Владикавказский математический журнал
июль–сентябрь, 2007, Том 9, Выпуск 3

ГРИГОРИЙ ЯКОВЛЕВИЧ ЛОЗАНОВСКИЙ
(к 70-летию со дня рождения)

Григорий Яковлевич родился 29 ноября 1937 г. в Ленинграде (ныне Санкт-Петербург) в семье фармацевтов. Его яркая жизнь в математике оборвалась 17 ноября 1976 г. при следующих трагических обстоятельствах. За два дня до последней даты он был доставлен в одну из больниц Ленинграда с неверным диагнозом (гнойный аппендицит, вместо правильного — инфаркт миокарда). Вместо положенной в таких случаях ЭКГ (которая бы и установила правильный диагноз) его сразу положили на операционный стол. Хирург, не обнаружив каких бы то ни было признаков аппендицита, зашил больному живот и, не доложив никому об увиденном, бросил больного в общую палату. Назавтра ночью больному стало плохо, но во всей больнице не оказалось кислорода. И Григорий Яковлевич скончался.

Выдающиеся математические способности Г. Я. Лозановского проявились еще в школьные годы, в частности, он был победителем ряда математических Олимпиад. Успешно закончив Ленинградский университет в 1960 г., он сразу поступил в аспирантуру (научный руководитель — один из основателей Ленинградской школы упорядоченных пространств проф. Б. З. Вулих) и сразу начал интенсивную математическую деятельность. А с 1962 г. и до конца жизни Григорий Яковлевич преподавал математику в Военно-инженерной академии им. А. Ф. Можайского.

Перу Григория Яковлевича принадлежат 60 математических работ (45 из них были опубликованы при его жизни, и их список можно найти в некрологе [61]; остальные были опубликованы позже, причем 10 или 11 из них были закончены уже его друзьями, по исследованиям из его архива). Работ могло быть гораздо больше. Но, во-первых, часть его исследований все же так и не была никем завершена. Во-вторых, в связи с местом работы он не только совершенно не мог публиковаться за пределами СССР, но и не имел права общаться с зарубежными математиками. В третьих, он испытывал затруднения с публикацией своих результатов и внутри страны, так как его анкетные данные не соответствовали представлениям тогдашних идеологов Советского Союза об идеальном советском гражданине. Особенно это обстоятельство стало сказываться в последние годы жизни Г. Я. Лозановского. Именно, с самого конца 60-х годов по указанию свыше в центральных математических журналах стал вводиться следующий порядок: не рассматривать рукописи математиков без малой анкеты, заверенной в отделе кадров, в которой автор, в частности, должен был указать свои национальность и партийность. В результате Григорий Яковлевич получил несколько отказов из центральных журналов, очевидно, по не имеющим к математике основаниям (впрочем, в начале 70-х годов по иным причинам ухудшились возможности публикации и у большинства советских математиков). Например, в журнале «Математические заметки» была отклонена короткая изящная заметка о характеризации степенной функции в l^p с помощью функциональных неравенств [48]. Апофеозом в этом направлении стало прерывание в Сибирском математическом журнале серии превосходных работ Григория Яковлевича [17, 21, 27, 28] под смехотворным предлогом — слишком много работ одного автора на одну тему (может ли читатель представить, что таким бы образом прервалась в Proc. Nederl. Akad. Sci известная серия работ В. Люксембурга и А. Цаанена, состоящая из 17 статей). Г. Я. Лозановский лишился главного из центральных журналов, где он мог печатать развернутые статьи и был вынужден посылать свои работы во второразрядные и даже третьеразрядные журналы [44].

По двум последним причинам 41 работа Григория Яковлевича осталась опубликованной только на русском языке. О других причинах, по которым число работ Григория Яковлевича не стало бОльшим, будет сказано ниже.

Хотя Г. Я. Лозановский имел прекрасные результаты и в других разделах математики, но большая часть его работ относилась к ТВР — теории векторных решеток (ВР), в основном, к ТБР — теории банаховых решеток (БР).

К началу научной деятельности Григория Яковлевича ТБР была фактически лишь изолированным разделом ТВР, мало связанным с ТБП — теорией банаховых пространств (БП). Почти параллельно с ней начала развиваться ТБРИФ — теория банаховых решеток измеримых функций, долженствующая, по идее, быть разделом ТБР.

Математики, занимавшиеся ТБР, в своей деятельности никак не учитывали потребности ТБП и ТБРИФ. В то же время они почти беспристрастно взирали на регулярно появляющиеся результаты о тех или иных классах БП, являющихся БР, которые (результаты) на самом деле были частными результатами ТБР. Такое положение было неудовлетворительно. Одним из первых это понял Г. Я. Лозановский. А глубина и мощь его таланта были таковы, что благодаря влиянию работ Григория Яковлевича уже через некоторое время ТБР (включая ТБРИФ) фактически превратилась в отдельную ветвь функционального анализа, тесно сблизившись с ТБП и сохраняя связь с ТВР.

Нельзя здесь не отметить и значение работ ряда других математиков. По алфавиту: Т. Андо, И. Гальперин, Ж. Дьедоне, Г. Лоренц, В. Люксембург, П. Мейер-Ниберг, Х. Розенталь, Е. М. Семенов и некоторые другие математики Воронежской школы, А. Цаанен, Л. Цафрири, а также некоторые ученики Х. Шефера. Отдельные работы некоторых этих математиков даже предшествовали исследованиям Григория Яковлевича (впрочем, некоторые повторяли его ранее опубликованные результаты). Но роль Г. Я. Лозановского все же была наибольшей. Он первым понял необходимость того, что иногда называется синтезом ТБР и ТБП, наметил проблематику, в совершенстве овладел методами обеих теорий, разработал новые методы и решил очень многие естественные и важные задачи.

Напомним, что БР — это ВР, являющаяся БП с монотонной нормой ($|x_1| \leqslant |x_2| \Rightarrow \|x_1\| \leqslant \|x_2\|$). Для БП X через X' будет обозначаться его дуальное, для ВР X через $X^\sim$ будет обозначаться ее присоединенное — пространство регулярных функционалов. Если X — БР, то X' и $X^\sim$ совпадают как векторные пространства, если же учитывать и порядок и норму, то получим сопряженное X^*.

Были известны примеры БП, которые нельзя превратить в БР введя соответствующий порядок, даже с эквивалентной нормой. Г. Я. Лозановский в [25] показал, что таким же является любое подпространство в БП l^1, не имеющее безусловного базиса. С другой стороны, известно, что существуют такие БП, которые можно превратить в БР существенно разными способами. Классическим примером являются изометричные БР L^2 и l^2. В [16] Григорий Яковлевич нашел интересный пример на эту тему: БР l^∞ и пополнение по Дедекинду БР $C[0,1]$ изоморфны как БП (правда, не изометричны), также имея совершенно различные порядковые свойства.

Изложить в рамках этой статьи, что конкретно сделал Г. Я. Лозановский в ТБР совершенно невозможно: для этого потребуется, минимум, целая монография. Этим вопросам была посвящена развернутая статья [62] (но и ее рамки оказались чересчур тесными). Отсылая читателя к этой статье, проведем лишь соответствующие заголовки из [62] с небольшими комментариями. И все же упомянем некоторые результаты Григория Яковлевича, отраженные в [62], сделав кое-какие дополнения.

1. Немного истории и воспоминания.

2. Определения и обозначения.

3. Порядково непрерывные функционалы.

4. Структурная теория банаховых решеток и порядковая непрерывность нормы.

Здесь надо отметить, что фундаментальная работа [9] была послана в журнал с полноценными доказательствами (в ней среди прочего было доказано, что БР X является KB-пространством $\Leftrightarrow$ в X нельзя погрузить БП c_0 и что X рефлексивно $\Leftrightarrow$ в X нельзя погрузить ни c_0, ни l^1). Но редакция согласилась опубликовать ее лишь в виде краткой заметки. Что же касается другой заметки Г. Я. Лозановского в этом журнале, то по свидетельству рецензента, он получил рукопись из редколлегии с припиской, нельзя ли эту работу отклонить (!).

Приведем один из важнейших результатов Григория Яковлевича (он имеется в [62]).

Теорема. *Для БР X, являющейся K_σ-пространством, равносильны следующие утверждения.*

(a) *Норма в X порядково непрерывна.*

(в) *В X выполнено известное условие (u) Пелчинского.*

(c) *БП l^∞ нельзя погрузить в X.*

(d) *БП l^∞ нельзя погрузить в X в качестве векторной подрешетки.*

(e) *БП $C[0,1]$ нельзя погрузить в X.*

5. Нормы Фату и опорные порядково непрерывные элементы в банаховых решетках.

Напомним, что норма в ВР X называется нормой Фату или полунепрерывной, если из $0 \leqslant x_\alpha \uparrow x$ следует $\|x_\alpha\| \to \|x\|$. Элемент x называется опорно порядково непрерывным, если существует порядково непрерывный функционал φ такой, что $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$.

6. Топологические инварианты типа дизъюнктности.

Здесь под типом дизъюнктности произвольной ВР X понимается супремум мощностей множеств попарно дизъюнктных элементов из X. Если этот тип конечен или счетен, X называется ВР счетного типа. Приведем один частный результат Григория Яковлевича в этом направлении. Напомним, что норма в БР X называется секвенциально монотонно полной или нормой с секвенциальным свойством Леви, если из $0 \leqslant x_n \uparrow$ и $\sup \|x_n\| < +\infty$ следует, что (x_n) порядково ограничена. Среди прочего Г. Я. Лозановский доказал, что если X — БР с секвенциально монотонно полной нормой, являющаяся K-пространством, то X — счетного типа $\Leftrightarrow$ в БП X нельзя вложить БП $l^\infty(\Gamma)$ при несчетном множестве Γ.

Вообще Григория Яковлевича очень интересовали различные свойства в БР (или в некоторых классах БР), определяемые с помощью порядка, но допускающие характеризацию в чисто топологических терминах — так называемые (банаховые) изоморфно-инвариантные свойства [79]. К таковым относятся почти все результаты, указанные здесь в 4 об условиях БР X быть рефлексивной, быть KB-пространством, иметь порядково непрерывную норму. Информацию об инвариантно-изоморфных (а также об инвариантно-изометричных) свойствах БР, найденных Г. Я. Лозановским [63].

7. Преобразования банаховых решеток и пространства Кальдерона – Лозановского.

Здесь речь идет о преобразованиях банаховых решеток с помощью вогнутых функций. Надо сказать, что исследования Григория Яковлевича на эту тему не ограничились некоторыми — и даже многими — результатами, но создали целое направление.

Чаще Г. Я. Лозановский рассматривал БР, одновременно являющиеся K-пространствами. Но надо учесть, что если X — произвольная БР, а Y — ее порядковое пополнение, то как хорошо известно, банахову норму с X можно распространить и на Y, например, полагая

$$\|y\| = \inf\{\|x\| : x \in X, x \geqslant |y|\}$$

(впрочем, существуют и другие способы распространения нормы [14]). Таким образом, большинство результатов с соответствующими изменениями верны и для произвольных БР. Впрочем, эти результаты для случая произвольных БР выглядят не столь естественно, как для случая БР, являющихся K-пространствами. И выбор последнего случая просто свидетельствует о высоком вкусе Григория Яковлевича.

Из его результатов отметим лишь то, что он, обобщая шкалу пространств L^p, построил из данной БР X БР X^p $(1 < p < +\infty)$ и описал их сопряженные $(X^p)^*$, причем оказалось, что они (вместе с другими нечетными сопряженными) являются KB-пространствами, и что он построил $\varphi(X_1, X_2)$ для любых вогнутых функций φ и для любых БР X_1 и X_2, являющихся идеалами в одном и том же расширенном K-пространстве (сопряженное к $\varphi(X_1, X_2)$ им также описано).

Что же касается пространств Кальдерона – Лозановского, то скажем лишь, что даже через 30 лет после кончины последнего регулярно появляются работы, посвященные этим пространствам и развивающие результаты Г. Я. Лозановского.

8. Факторизация, пространства Марцинкевича и выпуклые множества, замкнутые по мере.

Здесь, в частности, есть некоторые результаты о пространствах Марцинкевича, а также о пространствах Орлича. Но необходимо сказать, что Григория Яковлевича вообще интересовали конкретные БР, особенно БР измеримых функций, в частности, пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича, пространства со смешанной нормой. Необходимо подчеркнуть, что его исследования этих БР и сопряженных к ним опирались на общие теоремы в ТБР, большинство которых он сам и получил.

Теперь коснемся некоторых исследований в ТБР Г. Я. Лозановского, не отраженных в [62].

Хорошо известен результат Р. Филипса о несуществовании проектора из БП l^∞ на БП c_0. Григорий Яковлевич дал широкое обобщение этого результата и последующих его обобщений. Именно он показал, что если X — БР, являющаяся K-пространством, Z — замкнутый идеал в X с порядково непрерывной нормой, не являющийся полосой в X, то не существует проектора из X на Z [12]. В качестве следствия этого результата он доказал, что если X само имеет порядково непрерывную норму, но не является KB-пространством, то БП X не изоморфно W' ни для какого БП W. Упомянутый результат из [12] применим к случаю $Z = X_{(A)}$, где $X_{(A)}$ — наибольший идеал в X с порядково непрерывной нормой [43]. Также изучалось строение $X_{(A)}$ в любой БР X. Кроме того он установил, что если $Y = X/X_A$, то $Y_{(A)} = \{0\}$ и вдобавок нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы норма в Y была секвенциально порядково непрерывна (ранее были известны лишь отдельные примеры таких БР $Y = X/X_{(A)}$, важнейший из них — именно $X = l^\infty$, $Y = X/c_0$).

Ранее уже говорилось о банаховых свойствах БР X, необходимых и достаточных для рефлексивности X. Но Г. Я. Лозановский нашел и ряд соответствующих порядковых свойств. Например, он доказал, что такими являются каждое из двух следующих свойств: а) $X^{\sim\sim\sim}$ счетного типа; в) в $X^{\sim\sim}$ и в $X^{\sim\sim\sim}$ есть порядковые единицы [13, 19].

В работе [31] было показано, что если X — БР, то

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sup\left[\frac{\|x_1 \vee \ldots \vee x_n\|}{n} : x_i > 0, \|x_i\| = 1, x_i \wedge x_k = 0\right]\right\} = 0 \text{ или } 1,$$

причем если этот предел есть 0, то все нечетные сопряженные к X суть KB-пространства.

Григория Яковлевича интересовали не только порядково непрерывные функционалы (напомним, что БР X имеет порядково непрерывную норму $\Leftrightarrow X^* = X_n^*$, где X_n^* — совокупность всех ограниченных порядково непрерывных функционалов), но и функционалы им дизъюнктные — так называемые антинормальные функционалы. В БР X их множество обозначается X_{ant}^*. Частным случаем антинормального функционала является сингулярный функционал, т. е. функционал, аннулирующийся на некотором фундаменте (порядково плотном идеале) в X. Их множество обозначается X_s^*. Для примера: если $X = C[0,1]$, то $X^* = X_{ant}^*$, а всякий точечный функционал сингулярен. Для любой БР X_s^* есть фундамент в X_{ant}^*.

В [56] Г. Я. Лозановский получил ряд глубоких результатов об X_{ant}^*. В частности, он показал, что если БР X является K_σ-пространством, но норма в X не является порядково непрерывной, то в X_{ant}^* существует такая замкнутая векторная подрешетка L, что а) L порядково (и топологически) изоморфно $(l^\infty)^*$, L замкнуто в X^* в топологии $\sigma(X^*, X)$ и с) существует фундамент в X, на котором аннулируются все элементы из L (в частности $L \subset X_{ant}^*$). Кроме того, X_{ant}^* не рефлексивна и ее тип дизъюнктности $\geqslant 2^c$. Там же исследовалась БР $(X_{ant}^*)_n^*$.

Григорий Яковлевич ввел понятие локализованного функционала. Функционал $f \in X^*$ называется локализованным, если в булевой алгебре всех полос в X существует плотный идеал $Z(f)$, на каждом элементе которого f аннулируется. Совокупность всех локализованных функционалов в БР X обозначается X_{loc}^*. Г. Я. Лозановский установил, что X_{loc}^* есть фундамент в X_{ant}^*. $f \in X^*$ называется функционалом счетного типа, если главный идеал в X^*, порожденный этим f имеет счетный тип. В [34] доказано, что если $f \in X_s^*$ и счетного типа, то $f \in X_{loc}^*$ (обратное неверно). Здесь же указаны необходимые и достаточные условия, когда каждый $f \in X^*$ для БР, являющейся K_σ-пространством, дискретен или наоборот непрерывен (в смысле ТВР) [54]. Кстати, работа [34] первоначально была направлена в другой журнал, но один «надутый» математик из редколлегии наложил вето на эту работу (остальные были «за»).

В работе [45] решался вопрос о существовании единственного линейного оператора продолжения непрерывных функционалов из подпространства Y БР измеримых функций X на все X, т. е. оператора $A : Y^* \to X^*$ сохраняющего нормы всех функционалов ($\|Af\| = \|f\|$), и был приведен пример нелинейного оператора продолжения.

Конечно, Григория Яковлевича интересовали и операторы, действующие между БР. Кроме вопроса об интерполяции в пространствах Кальдерона — Лозановского у него имеется и ряд других результатов об операторах в БР ([4, 6, 36] и др.). В его архиве есть много начатых исследований о таких операторах (интересно, что у него есть работа, целиком посвященная операторам в БП [38]). Но все же Г. Я. Лозановский просто не успел приступить к фундаментальным исследованиям в общей теории операторов в БР.

Многие результаты Г. Я. Лозановского (упомянутые в [62] и здесь или не упомянутые) относились не только к БР, но и к более общему случаю нормированных решеток, а зачастую (с соответсвующими оговорками) и к ВР. Здесь также необходимо упомянуть хотя бы о некоторых результатах, относящихся именно к общей теории ВР. Упомянем лишь о двух важнейших исследованиях.

Григорию Яковлевичу удалось построить общую реализацию всех $Y^{\sim}$ для любых ВР Y, являющихся идеалами в одном расширенном K-пространстве X [15, 24]. При этом оказалось, что для любых двух таких Y_1 и Y_2 естественным образом определяется понятие дизъюнктности функционалов $f_i \in Y_i^{\sim}$. До первой из этих работ едва ли какой математик мог подумать, что такая общая реализация возможна.

Г. Я. Лозановскому с помощью обычных реализаций удалось решить вопрос о функциях (от n аргументов) от элементов ВР [29]. Например, он показал, что расширенное K-пространство с единственной единецей замкнуто относительно всех бэровских функций и что любая ВР (полная относительно сходимости с регулятором) замкнута относительно любых однородных непрерывных функций. К сожалению, работа [29] осталась неизвестной на Западе, и в дальнейшем там появлялись очень частные результаты результатов из [29].

В 1965 г. Г. Я. Лозановский защитил кандидатскую диссертацию «Некоторые вопросы теории нормированных и счетно-нормированных структур».

В 1972 г. Григорий Яковлевич успешно защитил докторскую диссертацию (это вторая диссертация в СССР, соответствующая хабилитации) «Банаховы структуры и их преобразования». Это была превосходная работа, по своему уровню превосходящая все требования высшей аттестационной комиссии к докторским диссертациям. Но по идеологическим пристрастиям ВАК не желал пропустить эту диссертацию. Не имея возможности к чему-либо придраться (диссертация получила несколько положительных отзывов), он посылал ее на новые отзывы, а то и держал без движения. После кончины Г. Я. Лозановского ВАК закрыл дело.

Григорий Яковлевич занимался математикой каждый день, без всяких исключений. Даже на пляже и в филармонии он размышлял над математическими задачами. Кругозор и объем знаний Г. Я. Лозановского были чрезвычайно велики. Он часто давал ответы на вопросы, которые ставили перед ним математики, занимавшиеся совсем другими вещами, но не могущие сами найти ответы (среди этих математиков были и достаточно известные). Но давая ответы на подобные вопросы, он никогда не разрешал ставить себя в качестве соавтора статей, написанных, в частности, на основе его ответов. К сказанному хочу добавить историю появления на свет моей заметки [64].

В октябре 1972 г. Григорий Яковлевич сообщил мне о работе Цафрири [65]. В этой работе содержался ряд результатов о БР с порядково непрерывной нормой, полученные ранее самим Г. Я. Лозановским. Только на часть из них ссылки были. Но дело даже не в этом. Принципиально было то, что в цитированной статье результаты были доказаны для так называемых банаховых циклических пространств, а потом уже переносились на указанные БР. Григорий Яковлевич сказал мне, что по его прикидке банахово циклическое пространство можно превратить в БР с порядково непрерывной нормой чисто алгебраическим методом из одной моей работы, притом довольно просто. Если бы было так, то и результаты цитированной статьи о банаховых циклических пространствах были бы следствиями более ранних результатов Г. Я. Лозановского.

Я быстро убедился в правоте Григория Яковлевича. Добавив к этому (не без его советов) еще несколько результатов о превращении БП в БР, я написал заметку от имени двух авторов (черновик имеется в моем архиве). Но Г. Я. Лозановский в самой категорической форме отказался от соавторства и был непреклонен, несмотря на все уговоры. Теперь теорема, о которой сказал мне Григорий Яковлевич, именуется на Западе Теоремой Шефера, который получил ее позже сложным путем (сам Шефер мое письмо и оттиск в свое время получил и сообщил мне, что не знал ранее о моей работе).

Результаты, лежащие близко от поверхности, даже имеющие интересную формулировку, но мимо которых все проходили, Г. Я. Лозановский в своих работах никогда специально не формулировал и в доказательствах пользовался как известными. Это же самое относилось и к следствиям из основных его результатов, если они не были чересчур уж трудными, даже если их формулировки были весьма выигрышными для автора.

В своих работах он не гонялся за общностью, говоря, что это просто, это видно из доказательства или, что каждый кому будет нужно обобщит результат сам. В итоге, иногда появлялись работы, где эти обобщения производились, и приходилось делать ссылки именно на эти работы, а не на пионерскую работу Григория Яковлевича.

Следует отметить, что через некоторое, иногда очень короткое, время, после того, как получал новый результат, он мог говорить, что «это хорошо известно» и так и писать в своих работах о результатах, известных только ему самому. Читая работы других математиков, Григорий Яковлевич мог попутно получить результаты, которых там не было, и приписывал их этим математикам. Вот один пример.

Известен следующий критерий топологической полноты нормированной решетки: она является БР, если всякая монотонно возрастающая последовательность Коши имеет предел (или супремум). Г. Я. Лозановский пользовался им в начале июля 1964 г., убедив меня и нашего общего учителя проф. Б. З. Вулиха в том, что этот критерий получен И. Амемией еще в 1953 г. [24]. Уже после смерти Григория Яковлевича я прочитал работу И. Амемии и с изумлением увидел, что ничего подобного там нет. Надо отметить, что в 1965 г. этот критерий был опубликован В. Люксембургом (а вот ссылка последнего о том, что этот же критерий впервые был опубликован в более ранней его работе с И. Гальпериным, неверна: там имеется другой критерий, кстати, ошибочный).

В архиве Г. Я. Лозановского среди прочего оказалось чрезвычайно большое число рукописей, как законченных, так и начатых или доведенных до какого-то состояния. Его друзья разобрали эти рукописи и, как уже говорилось выше, часть из них была опубликована после той или иной доработки. Но осталось еще 25 записных книжек, которые заполнялись, кажется, когда он был вне дома. В книжках содержались написанные им 2223 пункта. Лишь минимальное число из них не относилось к математике. В целом эти книжки — настоящий кладезь идей, доказательств тех или иных результатов (или набросков таких доказательств), вопросов, замечаний и т. п. Хотя часть идей уже реализована, часть результатов опубликована, эти книжки и сейчас — через три десятилетия после ухода их автора из жизни — представляют большую математическую ценность, и не только в историческом плане. Ценность каждой книжки есть монотонно возрастающая функция от ее номера. К настоящему моменту опубликовано лишь 3 книжки, содержащие 609 пунктов [67]. Представляется в высшей степени целесообразным публикация остальных книжек. Приведем пример из ранней книжки № 2.

В п. 439 (относящемуся самое позднее к 1962 г.) приведена с доказательством характеризация секвенциально порядково непрерывного функционала в ВР $C(K)$ на компакте K в терминах носителя соответствующей меры. На семинаре Б. З. Вулиха результат считался известным и несколько раз упоминался в математических работах (см. хотя бы [63]). Лишь после смерти Григория Яковлевича мы узнали, что автором этого результата является он. А в 1994 г. этот результат в качестве нового был опубликован Шефером и Жангом.

В заключение отметим, что здесь были использованы некоторые факты из [66].

А. И. Векслер

Посмертные работы Г. Я. Лозановского

Работы [1–45] см. в [61].

46. *Лозановский Г. Я.* О счетности типа в банаховых решетках // Функц. анализ.—Ульяновск, 1977.—Вып. 8.—С. 84–93.

47. *Лозановский Г. Я., Бухвалов А. В.* О замкнутых по мере множествах в пространстве измеримых функций // Тр. Моск. мат. о-ва.—1977.—Т. 34.—С. 129–150.

48. *Лозановский Г. Я.* Характеризация степенной функции посредством степенных неравенств // Качеств. и приближ. методы исслед. операторн. уравнений.—Ярославль, 1977.—Т. 2.—С. 162–165.

49. *Лозановский Г. Я.* О представлении линейных функционалов в пространстве Марцинкевича // Изв. вузов. Сер. мат.—1978.—№ 1.—С. 43–53.

50. *Лозановский Г. Я.* Преобразования банаховых идеальных пространств с помощью вогнутых функций // Качеств. и приближ. методы исслед. операторн. уравнений.—Ярославль, 1978.—Т. 3.—С. 122–148.

51. *Лозановский Г. Я.* О сопряженном пространстве к банаховой решетке // Теория функций, функц. анализ и их прил.—Харьков, 1978.—Т. 30.—С. 85–90.

52. *Лозановский Г. Я.* О преобразовании банаховых решеток измеримых функций // Изв. вузов. Сер. мат.—1978.—№ 5.—С. 84–86.

53. *Лозановский Г. Я.* Банаховы решетки и примарные множества компактов // Функц. анализ.—1978.—Вып. 10.—С. 106–113.

54. *Лозановский Г. Я.* О дискретных функционалах в пространствах Марцинкевича и Орлича // Исслед. по теории функций многих веществ. переменных.—1978.—Т. 2.—С. 132–147.

55. *Лозановский Г. Я., Роткович Г. Я.* Одна теорема о вогнутых функциях // XXXI Герценовские чтения. Нелинейный функц. анализ и теория приближения функций.—Ленинград, 1978.—С. 22–25.

56. *Лозановский Г. Я.* О пространстве антинормальных функционалов // Мат. заметки.—1978.—Т. 26.—С. 427–435.

57. *Лозановский Г. Я.* О порядковой сепарабельности K-пространств // Применение функц. анализа в теории приближ.—Калинин, 1978.—Вып. 10.—С. 106–113.

58. *Лозановский Г. Я.* О комплексном методе интерполяции в банаховых решетках измеримых функций // Проблемы мат. анализа, краевые задачи. Спектральная теория.—Ленинград, 1979.—Вып. 7.—С. 83–89.

59. *Лозановский Г. Я., Бухвалов А. В., Векслер А. И.* Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 2.—С. 137–183.

60. *Lozanovsky G. Ja., Abramovich Ju. A.* Three new cardinal invariants for normed lattices // Proc. Royal. Irish. Akad.—1990.—V. 90A, № 2.—P. 191–200.

61. *Лозановский Г. Я., Бухвалов А. В., Векслер А. И., Владимиров Д. А., Вулих Б. З., Канторович Л. В., Лозинский С. М., Семенов Е. М.* Некролог // Успехи мат. наук.—1978.—Т. 33, № 1.—С. 199–202.

62. *Abramovich Ju. A., Veksler A. I.* G. Ja. Lozanosky: His contributions to the theory of Banach lattices // Lecture Notes in Pure and Appl.—New York: Math. Marcel Dekker, 2000.—V. 213.—P. 5–21.

63. *Лозановский Г. Я., Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А.* Нормированные решетки // Итоги науки. Мат. анализ.—М., 1980.—Т. 18.—С. 125–184.

64. *Векслер А. И.* Банаховы циклические пространства и банаховы структуры // Докл. АН СССР.—1973.—Т. 213, № 4.—С. 770–773.

65. *Tzafriri L.* Reflexivity in Banach lattices and their subspaces // J. Funct. Anal.—1972.—V. 10, № 1.—P. 1–18.

66. *Lozanovskaya R.* G. Ja. Lozanovsky: His life // Lecture Notes in Pure and Appl.—New York: Math. Marcel Dekker, 2000.—V. 213.—P. 1–4.

67. *Odyniec W., Wojtovicz M., Veksler A.* Lozanovsky's Note-books. Part 1, problems 4-609.—Zielona Gora, 2000.—P. I–XII, 1–144.