Владикавказский математический журнал
апрель–июнь, 2007, Том 9, Выпуск 2

УДК **517.98**

ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ТИПА BMO, ДИАГОНАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ И ОГРАНИЧЕНННОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Р. Ф. Шамоян

Распространены (в различных направлениях) некоторые известные ранее характеризации аналитических классов Бесова и неравенства для рациональных функций, дополнены утверждения о диагональном отображении новой теоремой, обобщены классы $F_s^{p,q}$ теоремы о действии операторов типа Чезаро.

Ключевые слова: интегральные операторы Чезаро, голоморфные пространства Лизоркина — Трибеля, классы Харди.

Основная цель настоящей заметки распространить результаты о характеризациях типа BMO классов Бесова и Блоха, полученные в [1, 2], дополнить утверждения об оценках рациональных функций и известные результаты о диагональном отображении из [3, 8], а также обобщить на голоморфные пространства Лизоркина — Трибеля недавно полученные утверждения об ограниченности операторов типа Чезаро из [4].

Для формулировки теорем, установленных нами, введем стандартные обозначения. Всюду ниже $\mathbb{D}$ — круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, T — его граница, $T = \{z : |z| = 1\}$. $H^p(\mathbb{D})$ — класс Харди [5], $H_t^p(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D}) : ||\widetilde{D}^t f||_{H^p} < \infty\}$, где $H(\mathbb{D})$ — класс всех голоморфных в D функций, $t \in \mathbb{R}$, $0 < p \leqslant \infty$, $(\widetilde{D}^t f)(z) = \sum\limits_{k\geqslant 0}(k+1)^t a_k z^k$, $t \in \mathbb{R}$, $f(z) = \sum\limits_{k\geqslant 0} a_k z^k$. Легко видеть $(\widetilde{D}f)(z) = (zf(z))'$. Всюду ниже B_p^α — аналитические пространства Бесова [11]:

$$B_p^\alpha = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{B_p^\alpha}^p = \int\limits_{\mathbb{D}} \left|\widetilde{D}^t f(z)\right|^p (1-|z|)^{(t-\alpha)p-1}\, dm_2(z) < \infty \right\},$$

где α, t, $p \in \mathbb{R}$, $t > \alpha$, $0 < p < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $t + 1 < p < \infty$, $(s-\alpha)p = 1 + \beta + \gamma$, $t < 1$, $s \geqslant \alpha + 1$, $\beta, \gamma > 0$, причем $t = \beta$ или $t = \gamma$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $f \in B_p^\alpha$;

2) $J = \int\limits_{\mathbb{D}}\int\limits_{\mathbb{D}} \left|\frac{(\widetilde{D}^{s-1}f)(z)-(\widetilde{D}^{s-1}f)(w)}{z-w}\right|^p (1-|z|)^{\beta-1}(1-|w|)^{\gamma-1}\, dm_2(z)\, dm_2(w) < \infty$.

$\lhd$ 2) $\Rightarrow$ 1): Основная идея — привлечь диагональное отображение. Действительно, импликация 2) $\Rightarrow$ 1) — непосредственное следствие теоремы о диагональном отображении, доказанной в [8]. Функция G, где

$$G(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z \neq w, \\ f'(z), & z = w \end{cases}$$

— аналитическая функция в бидиске в $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D}\times\mathbb{D}$ [8], а теорема о диагональном отображении утверждает [8, 14], что $\operatorname{Diag} A^p_\alpha(\mathbb{D}^n) = A^p_{\alpha n+2n-2}(\mathbb{D})$, где $\operatorname{Diag} f = f(z,\ldots,z)$, $\alpha>1$, $0<p<\infty$, $n\in\mathbb{N}$, а A^p_α ($A^p_\alpha = B^\beta_p$, $\alpha=-\beta p-1$, $\beta<0$) — классы Бергмана. Для доказательства обратной импликации нам понадобятся несложные операции с формулой проекции Бергмана.

Следующее равенство выводится непосредственно из формулы проекции Бергмана [8]:

$$|F(z,w)| = \left|\frac{\widetilde{D}^{s-1}f(z)-\widetilde{D}^{s-1}f(w)}{z-w}\right| =$$
$$= C(V)\left|\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{\widetilde{\widetilde{D}}^{V+1}\widetilde{D}^{s-1}f(\widetilde{w})(1-|\widetilde{w}|)^V\,\overline{\widetilde{w}}}{\left(1-\overline{\widetilde{w}}z\right)\left(1-\overline{\widetilde{w}}w\right)}\,dm_2(\widetilde{w})\right| \tag{1}$$
$$\left(\left(\widetilde{\widetilde{D}}^S f\right)(z) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{\Gamma(k+s+1)}{\Gamma(k+s)}a_k z^k\,, \quad f=\sum_{k\geqslant 0}a_k z^k\right).$$

Для достаточно большого t и V, близкого к -1, $V>-1$, имеем:

$$\left|\widetilde{\widetilde{D}}_z^{t+1}\widetilde{\widetilde{D}}_w^{t+1}F(z,w)\right|^p = C(V)\left|\int\limits_{\mathbb{D}}\frac{\widetilde{\widetilde{D}}^{V+1}\widetilde{D}^{s-1}f(\widetilde{w})(1-|\widetilde{w}|)^V\,\overline{\widetilde{w}}}{\left(1-\overline{\widetilde{w}}z\right)^{t+2}\left(1-\overline{\widetilde{w}}z\right)^{t+2}}\,dm_2(\widetilde{w})\right|^p \tag{2}$$

и

$$J_1 = \int\limits_{\mathbb{D}}\int\limits_{\mathbb{D}}\left|\widetilde{\widetilde{D}}_z^{t+1}\widetilde{\widetilde{D}}_w^{t+1}F(z,w)\right|^p(1-|z|)^{(1+t)p+\beta-1}\times$$
$$\times(1-|w|)^{(1+t)p+\gamma-1}\,dm_2(z)dm_2(z)\leqslant$$
$$\leqslant C\int\limits_{\mathbb{D}}\int\limits_{\mathbb{D}}\int\limits_{\mathbb{D}}\left(\left|\widetilde{D}^{V+s}f(\widetilde{w})\right|^p(1-|z|)^{Vp}(1-|w|)^{p(t+1)+\gamma-1}(1-|z|)^{\beta-1+p(t+1)-\varepsilon p}\right)\Big/$$
$$\left(\left|1-\overline{\widetilde{w}}\right|^{tp+2-\varepsilon p}\left|1-\overline{\widetilde{w}}w\right|^{(t+2)p}\right)dm_2(\widetilde{w})\,dm_2(z)dm_2(w)\leqslant \tag{3}$$
$$\leqslant C\int\limits_{\mathbb{D}}\left|\widetilde{D}^{V+s}f(\widetilde{w})\right|^p(1-|\widetilde{w}|)^{(s-\alpha)p-1+Vp}\,dm_2(\widetilde{w})\,,$$

в силу известных оценок

$$\left(\int\limits_{\mathbb{D}}\frac{|f(w)|(1-|w|)^V\,dm_2(w)}{|1-\bar{w}z|^\alpha\,|1-\bar{w}z_1|^{2+\beta}}\right)^p\leqslant$$
$$\leqslant C\int\limits_{\mathbb{D}}\frac{|f(w)|^p(1-|w|)^{Vp}(1-|z_1|)^{-\varepsilon p}\,dm_2(w)}{|1-\bar{w}z|^{p\alpha}\,|1-\bar{w}z_1|^{-\varepsilon p+2+\beta p}},\quad p>1,\ \alpha,\beta>0; \tag{4}$$

$$\int\limits_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|)^u\,dm_2(w)}{|1-\overline{w}z|^\gamma}\leqslant\frac{C}{(1-|z|)^{\gamma-u-2}}, \tag{5}$$

где $u > -1$, $\gamma > u + 2$, z, $z_1 \in \mathbb{D}$, $\varepsilon > V$,

$$\left(\int\limits_{\mathbb{D}} |f(w)|\,(1-|w|)^{\alpha}\,dm_2(w)\right)^{p} \leqslant C\int\limits_{\mathbb{D}} |f(w)|^{p}\,(1-|w|)^{\alpha p+2p-2}\,dm_2(w),\ p \leqslant 1, \qquad (6)$$

приведенных, например, в [7, 8, 17, 19].

Остается применить известную теорему Харди — Литтлвуда о действии производной в пространствах Бергмана, точнее ее вариант для дробной производной, легко выводимый из классической теоремы Харди — Литтлвуда [5, с. 81] слева и справа в (3):

$$J \leqslant cJ_1 \leqslant c_1\|f\|^{p}_{B^{\alpha}_{p}}.$$

Меняя в (4) z и z_1, мы восстановим симметрию в индексах. $\rhd$

Замечание 1. Теорема 1 распространяет в двух направлениях утверждение, установленное в [2, теорема 3]. Рассуждение, приведенное в [2] — доказательство характеристики типа BMO (инвариантных относительно преобразования Мебиуса) классов $B^{\frac{1}{p}}_{p}$, $p > 2$ в части необходимости и в части достаточности существенно использует свойства этого преобразования. Наши рассуждения, на наш взгляд, существенно проще.

Замечание 2. Приложения различных характеристик типа BMO классов Бесоа известны [9, 10, 22].

Замечание 3. Если $\alpha = 1/p$, $p > 2$, $s = 1$, $\beta = \gamma = p/2 - 1$, то мы получаем в точности теорему, установленную в работе [2].

Подход, основанный на диагональном отображении, позволяет доказывать различные утверждения подобного рода. Следующая теорема распространяет результат из [1], где получен частный случай теоремы 2 при $\beta = 1$, $\alpha = 1$.

Теорема 2. *Пусть $0 < \alpha < 1$, t, $V \geqslant 0$, $t + V = \alpha$, β — любое действительное число,*

$$A^{\infty,\infty}_{\alpha,\beta} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{r\in(0,1)} M_{\infty}\left(\widetilde{D}^{\beta} f, r\right)(1-r)^{\alpha} < \infty \right\}.$$

Тогда $f \in A^{\infty,\infty}_{\alpha,\beta}$ если и только, если

$$S = \sup_{r,R}\ \sup_{|w|=r,\,|z|=R} \left| \frac{\left(\widetilde{D}^{\beta-1} f\right)(w) - \left(\widetilde{D}^{\beta-1} f\right)(z)}{z-w} \right| (1-R)^{t}\,(1-r)^{V} < \infty. \qquad (7)$$

$\lhd$ Достаточность условия (7) тривиальна (при этом надо учесть, что

$$(Df)(z) = (zf(z))' = zf'(z) + f(z)).$$

Для доказательства необходимости мы снова воспользуемся равенством (1).

Имеем

$$
\begin{aligned}
J = \sup_{|z|}\sup_{|w|}\left((1-|z|)^{t_1+t}(1-|w|)^{t_2+V}\right)\left|\widetilde{\widetilde{D}}{}_w^{t_1}\widetilde{\widetilde{D}}{}_z^{t_2}\left(\frac{\widetilde{D}^{\beta-1}f(z)-\widetilde{D}^{\beta-1}f(w)}{z-w}\right)\right| \leqslant \\
\leqslant c(V)\sup_{|z|,\,|w|}\left|\int\limits_{\mathbb{D}}\frac{\widetilde{D}^{\widetilde{V}+\beta}f(\widetilde{w})(1-|\widetilde{w}|)^{\widetilde{V}}\,\overline{\widetilde{w}}}{\left(1-\overline{\widetilde{w}}z\right)^{t_2+1}\left(1-\overline{\widetilde{w}}w\right)^{t_1+1}}dm_2(\widetilde{w})\right|(1-|z|)^{t_1+t}(1-|w|)^{V+t_2} \leqslant \\
\leqslant \left(\sup_{|z|,\,|w|,\,|\widetilde{w}|<1} M_\infty\left(\widetilde{D}^{\widetilde{V}+\beta}f,\,|\widetilde{w}|\right)(1-|\widetilde{w}|)^{\widetilde{V}+\alpha}\right)\times \\
\times\int\limits_{\mathbb{D}}\frac{(1-|\widetilde{w}|)^{-\alpha}(1-|z|)^{t_1+t}(1-|w|)^{V+t_2}}{\left|1-\overline{\widetilde{w}}z\right|^{t_2+1}\left|1-\overline{\widetilde{w}}w\right|^{t_1+1}}dm_2(\widetilde{w}) = S
\end{aligned}
\tag{8}
$$

($t+V=\alpha$, $\widetilde{V}$ — достаточно большое число). Учитывая оценку (8) и оценку последнего интеграла [7], получим

$$
S \leqslant \frac{(1-|z|)^t(1-|w|)^V}{|1-\bar{z}w|^t\,|1-\bar{z}w|^V} \leqslant \mathrm{const},
$$

$0<t_2+\alpha<1$, $0<t_1+\alpha<1$, $t_1+t_2+\alpha>0$ (мы на последнем шаге использовали теорему Харди — Литтлвуда о действии производной [5, с. 87] справа и слева в (8)).

Замечание 4. Аналогичные утверждения можно вывести и для производных (обычных) $f^{(n)}(z)$. Но доказательства этих предложений технически несколько сложнее.

Подобный подход можно использовать и для классов функций с «нестандартной» квазинормой. Здесь снова (по крайней мере) половина критерия будет получена, если будет установлена надлежащая теорема о диагональном отображении. Ниже мы покажем это на примере пространств

$$
D^V T^p_{\alpha,\beta} = \left\{f\in D^V \,:\, f\in T^p_{\alpha,\beta}\right\},
$$

где $\alpha>0$, $\beta>-1$

$$
T^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}) = \left\{f\in H(\mathbb{D})\,:\,\sup_{\rho\in(0,1)}(1-\rho)^\alpha\left(\int\limits_{\mathbb{D}}|f(\rho R\xi)|^p(1-R)^\beta\,dm_2(R\xi)\right)^{1/p}<\infty\right\}.
$$

Определение 1 [8]. Пусть $H(\mathbb{D}^n)$ — пространство всех голоморфных в полидиске $\mathbb{D}^n$ функций, $\mathbb{D}^n=\{z=(z_1,z_2,\dots,z_n),\,|z_j|<1,\,j=1,\dots,n\}$, $X\subset H(\mathbb{D}^n)$ — подпространство $H(\mathbb{D}^n)$. Скажем, что след класса X на диагонали поликруга совпадает с Y, $Y\subset H(\mathbb{D})$, Y — подпространство $H(\mathbb{D})$, если для любой функции $f\in X$ $f(z,\dots,z)\in Y$ и для любой функции $g\in Y$ существует функция $G\in X$, такая, что $G(z,\dots,z)=g(z)$. При этом будем использовать обозначение $\operatorname{Diag}X=Y$. Задача о диагональном отображении в $H^p(\mathbb{D}^n)$ рассматривалась многими авторами [8, 14].

Незначительно модифицируя доказательство из [8] (рассуждения следует применять к функциям f_ρ, g_ρ, $\rho\in(0,1)$), нетрудно установить следующий результат.

Предложение C. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$. *Тогда*

$$\operatorname{Diag} A^{p,\infty}_{\alpha} = T^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) \,:\, \sup_{\rho\in(0,1)} (1-\rho)^{\alpha} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_{\mathbb{D}} |f(\rho R\xi)|^p (1-R)^{\beta} R\, dR\, dm(\xi) \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad \beta = n-2,\ n > 1.$$

$$A^{p,\infty}_{\alpha} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}^n) \,:\, \sup_{r\in(0,1)} M_p(f,r)(1-r)^{\alpha} < \infty \right\},$$

$M_p(f,r) = M_p(f,r,\ldots,r)$, $0 < p < \infty$, $\alpha \geqslant 0$.

Из предложения C следует оценка ($|w| = |z| = r$)

$$\sup_{\rho\in(0,1)} (1-\rho)^{\alpha} \left(\int_{\mathbb{D}} \left| \widetilde{D}^{\beta} f(\rho R\xi) \right|^p R\, dR\, dm(\xi) \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c \sup_r \left(\int_{T^2} \left| \frac{\left(\widetilde{D}^{\beta-1} f\right)(z) - \left(\widetilde{D}^{\beta-1} f\right)(w)}{z-w} \right|^p dm(\xi)\, dm(\varphi) \right)^{1/p} (1-r)^{\alpha}.$$

Обратная оценка выводится как и выше из (1)–(3) путем несложных преобразований. Пусть $p \leqslant 1$, $t_1, t_2 > 0$, t_1, t_2 — достаточно большие положительные числа. Тогда из (1) и (6) имеем

$$(1-\rho)^{p\alpha+(t_1+t_2)p} \int_{T^2} \left| \widetilde{\widetilde{D}}^{t_1} \widetilde{\widetilde{D}}^{t_2} \frac{\widetilde{D}^{\beta-1} f(\rho\xi) - \widetilde{D}^{\beta-1} f(\rho\varphi)}{\rho\varphi - \rho\xi} \right|^p dm(\xi)\, dm(\varphi) \leqslant$$

$$\leqslant c(V) \int_{T^2} \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{\left| \widetilde{D}^{V+\beta} f(\rho\widetilde{w}) \right| (1-|\widetilde{w}|)^V |\widetilde{w}|\, dm_2(\widetilde{w})}{\left|1-\overline{\widetilde{w}}\rho\varphi\right|^{t_1+1} \left|1-\overline{\widetilde{w}}\rho\xi\right|^{t_2+1}} \right)^p (1-\rho)^{p\alpha+(t_1+t_2)p} dm(\xi)\, dm(\varphi) \leqslant M.$$

Применив дважды теорему Харди — Литтлвуда [5, с. 87], получим

$$M \leqslant c(V) \int_{\mathbb{D}} \frac{\left| \widetilde{D}^{V+\beta} f(\rho\widetilde{w}) \right|^p (1-|\widetilde{w}|)^{Vp+2p-2} dm_2(\widetilde{w})}{(1-|\widetilde{w}|\rho)^{(t_1+1)p-1} (1-|\widetilde{w}|\rho)^{(t_2+1)p-1}} (1-\rho)^{p\alpha+(t_1+t_2)p} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{\mathbb{D}} \left| \widetilde{\widetilde{D}}^{t_1+t_2} \widetilde{D}^{\beta+V} f(\rho R\xi) \right|^p (1-R)^{Vp} R\, dR\, dm(\xi) (1-\rho)^{(t_1+t_2)p} (1-\rho)^{p\alpha} \leqslant c \|f\|^p_{D^{\beta} A^p_{\alpha,0}}.$$

При этом, чтобы «избавиться» от t_1, t_2 слева необходимо потребовать $\beta > \frac{2}{p} + \alpha - 1$ [22].

Случай $p > 1$ расматривается аналогично с привлечением оценки (4) вместо (6).

Итак, нами установлена

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > \frac{2}{p+\alpha-1}$, $0 < p < \infty$. *Тогда* $f \in \widetilde{D}^{\beta} T^p_{\alpha,0}$ *если и только, если*

$$\sup_{r\in(0,1)} \left(\int_{T^2} \left| \frac{\widetilde{D}^{\beta-1} f(r\xi) - \widetilde{D}^{\beta-1} f(r\varphi)}{r\xi - r\varphi} \right|^p dm(\xi)\, dm(\varphi) \right)^{1/p} (1-r)^{\alpha} < \infty.$$

Заметим, что справедливо и обратное. Опираясь на утверждение о характеризациях классов голомрфных функций через разности $\frac{(\widetilde{D}^t f)(z)-(\widetilde{D}^t f)(w)}{z-w}$, можно полностью описывать следы тех или иных функциональных классов в бидиске на диагонали (z,z).

Действительно, функция $F(z,w)\frac{(\widetilde{D}^{-1} f)(z)-(\widetilde{D}^{-1} f)(w)}{z-w}$ дает искомое продолжение. Имеем $F(z,z) = \left(\widetilde{D}^{-1}f\right)'(z) = f(z)$, где $\left(\widetilde{D}^{-1}f\right)(z) = \int\limits_0^z f(w)\,dw$ и следующие неравенства следуют непосредственно из теорем 1 и 2:

$$\sup_{|z|<1,\,|w|<1} |F(z,w)|\,(1-|z|)^V\,(1-|w|)^t \leqslant c\,\|f\|_{A^{\infty,\infty}_{0,\alpha}}, \quad \alpha\geqslant 0,\ t+V=\alpha.$$

$$\int\limits_{\mathbb{D}}\int\limits_{\mathbb{D}} |F(z,w)|^p\,(1-|z|)^{\beta-1}\,(1-|w|)^{\gamma-1}\,dm_2(z)\,dm_2(w) \leqslant c\,\|f\|_{B^\alpha_p},$$

где $p>1+\gamma$, $\beta<1$, $\alpha\leqslant -1$, β, $\gamma>0$, $(-\alpha p)=1+\beta+\gamma$.

Обратное к последнему неравенству при любом $n\in\mathbb{N}$ получено в [8]. А неравенство

$$\sup_{0<r<1}\sup_{|z|=r}\left(|f(z,z)|\,(1-|z|)^{V+t}\right) \leqslant c_1 \sup_{|z|<1,\,|w|<1}\left(|f(z,w)|\,(1-|z|)^V\,(1-|w|)^t\right),$$

где V, $t\geqslant 0$, очевидно.

Предположим далее, что всюду ниже $R(z)$ — рациональная функция степени n, $n=1,2,\ldots$, полюса которой лежат вне диска $\overline{\mathbb{D}}$, Bl — класс Блоха,

$$Bl=\left\{f\in H(\mathbb{D})\,:\,\|f\|_{Bl}=\sup_{|z|<1}\left|f'(z)\right|(1-|z|)<\infty\right\}.$$

Мы установим, что имеет место оценка

$$\sup_\rho\left(\int\limits_T\left|\widetilde{D}^{\alpha+1}R(\rho\xi)\right|^{1/\alpha}dm(\xi)\right)^\alpha(1-\rho)^\alpha\leqslant n^\alpha\left\|\widetilde{D}R\right\|_{Bl} \tag{9}$$

для всех α, $0<\alpha<\infty$.

Отметим, что при $\alpha\geqslant 1$ эта оценка установлена Пекарским [3]. Нам понадобится в дальнейшем следующая векторнозначная максимальная теорема.

Теорема A [6]. *Пусть X — квазинормированное пространство. Тогда*

$$\int\limits_T\sup_{z\in\Gamma(\xi)}\|f(z)\|_X\,dm(\xi)\leqslant c(X)\int\limits_T\|f(\xi)\|_X\,dm(\xi),\quad \Gamma(\xi)=\left\{z:\left|1-\bar{\xi}z\right|<(1-|z|)\right\}.$$

А. Пекарский в [3] для $\alpha\leqslant 1$ вывел следующие два неравенства:

$$\|R\|_{H^{1/\alpha}_\alpha}\leqslant c_1(\alpha)\,n^\alpha\,\|R\|_{Bl},\quad 0<\alpha<\infty, \tag{10}$$

$$\|R\|_{D^\alpha A^{1/\alpha}_{1/\alpha-1}}\leqslant c_2(\alpha)\,n^\alpha\,\|R\|_{Bl},\quad 0<\alpha<\infty, \tag{11}$$

$$\|R\|^\alpha_{H^{1/\alpha}_\alpha}=\sup_{r<1}\int\limits_T\left|\widetilde{D}^\alpha f(r\xi)\right|^{1/\alpha}dm(\xi);$$

$$\|R\|^{\alpha}_{D^{\alpha}A^{1/\alpha}_{1/\alpha-1}} = \int\limits_{\mathbb{D}} \left|\widetilde{D}^{\alpha+1} f(r\xi)\right|^{1/\alpha} (1-r)^{1/\alpha-1}\, dr\, d\xi.$$

$\lhd$ Докажем сначала, что (9) при $\alpha < 1$ выводится из теоремы A и (10) при $\alpha = 1$. Заметим, что при $\alpha < 1$

$$\widetilde{\widetilde{D}}^{2}\, \widetilde{\widetilde{D}}^{\alpha-1} R(\widetilde{\rho}\xi) = (\alpha) \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \widetilde{\widetilde{D}}^{2}\, \widetilde{\widetilde{D}}^{1} R_r(\widetilde{\rho}\rho\xi)\, \rho^{\alpha} (1-\rho)^{-\alpha}\, d\rho\, dr, \tag{12}$$

где $\left(\widetilde{\widetilde{D}}^{\alpha} f\right)(z) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)} a_k z^k,\ \alpha > -1,\ \widetilde{D}^{-1}\left(\widetilde{D}^{1} f\right) = f$.

Пусть $A = \int\limits_0^1 \left|\widetilde{D}^{3} R(r\rho\widetilde{\rho}\xi)\right| dr$. Тогда $A \leqslant \min(X, Y)$, где $X = \max\limits_{\rho} \int\limits_0^1 \left|\widetilde{D}^{3} R(r\rho\widetilde{\rho}\xi)\right| dr$, $Y = \left\|\widetilde{D}R\right\|_{Bl} (1-\rho)^{-1}$. Следовательно, оценивая, интегрируя по T и используя теорему A, имеем

$$\int\limits_T \left|\widetilde{\widetilde{D}}^{\alpha+1} R(\widetilde{\rho}\xi)\right|^{1/\alpha} dm(\xi) \leqslant c\left(\|R\|^{(1-\alpha)1/\alpha}_{Bl}\right) \int\limits_T \left(\int\limits_0^1 \left|\widetilde{\widetilde{D}}^{3} R(r\widetilde{\rho}\xi)\right| dr\right) dm(\xi). \tag{13}$$

Значит, $\sup\limits_{\widetilde{\rho}\in(0,1)} \left(\int\limits_T \left|\widetilde{D}^{\alpha+1} R(\widetilde{\rho}\xi)\right|^{1/\alpha} dm(\xi)\right)^{\alpha} (1-\widetilde{\rho})^{\alpha} \leqslant cn^{\alpha} \left\|\widetilde{D}R\right\|_{Bl}$. Мы учли, что $\int\limits_T \int\limits_0^1 \left|\widetilde{D}^{3} R(r\widetilde{\rho}\xi)\right| d\xi dr \leqslant c \int\limits_T \left|\widetilde{D}R(\widetilde{\rho}\xi)\right| dm(\xi)(1-\widetilde{\rho})^{-1}$ и (10) при $\alpha = 1$.

Отметим, что для любой аналитической функции f неравенство

$$\|f\|_{Bl} \leqslant c \sup_{\rho} M_{1/\alpha}\left(\widetilde{D}^{\alpha+1} f,\, \rho\right)(1-\rho)^{\alpha},\ \alpha \leqslant 1$$

(т. е. «обратное» к (9)) также справедливо и следует из известных теорем Харди — Литтлвуда о росте средних $M_p(f, r)$ [5, с. 84]. Подобная «обратная» оценка для рациональных функций была установлена Е. Дынькиным в [18]:

$$\|R\|_{H^{\sigma}} \leqslant n^{\frac{1+\alpha}{p}} \|R\|_{A^p_{\alpha}},\ 1 < 2+\alpha < p,\ \sigma = \frac{p}{2+\alpha}.$$

Оценка $\|f\|_{A^p_{\alpha}} \leqslant \|f\|_{H^{\sigma}}$ — известная теорема Харди — Литтлвуда [5, с. 87], где как и выше

$$A^p_{\alpha p-1} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \int\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1-|z|)^{\alpha p-1}\, dm_2(z) < \infty \right\}, \quad \alpha > 0,\ p > 0.$$

Следующее утверждение связано с интегральным оператором Tg, где $(T_g f)(w) = \int\limits_0^w f(z) g'(z)\, dz$ (частный случай этого оператора — так называемое преобразование Чезаро), которому посвящено большое количество работ в последние годы [4, 12, 13]. Наиболее общие результаты — критерии для ограниченности операторов Tg — действующих в классах Харди и Бергмана получены недавно [4, 12].

Теорема B [4, 12]**.** *Пусть $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$. Тогда*

1) *оператор Tg действует из H^p в H^p в том и только том случае, когда $g \in BMOA$;*

2) *оператор Tg действует из A^p_α в A^p_α в том и только том случае, когда $g \in Bl$, где $BMOA$, Bl — известные классы: $BMOA = BMO \cap H^2$, Bl — класс Блоха* [2].

Пусть, далее, $0 < p,\ q < \infty$, $t > s$, $s \in \mathbb{R}$. Обозначим

$$F^{p,\,q}_s = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 \left| \widetilde{D}^t f\,(R\xi) \right|^q (1-R)^{(t-s)q-1}\, dR \right)^{p/q} dm(\xi) < \infty \right\}$$

— голоморфные классы Лизоркина — Трибеля [19]. *Очевидно $F^{p,\,q}_s = A^p_\alpha$ при $p = q$, $s < 0$, $\alpha = -s$* [19, 28]. *$F^{p,\,2}_0 = H^p$* [5], *$0 < p < \infty$.*

Ниже мы сформулируем и докажем обобщение второй части теоремы B.

Теорема 4. *Пусть $s < 0$, $\frac{1}{p} > \frac{s}{2} + 1$, $0 < p < \infty$. Оператор Tg действует из $F^{p,\,q}_s$ в $F^{p,\,q}_s$ тогда и только тогда, когда $g \in Bl$.*

Замечание 5. Случай $s = -\frac{1}{q}$, $p = q$ содержится в теореме B.

$\lhd$ Доказательство теоремы 4. Отметим сначала, что справедливы следующие неравенства:

$$\|Tgf\|_{F^{p,\,q}_s} \leqslant \|g\|_{Bl} \times \|f\|_{F^{p,\,q}_s} \leqslant \|g\|_{F^{\infty,\,q}_s} \times \|f\|_{F^{p,\,q}_s}\,, \quad s < 0,\ p, q \in (0, \infty), \tag{14}$$

$$\|Tgf\|_{F^{p,\,q}_s} \leqslant \|g\|_{H^{(1/p-1/p_1)^{-1}}} \|f\|_{F^{p_1,\,q}_s}\,, \quad s < 0,\ p_1 > p,\ p_1, p \in (0, \infty), \tag{15}$$

где

$$F^{\infty,\,q}_s = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_w \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{\left| \widetilde{D}^\alpha f(z) \right|^q (1-|z|)^{(\alpha-s)q-1}\, dm_2(z)}{|1-\bar{z}w|^{n+1}} (1-|w|)^n < \infty \right\},$$

$\alpha > s$, $0 < q < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что $(Tgf)'(w) = f(w)g'(w)$. Поэтому первое неравенство в (14) — следствие теоремы Харди — Литтлвуда [5, с. 84], второе — следует из представления Бергмана [19]. Неравенство (15) — простое следствие теоремы о сильной факторизации $F^{p,\,q}_s$ Вербицкого — Кона [20].

Легко вывести также оценку

$$\|T_g f\|_{F^{p,\,q}_s} \leqslant c \sup_{|z|<1} \left(\left| \widetilde{D} g(z) \right| (1-|z|)^{-1/p+1/p_1+1} \right) \|f\|_{F^{p,\,q}_s}\,, \quad s > 0,\ \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} > 0. \tag{16}$$

Оценки (14)–(16) при $q = 2$, $s = 0$ получены в [4].

Покажем теперь справедливость неравенства обратного к (14). Нам понадобится следующая лемма.

Лемма A. *Пусть $t > -1$. Тогда существуют положительные числа α и β такие, что верна оценка*

$$\widetilde{I} = \int\limits_T \left(\int\limits_0^1 \frac{(1-|w|)^t\, d|w|}{|1-w\bar{z}_2|^{\alpha q}\, |1-w\bar{z}_1|^{\beta q}} \right)^{p/q} dm\,(\xi) \leqslant \frac{c(p,q,t,\alpha,\beta)}{|1-z_1\bar{z}_2|^{(\alpha+\beta)p-(t+1)p/q-1}},$$

где $z_i \in \mathbb{D}$, $i = 1, 2$.

◁ Нам понадобится следующее неравенство [7]:

$$\int\limits_{T} \frac{dm\,(\xi)}{\left|1-\bar{\xi}z\right|^{s}|1-\xi\bar{w}|^{q-s}} \leqslant \frac{c(q,s)}{|1-z\bar{w}|^{q-1}}, \quad 0<s<1,\ 1<q<1+s. \tag{17}$$

Имеем следующую оценку внутреннего интеграла ($t>-1$)

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{(1-|w|)^{t}\,d|w|}{\left|1-|w|e^{\overline{i\varphi}}z_1\right|^{\alpha q}|1-|w|e^{i\varphi}\bar{z}_2|^{\beta q}} = \int\limits_{0}^{R_0} \frac{(1-|w|)^{t}}{\left|1-|w|e^{\overline{i\varphi}}z_1\right|^{\alpha q}\left|1-|w|e^{\overline{i\varphi}}\bar{z}_2\right|^{\beta q}}d|w|+$$

$$+\int\limits_{R_0}^{1} \frac{(1-|w|)^{t}}{\left|1-|w|e^{\overline{i\varphi}}z_1\right|^{\alpha q}|1-|w|e^{i\varphi}\bar{z}_2|^{\beta q}}d|w|, \quad R_0=\max(|z_1|,|z_2|).$$

$$\int\limits_{R_0}^{1} \frac{(1-|w|)^{t}}{\left|1-|w|e^{\overline{i\varphi}}z_1\right|^{\alpha q}|1-|w|e^{i\varphi}\bar{z}_2|^{\beta q}}d|w| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1-R_0)^{t/2+1/2}\,(1-R_0)^{t/2+1/2}}{|1-z_1e^{i\varphi}|^{\alpha q}\,|1-\bar{z}_2e^{i\varphi}|^{\beta q}} \leqslant \frac{c}{|1-\bar{z}_1e^{i\varphi}|^{\alpha q-\frac{t+1}{2}}\,|1-\bar{z}_2e^{i\varphi}|^{\beta q-\frac{t+1}{2}}},$$

$$\int\limits_{0}^{R_0} \frac{(1-|w|)^{t}}{\left|1-|w|e^{\overline{i\varphi}}z_1\right|^{\alpha q}|1-|w|e^{i\varphi}\bar{z}_2|^{\beta q}}d|w| \leqslant \int\limits_{0}^{R_0} \frac{(1-R|z|)^{t/2+1/2}\,(1-R)^{-1/2+t/2}\,dR}{|1-Re^{i\varphi}\bar{z}_1|^{\alpha q}\left|1-Re^{\overline{i\varphi}}z_2\right|^{\beta q}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\left|1-z_1\overline{e^{i\varphi}}\right|^{\alpha q-t/2-1/2}\left|1-z_2\overline{e^{i\varphi}}\right|^{\beta q-t/2-1/2}}.$$

Учитывая (17), получим $\widetilde{I}^{1/p} = \frac{c}{|1-z_1\bar{z}_2|^{(\alpha+\beta)-\frac{t+1}{q}-\frac{1}{p}}}$ при $\tilde{s} > \frac{t+1}{2q}$, где $\tilde{s}=\alpha$ или β, $\beta+\alpha > \frac{1+t}{q}+\frac{1}{p}$, $\alpha,\ \beta>1$, $\alpha<\frac{1}{p}+\frac{1+t}{2q}$, $\beta<\frac{1}{p}+\frac{1+t}{2q}$. ▷

Используя неравенство [28] $|f(z)|\,(1-|z|)^{-s+\frac{1}{p}} \leqslant c\,\|f\|_{F^{p,\,q}_s}$, $s<0$, выводим оценки

$$\left|(Tgf)'\,(w)\right| = \left|g'(w)\right|\,|f_{w,w_1}(w)| \leqslant \frac{\|Tgf\|_{F^{p,\,q}_s}}{(1-|w|)^{-s+\frac{1}{p}+1}} \leqslant \frac{c\,\|f\|_{F^{p,\,q}_s}}{(1-|w|)^{-s+\frac{1}{p}+1}}, \tag{18}$$

где $f_{w,w_1}(z) = \frac{1}{(1-\bar{w}z)^{r+1}(1-\bar{w}_1z)^{V+1}}$, $w\neq w_1$, $w,\ w_1\in\mathbb{D}$, $r,\ V>0$.

Следовательно, учитывая лемму A при $\alpha=r+1$, $\beta=V+1$, $t=-sq-1$ и неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{\alpha}}{|1-\bar{w}z|^{\beta}}dm_2(z) \leqslant \frac{c}{(1-|w|)^{\beta-\alpha-2}}, \quad \beta>\alpha+2,\ \alpha>-1.$$

Выводим из (18)

$$\min\left((l,m,n>0)\,,(1+\max(r,V))\right) < \frac{1}{p}-\frac{s}{2},\ r+V+2 > \frac{1}{p}-s,$$

$$\min(r,V) > \max\left(-\frac{s}{2}-1, 0\right) \tag{19}$$

$$\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{|g'(w)|^2 (1-|w|)^l}{|1-\bar{w}w_1|^m} dm_2(w)\,(1-|w_1|)^n \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|)^{p+2\left(r+s-\frac{1}{p}\right)}}{|1-\bar{w}w_1|^m\,|1-\bar{w}w_1|^{2\left(r+1+s-\frac{1}{p}\right)}}\, dm_2(w)\,(1-|w_1|)^n \leqslant \mathrm{const}$$

при $m+2\left(r+1+s-\frac{1}{p}\right) > l+2\left(r+s-\frac{1}{p}\right)+2 \Leftrightarrow m > l$ и при $n = m-l$, $l+2\left(r+s-\frac{1}{p}\right) > -1$.

Итак, $g \in Q_{l,n}$.

$$\|g\|_{Q_{l,n}} = \sup_{w_1} \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{|g'(w)|^2 (1-|w|)^l}{|1-\bar{w}w_1|^{n+l}}\,(1-|w_1|)^n\, dm_2(w) < \infty.$$

Напомним, что [21] $Q_{l,n} = Bl$ при $l = n > 1$, при $Q_{l,n} = BMOA$ $l = n = 1$, $Q_{l,n} = Q_p$ при $0 < p = l = n < 1$. Пространства $Q_{l,n}$ интенсивно изучаются в последние годы [21]. Проведем анализ параметров в вышеприведенных неравенствах.

Пусть $r + s - \frac{1}{p} \geqslant 0$. Тогда, учитывая последнее неравенство и условия теоремы 4, имеем $\frac{1}{p} - \frac{s}{2} > r + 1 \geqslant \frac{1}{p} - s + 1 \Rightarrow s > 2$, что противоречит предположениям теоремы 4 ($s < 0$). Следовательно, имеет место неравенство $r + s - \frac{1}{p} \leqslant 0$.

Из (18), (19) выводим ограничения на p, s, n, r:

$$\frac{1}{p} > \frac{s}{2}+1,\ s<0, \quad (l+2-m) < 2 < \left(\frac{-1-l}{r+s-1/p}\right), \quad r \leqslant \frac{1}{p} - \frac{s}{2} - 1.$$

Сопоставляя полученные выше ограничения на параметры, получаем такие условия:

$$\max\left(-\frac{s}{2}-1, 0\right) < r < \frac{1}{p} - s \Rightarrow \frac{1}{p} \geqslant \left(s, \frac{s}{2}-1\right), \quad \frac{1}{p} > \frac{s}{2}+1.$$

Окончательно выводим

$$l > -1 + 2\left(\frac{1}{p} - r - s\right), \quad s < 0,\ \frac{1}{p} > \frac{s}{2} + 1 + r.$$

Заметим, что если $l \leqslant 1$, то $r + s - \frac{1}{p} > -1$. Откуда $-1 - s + \frac{1}{p} \leqslant r < \frac{1}{p} - \frac{s}{2} - 1$. Противоречие. Поэтому $l > 1$. Учтем, что [21] $\|g\|_{Bl} \leqslant \|g\|_{Q_{l,l}}$, $l > 1$ [27]. $\rhd$

Заметим, что совершенно аналогично при $s < 0$ и некоторых ограничениях на p и q можно установить, что оператор Tg действует из пространства $B_s^{p,q}$ в $B_s^{p,q}$ в том и только том случае, когда $g \in Bl$, где [15, 16]

$$B_s^{p,q} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \int\limits_0^1 M_p^q\left(\widetilde{D}^k f, r\right)(1-r)^{(k-s)q-1} dr < \infty \right\}, \quad k - \forall,\ k > s.$$

Отметим также, что анализ проведенного доказательства показывает, что стандартное наращивание переменных [7] и, незначительные модификации по ходу дела, можно получить обобщение приведенных утверждений об операторе Tg в полидиске $\mathbb{D}^n$, к примеру оценка в лемме В «перейдет»в неравенство

$$\int\limits_{T^n}\left(\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\prod_{k=1}^n\frac{(1-|w_k|)^t\,d|w|}{|1-w_k\bar{z}_k|^{\alpha q}\left|1-\bar{z}_1^k w_k\right|^{\beta q}}\right)^{p/q}dm_n(\xi)\leqslant\frac{c(p,q,t,\alpha,\beta)}{\prod\limits_{k=1}^n\left|1-z_1^k(\bar{z}_2)_k\right|^{(\alpha+\beta)p-(t+1)1/q-1}},$$

где $z_1\in\mathbb{D}^n$, $z_2\in\mathbb{D}^n$, а параметры α, β, p, q, t удовлетворяют тем же условиям. Учитывая оценку [15]

$$\int\limits_T\left(\int\limits_0^1|f(z)|^q(1-|z|)^{-q\left(t+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right)-1}d|z|\right)^{p_1/q}dm(\xi)\leqslant c\,\|f\|_{F_t^{p,q}},\quad\max(-1,t)<\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p},$$

$p<p_1$ и рассуждения, проведенные выше, нетрудно установить также следующее обобщение основного результата из [4].

Теорема 5. *Оператор Tg действует из $F_t^{p,q}$ в $F_t^{p_1,q}$, $p<p_1$, $0<\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\leqslant 1$, $t<\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}$ если и только если $\sup\limits_z|g'(z)|\,(1-|z|)^{-1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}}<\infty$.*

Условие $g\equiv 0$ необходимо и достаточно для действия оператора Tg из $F_t^{p,q}$ в $F_t^{p_1,q}$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}>1$.

Отметим, что при $q=2$, $t=0$ эти утверждения получены в [4].

Основное утверждение последней части заметки — теорема о действии известных операторов Теплица [7, 22] $T_{\bar{\varphi}}$, $\varphi\in H^\infty$ и о наличии K-свойства в пространствах типа $BMOA$ и $MOA_{\omega,\alpha,p}$.

Определение 2. Пусть X — подпространство $H^1\left(\mathbb{D}^2\right)$. Скажем, что X обладает *K-свойством*, если $T_{\bar{\varphi}}X\subset X$ для всех $\varphi\in H^\infty\left(\mathbb{D}^2\right)$.

При $n=1$ термин введен в [26]. Наличие K-свойства в одномерном случае обеспечивает возможность деления на внутреннюю функцию, т. е. наличие у аналитического пространства так называемого f-свойства [26].

Определение 3. Подпространство $X\subset H^1(\mathbb{D})$ обладает *f-свойством*, если для любой внутренней функции I и для любой функции $h\in X$ верно $h/I\in X$ при условии, что $h/I\in H^1$.

Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$, $p\in(0,1)$, $\omega(z,z')>0$, $\omega(z,z')=\prod\limits_{i=1}^2\omega_i(z_i,z_i')$. Введем пространства $BMOA_{\omega,\alpha,p}$ (типа $BMOA$),

$$BMOA_{\omega,\alpha,p}=\left\{f\in H\left(\mathbb{D}^2\right):\sup_{z'\in\mathbb{D}^2}\int\limits_{\mathbb{D}^2}\left|\widetilde{D}^\alpha f(z)\right|^p\omega(z,z')dm_4(z)<\infty\right\},\quad z'=(z_1',z_2').$$

Наличие или отсутствие f-свойства в различных подклассах $H^1(\mathbb{D})$ устанавливалось многими авторами (см., например, [23]).

K-свойство (а следовательно, возможность деления на внутреннюю функцию) в классах (типа $BMOA$) Q_p, $p<1$, $Q_P\subset H^1$, которым уделялось много внимания в последние годы (см., например, [24, 27]), было установлено недавно в [23].

В [23] задача решалась посредством псевдоаналитической характеристики классов Q_p. Ниже мы предложим более простой подход, позволяющий получать информацию о наличии K-свойства в общих пространствах $BMOA_{\omega,\alpha,p}$, в бидиске при $\alpha = 0$. Мы также предъявим две шкалы пространств типа $BMOA$ (см. следствие 1 и 3) в единичном круге, обладающих f-свойством. Результаты, полученные нами в круге, дополняют известные ранее утверждения о наличии или отстутствии f-свойства в тех или иных шкалах пространств аналитических функций. Утверждение теоремы 6 — новое и для $n = 1$.

Пусть ниже $D^t x = \left\{ f : D^t f \in X \right\}$, $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что $\widetilde{D}BMOA_{\omega_p,0,2} = Q_p$, $0 < p < \infty$, где

$$\omega_p(z, z') = \prod_{k=1}^{2} \frac{(1 - |z_k|)^p \, (1 - |z'_k|)^p}{\left|1 - \bar{z}_k z'_k\right|^{2p}}, \quad 0 < p < \infty.$$

Отметим важную работу [27], где также были рассмотрены классы существенно более общие, чем Q_p пространства.

Всюду ниже весовая функция $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ удовлетворяет условию S_α при $\alpha = 0$,

$$\begin{gathered} \sup_{z'} \sup_{V_0} \in \mathbb{D}(1 - |V_0|^2)^{-(2+\alpha)} \left(\int\limits_{S_{V_0}} \omega_j(\widetilde{z})(1 - |\tilde{z}|)^\alpha dm_2(\tilde{z}) \right)^{1/p} \times \\ \times \left(\int\limits_{S_{V_0}} (w_j(\widetilde{z}))^{-q/p} (1 - |\tilde{z}|)^\alpha dm_2(\tilde{z}) \right)^{1/q} < \infty \quad (S_\alpha), \end{gathered} \tag{20}$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\widetilde{z} = (z, z')$, $w(\widetilde{z}) = w(z, z')$, $j = 1, 2$, $(1 - |\widetilde{z}|) = (1 - |z|)\,(1 - |z'|)$.

Теорема 6. *Пусть имеет место включение $BMOA_{\omega,0,p} \subset H^1\left(\mathbb{D}^2\right)$. Тогда пространство $BMOA_{\omega,0,p}$ обладает K-свойством.*

$\lhd$ Доказательство теоремы опирается на следующий критерий, установленный в [25].

Пусть $\alpha > -1$, $1 < p < \infty$, $\omega(z) \geqslant 0$. Тогда оператор

$$(Pf)(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(w)\,(1 - |w|)^\alpha}{(1 - \bar{w}z)^{\alpha+2}} dm_2(w)$$

(проекция Бергмана) действует из $L^p_{\alpha,V}$ в себя: $L^p_{\alpha,V} = L^p(D, V(z)(1 - |z|)^\alpha dm_2(z))$ в том и только в том случае, когда

$$\sup_{w \in \mathbb{D}} (1 - |w|^2)^{-(2+\alpha)} \left(\int\limits_{S_w} V(z)(1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{S_w} (V(z))^{-\frac{q}{p}} (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \tag{21}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $S_z = \{w \in \mathbb{D} : \ |w| > |z|, \ |\arg z - \arg w| < 2\pi(1 - |z|)\}$ — коробка Карлесона.

Условие (21), приведенное выше, напоминает условие A_p Макенхаупта и разница в количестве «берущихся коробок», S_z — коробка, «встречающаяся» с границей $\mathbb{D}$. Условие (20) можно получить обычной итерацией, т. е. применением по каждой переменной в отдельности критерия (21).

Действительно, пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > -1$, z'_1, z'_2 фиксированы. Тогда при $V \in S_\alpha$, $V = V_1 \cdot V_2$

$$\int\limits_{\mathbb{D}}\int\limits_{\mathbb{D}}\left|\int\limits_{\mathbb{D}^2}\frac{\widetilde{f}(w_1,w_2)\,(1-|w_1|)^{\alpha_1}\,(1-|w_2|)^{\alpha_2}\,dm_4(w)}{(1-\bar{w}_1z_1)^{\alpha_1+2}\,(1-\bar{w}_2z_2)^{\alpha_2+2}}\right|^p\times$$
$$\times\,(1-|z_1|)^{\alpha}\,V_1(z_1,z_1')\,(1-|z_2|)^{\alpha}\,V_2(z_2,z_2')dm_4(z)\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{\mathbb{D}^2}\left|\widetilde{f}(w_1,w_2)\right|^p V_1(w_1,w_1')V_2(w_2,w_2')\,(1-|w_1|)^{\alpha}\,(1-|w_2|)^{\alpha}\,dm_4(w_1,w_2).$$

Далее, легко видеть, что

$$|(T_{\bar{h}}f)\,(z)|=c\left|\int\limits_{\mathbb{D}^2}\frac{\overline{h(w)}f(w)}{(1-\bar{w}z)^2}dm_4(w)\right|,\ \text{где}\ f(z)=\sum_{k_1,k_2\geqslant 0}a_{k_1k_2}z_1^{k_1}z_2^{k_2}.$$

Остается воспользоваться критерием при $\alpha=0$ по каждой переменной и перейти к супремуму сначала справа по w_1, w_2, затем слева в полученном неравенстве. $\rhd$

Следствие 1. *Пространство* $\widetilde{D}^kH^1\cap BMOA_{\omega,0,p}\,(\mathbb{D})$ *при* $k\in\mathbb{N}$, $p\in(0,\infty)$, *обладает* f*-свойством.*

Следствие 2. *Класс* $\widetilde{D}^{-1}Q_p\left(\mathbb{D}^2\right)\cap H^1$, $p<1$ *обладает* K*-свойством,* $\widetilde{D}^{-1}Q_p\,(\mathbb{D})\cap H^1$ *обладает* f*-свойством при* $p<1$.

Следствие 3. *Если* $BMOA_{\omega,0,p}\,(\mathbb{D})\subset H^1\,(\mathbb{D})$, *то* $BMOA_{\omega,0,p}$ *обладает* f*-свойством.*

Нетрудно показать, что вес ω_p удовлетворяет условию (20). Утверждения следствия 2 установлены. Оставшиеся утверждения следуют из замечаний, приведенных выше и из факта, что $\widetilde{D}^kH^1$, $k\in\mathbb{N}$, обладает f-свойством (см., например, [22]).

Литература

1. *Holland F., Walsh D.* Criteria for membership of Bloch spaces and it is subspace BMOA // Math. Ann.—1986.—V. 273.—P. 317–335.
2. *Stroethoff K.* The Bloch spaces and Besov spaces of analitic functions // Bull Austr. Math. Soc.—1996.—V. 54.—P. 211–219.
3. *Пекарский А. А.* Новое доказательство неравенства Семмеса для производных рациональных функций // Мат. заметки.—2002.—Т. 2.—С. 230–236.
4. *Aleman A., Cima J.* An integral operator on H^p and Hardy's enequality // J. D'Analise Math.—2001.—V. 85.—P. 157–175.
5. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces.—N-J; London: Acad. press, 1970.
6. *Alexandrov A. B.* Essays on non Locally convex Hardy classes // Lecture Notes in Math.—1981.—V. 864.—P. 1–90.
7. *Шамоян Р. Ф.* Обобщенное преобразование Харди и операторы Теплица в пространствах типа BMOA // Укр. мат. журн.—2001.—Т. 9, № 53.—С. 1206–1271.
8. *Djrbashian, Shamoyan F.* Topics in the theory of A^p_α spaces // Teubner Texte zur Math.—1988.—V. 105.—P. 199.
9. *Boe B.* Interpolating sequences for Besov spaces // J. of Func. Anal.—2001.—V. 192.—P. 319–341.
10. *Wu Z.* The Predual and second Predual of ω_α // J. of Func. Anal.—1993.—V. 116.—P. 314–334.
11. *Шамоян Р. Ф.* О характеристиках типа BMO одного класса голоморфных в круге функций // Сиб. мат. журн.—2003.—Т. 44, № 3.—С. 539–560.
12. *Aleman A., Siskakis A. G.* Integration operators on Bergman spaces // Indiana Un. M. J.—1997.—V. 46, № 2.—P. 337–356.
13. *Aleman A., Siskakis A. G.* An integral operator on H^p // Complex Variables.—1995.—V. 28, № 11.—P. 149–158.

14. *Шамоян Ф. А., Ярославцева О. В.* Непрерывные проекторы, двойственность диагональное отображение в весовых пространствах голоморфных функций со смешанной нормой // Зап. сем. ПОМИ.—1998.—Т. 225.—Р. 184–197.
15. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств.—М.: Мир, 1983.—344 с.
16. *Ortega J., Fabrega J.* Corona type decomposition in some Besov spaces // Math. Scand.—1996.—V. 78, № 1.—P. 93–111.
17. *Nakazi T.* Canad Nath Bull.—1996.—V. 39, № 2.—P. 219–226.
18. *Dynkin E.* Rational Function in Bergman spaces, Complex analisys, operators and related topics // Oper. Adv. Appl.—2000.—V. 113.—P. 77–94.
19. *Ortega J. M., Fabrega J.* Holomorphic Triebel-Lizorkin spaces // J. of Func. Anal.—1998.—V. 151.—P. 177–212.
20. *Cohn W., Verbitski I.* Factorization on tent spaces and Hankel operators // J. of Func. Anal.—2000.—V. 175.—P. 308–329.
21. *Wu Z., Xie C.* Q_p spaces and Morrey spaces // J. of Func. Anal.—2003.—V. 164.—P. 1–15.
22. *Шамоян Р. Ф.* О действии операторов свертки и Теплица в пространствах типа BMOA // Мат. заметки.—2003.—Т. 73, № 5.—С. 759–772.
23. *Dyakonov K., Girela D.* On Q_p spaces and pseudoanalityc extention // Ann. Acad. Sci. Fenn.—2000.—V. 25.—P. 477–487.
24. *Essen M., Xiao* Some results on Q_p spaces $0 < p < 1$ // J. Reinge. Angew. Math.—1997.—V. 485.—P. 173–195.
25. *Bonami A., Bekolle D.* Inegalites a poids pour le noyay de Bergman C. R. // Acad. Sci. Paris Ser. A.—1978.—V. 286, № 18.
26. *Khavin V.* On the factorization of analytic functions smooth up to the boundary // Zap. Nauchn. Sem. LOMI 22.—1971.—P. 202–205.
27. *Essen M., Wulan H.* On analytic and meromorphic function and spaces of Q_p type // J. Math.—2002.—V. 46, № 4.—P. 1233–1258.
28. *Шамоян Р. Ф.* О пространствах голоморфных в поликруге функций типа Лизоркина — Трибеля // Известия НАН Арм.—2002.—Т. 37, № 3.—С. 57–78.

Статья поступила 27 октября 2006 г.

Шамоян Роми Файзоевич, к. ф.-м. н.
Брянский государственный университет
Брянск, 241050, РОССИЯ
E-mail: `rshamoyan@mail.ru`