательно найдется $u \in V$, такой что

$$T(D) \subset T(M_u) + \varepsilon B_W. \ \rhd$$

3.4. Теорема. *Пусть E, F — банаховы идеальные подпространства пространств измеримых функций $L_0(A_1, \Sigma_1, \nu)$ и $L_0(A_2, \Sigma_2, \mu)$, норма в E порядково непрерывна, X, Y — банаховы пространства и $E(X)$, $F(Y)$ — соответствующие пространства измеримых вектор-функций. Пусть $T \in M_U(V, W)$ — непрерывный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Для любого $r \in \mathbb{R}_+$ существует $e \in E_+$, $e \neq 0$, такое что, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ и*

$$(\forall x \in V) \quad (\forall \pi \in \mathfrak{Br}(V)) \quad (|||x||| \leqslant r;\ \|\pi e\| < \delta \Rightarrow |||T\pi x||| < \varepsilon)\,.$$

(2) *Для любого $r \in \mathbb{R}_+$ и для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ в $E(X)$, $|||x_n||| \leqslant r$; $n \in \mathbb{N}$, справедлива импликация*

$$|x_n - x| \to 0(\nu) \Rightarrow |||Tx_n - Tx||| \to 0.$$

$\lhd$ (1)$\Rightarrow$(2). Пусть $x \in V$, $r \in \mathbb{R}_+$, каждый член последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E(X)$ удовлетворяет $|||x_n||| \leqslant r$ и $|x_n - x| \to 0(\nu)$. Тогда для данного $\varepsilon > 0$ по предположению существует $e \in E_+$, $e \neq 0$ и $\delta > 0$, такие что $\sup_{|||x||| \leqslant r} |||T\pi x||| < \frac{\varepsilon}{3}$ для каждого порядкового проектора, удовлетворяющего неравенству $\|\pi e\| < \delta$. Пусть π и π_n проекторы на полосы $\{(|x| - \frac{a}{\delta}e)^+\}^{\perp\perp}$ и $\{(|x_n| - \frac{a}{\delta}e)^+\}^{\perp\perp}$ соответственно. Так как $|x_n - x| \to 0(\nu)$, то $|\varphi(x) - \varphi(x)| \to 0(\nu)$. Кроме того $|\varphi(x_n)| \leqslant \frac{r}{\delta}e$. Следовательно $|\varphi(x) - \varphi(x)| \to 0(\nu)$ в $E(X)$. Отсюда получаем, что $|||\varphi(x_n) - \varphi(x)||| \to 0$, когда $n \to \infty$. В силу непрерывности оператора T, найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такой что $|||T\varphi(x_n) - T\varphi(x)||| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $n_0 \geqslant n$. Используя те же аргументы, что и при доказательстве теоремы теоремы 3.3, приходим к неравенству

$$|||Tx_n - Tx||| < \varepsilon;\ \forall n \geqslant n_0.$$

Установим импликацию (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что утверждение (1) неверно. Тогда для любых $r \in \mathbb{R}_+$ и $e \in E_+$, $e \neq 0$ существуют $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in V$, такие что

$$|||T\pi x_0||| \geqslant \varepsilon;\ |||x_0||| \leqslant r; \forall \pi \in \mathfrak{Br}(V);\ \|\pi e\| < \delta;$$

В частности это должно выполняться, когда e — слабая порядковая единица в E, которая существует в данном пространстве согласно [6]. Мы можем найти такую последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset V$, где $|||x_n||| \leqslant r$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и последовательность проекторов $(\pi_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию $\lim\limits_{n\to\infty} \|\pi_n e\| = 0$ в то время как $|||T\pi_n x_n||| \geqslant \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Существует поседовательность $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ измеримых подмножеств A_1, таких что $\pi_n f = f\chi_{\Omega_n}$ для любых $f \in E_+$. Тогда $\|e\chi_{\Omega_n}\| \to 0$, $n \to \infty$ и $e\chi_{\Omega_n} \to 0(\nu)$, $n \to \infty$. Отсюда получаем, что $|\pi_n x_n| \to 0(\nu)$, $n \to \infty$. Теперь по предположению

$$\lim_{n\to\infty} |||T\pi_n x_n||| = 0.$$

Пришли к противоречию. $\rhd$

Замечание.Вопросы, рассмотренные в настоящей главе, привлекали внимание многих математиков. Так в частном случае, когда пространства со смешанными нормами совпадают с нормирующими решетками, результаты 3.1–3.4 совпадают с теоремами, установленными в работе [10]. Вопросам компактности нелинейных интегральных операторов, действующих в различных пространствах скалярных функций, уделено много внимания в [1]. Более современное изложение можно найти в [8].

Литература

1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П. и др.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—500 с.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
3. *Кусраев А. Г., Плиев М. А.* Ортогонально аддитивные операторы в решеточно нормированных пространствах // Владикавк. мат. журн.—1999.—Т. 1, вып. 3.—С. 33–43.
4. *Кусраев А. Г., Плиев М. А.* Слабое интегральное представление мажорируемых ортогонально аддитивных операторов // Владикавк. мат. журн.—1999.—Т. 1, вып. 4.—С. 22–39.
5. *Фетисов В. Г., Филиппенко В. И., Козоброд В. Н.* Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2006.
6. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D.* An Invitation to Operator Theory. Graduate Studies in Mathematics V. 50. AMS, 2002.
7. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—New York: Acad. Press, 1985.—xvi+367 p.
8. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators And Integro-Differential Equations.—New York: Marcel Dekker Inc, 2000.—560 p.
9. *Mazon J. M., Segura de Leon S.* Order bounded ortogonally additive operators // Rev. Roumane Math. Pures Appl.—1990.—V. 35, № 4.—P. 329–353.
10. *Mazon J. M., Segura de Leon S.* Uryson operators // Rev. Roumane Math. Pures Appl.—1990.—V. 35, № 5.—P. 431–449.

Статья поступила 7 мая 2005 г.

Плиев Марат Амурханович, к. ф.-м. н.
Институт прикладной математики и
информатики ВНЦ РАН и РСО-А
Владикавказ, 362027, РОССИЯ
E-mail: plimarat@yandex.ru