Владикавказский математический журнал
октябрь–декабрь, 2006, Том 8, Выпуск 4

УДК **519.3**

ОБОБЩЕННЫЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ЭКЗОСТЕРЫ[1]

В. Ф. Демьянов, В. А. Рощина

Посвящается памяти А. М. Рубинова, идеи которого лежат в основе настоящей работы

В статье рассматриваются соотношения между экзостерами и различными обобщенными субдифференциалами. Для субдифференциалов Кларка, Мишеля–Пено, Гато и Фреше получены формулы в терминах экзостеров.

1. Введение

Негладкий анализ сформировался как самостоятельный раздел и непосредственное продолжение классического («гладкого») анализа в 60–70-х годах XX столетия, хотя впервые негладкие задачи были поставлены и изящно решены еще П. Л. Чебышевым. Негладкие задачи до сих пор привлекают внимание исследователей как ввиду наличия множества нерешенных интересных теоретических задач, так и вследствие возникновения новых практических приложений.

Исторически первыми глубоко изученными классами негладких функций были классы выпуклых функций и функций максимума. Исследование этих функций привело к развитию *выпуклого анализа* и *теории минимакса* (см., например, [11, 1]). При этом оказалось, что основным инструментом исследования указанных классов функций является субдифференциал (представляющий собой выпуклое множество в сопряженном пространстве), с помощью которого можно, в частности, вычислить производные по направлениям (и тем самым получить аппроксимацию первого порядка функции в окрестности заданной точки), сформулировать условия минимума, найти направления наискорейшего спуска и построить численные методы.

Упомянутые свойства субдифференциалов выпуклых функций и функций максимума привели к многочисленным попыткам найти подобный выпуклый объект и в невыпуклом случае. Различные обобщения понятия субдифференциала были предложены и исследованы. Среди наиболее удачных и популярных следует отметить, в первую очередь, субдифференциал Кларка (см. [6, 16]). Обзор работ по субдифференциалам имеется, например, в [14]. Общая теория субдифференциалов в абстрактных пространствах построена в [7, 8]. Однако, как отмечается в [8], от субдифференциала «мало прока, если

[1] Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект РФФИ N 06-01-00276.

нет достаточно эффективных средств его вычисления». В настоящей работе для некоторых наиболее распространенных субдифференциалов в конечномерных пространствах строятся правила их вычисления. Это делается с помощью экзостеров.

Идея сведения задачи минимизации произвольной функции к последовательности выпуклых задач была воплощена Б. Н. Пшеничным [10], который ввел понятия верхней выпуклой и нижней вогнутой аппроксимаций. А. М. Рубинов в [3] предложил рассматривать исчерпывающие семейства верхних выпуклых аппроксимаций и нижних вогнутых аппроксимаций. Впоследствии были введены понятия верхнего и нижнего экзостеров, представляющие двойственные объекты и позволяющие свести исходную оптимизационную задачу к последовательности выпуклых задач минимизации.

В настоящей работе изучается связь между экзостерами и некоторыми обобщенными субдифференциалами негладких функций. Понятие экзостера и некоторые его свойства описаны в п. 3. В п. 4 субдифференциалы Гато и Фреше для дифференцируемых по направлениям в смысле, соответственно, Дини и Адамара функций выражены в терминах экзостеров. Эти субдифференциалы были введены в работе [13] и изучены в [25, 27].

Субдифференциалы Мишеля–Пено и Кларка обсуждаются в пп. 5 и 6. Их связь с экзостерами устанавливается в п. 7.

2. Исчерпывающие семейства верхних и нижних аппроксимаций

Б. Н. Пшеничный в [10] ввел понятия верхних выпуклых и нижних вогнутых аппроксимаций. Пусть функция $h : R^n \to R$ — положительно однородна первой степени. Выпуклая положительно однородная функция $\overline{h} : R^n \to R$ называется верхней выпуклой аппроксимацией функции h, если

$$h(g) \leqslant \overline{h}(g) \quad \forall\, g \in R^n. \tag{1}$$

Вогнутая положительно однородная функция $\underline{h} : R^n \to R$ называется нижней вогнутой аппроксимацией функции h, если

$$\underline{h}(g) \leqslant h(g) \quad \forall\, g \in R^n. \tag{2}$$

Исчерпывающие семейства аппроксимаций были определены А. М. Рубиновым в [3] (см. также [4]).

Множество Λ^* верхних выпуклых аппроксимаций функции h называется исчерпывающим семейством верхних выпуклых аппроксимаций функции h, если

$$h(g) = \inf_{\overline{h} \in \Lambda^*} \overline{h}(g) \quad \forall\, g \in R^n. \tag{3}$$

Множество Λ_* нижних вогнутых аппроксимаций функции h называется исчерпывающим семейством нижних вогнутых аппроксимаций функции h, если

$$h(g) = \sup_{\underline{h} \in \Lambda_*} \underline{h}(g) \quad \forall\, g \in R^n. \tag{4}$$

Существование исчерпывающих семейств устанавливается в следующей теореме [3].

Теорема 1 (А. М. Рубинов)**.** *Пусть $h : R^n \to R$ — положительно однородная функция. Если h полунепрерывна сверху на R^n, то существует исчерпывающее семейство верхней выпуклой аппроксимации функции h.*

Если h полунепрерывна снизу на R^n, то существует исчерпывающее семейство нижних вогнутых аппроксимаций функции h.

Если h — полунепрерывна сверху и ограничена, то, по теореме 1, существует семейство Λ^* верхних выпуклых аппроксимаций, удовлетворяющее (3). Если h полунепрерывна снизу и ограничена на B_1, то существует семейство Λ_* нижних вогнутых аппроксимаций, удовлетворяющее (4).

Так как (см. [11]) каждая выпуклая положительно однородная функция $\overline{h}(g)$ может быть представлена в виде

$$\overline{h}(g) = \max_{v \in \overline{C}(\overline{h})} (v, g) \quad \forall\, g \in R^n,$$

где $\overline{C}(\overline{h})$ — субдифференциал функции $\overline{h}$ в нуле (это выпуклый компакт в R^n), то (3) может быть записано как

$$h(g) = \inf_{C \in E^*} \max_{v \in C} (v, g) \quad \forall\, g \in R^n, \tag{5}$$

где $E^* = \{C \subset R^n \mid C = \overline{C}(\overline{h}),\, \overline{h} \in \Lambda^*\}$.

Множество $E^* = E^*(h)$ называется верхним экзостером функции h.

Аналогично, так как любая вогнутая положительно однородная функция $\underline{h}$ может быть представлена в виде

$$\underline{h}(g) = \min_{v \in \underline{C}(\underline{h})} (v, g) \quad \forall\, g \in R^n,$$

где $\underline{C}(\underline{h})$ — супердифференциал функции $\underline{h}$ в нуле (это тоже выпуклый компакт в R^n), то (4) принимает вид

$$h(g) = \sup_{C \in E_*} \min_{w \in C} (w, g) \quad \forall\, g \in R^n, \tag{6}$$

где $E_* = \{C \subset R^n \mid C = \underline{C}(\underline{h}),\, \underline{h} \in \Lambda_*\}$.

Множество $E_* = E_*(h)$ называется нижним экзостером функции h.

3. Условия экстремума в терминах экзостеров

Пусть $f : X \to R$, где $X \subset R^n$ — открытое множество. Функция f называется *дифференцируемой по направлениям в смысле Дини* в точке $x \in X$, если для всех $g \in R^n$ существует конечный предел

$$f'_D(x, g) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} [f(x + \alpha g) - f(x)]. \tag{7}$$

Функция f называется *дифференцируемой по направлениям в смысле Адамара* в точке $x \in X$, если для всех $g \in R^n$ существует конечный предел

$$f'_H(x, g) = \lim_{[\alpha, g'] \to [+0, g]} \frac{1}{\alpha} [f(x + \alpha g') - f(x)]. \tag{8}$$

Пусть $f : R^n \to R$ — заданная дифференцируемая по направлениям (в смысле Дини или Адамара) функция и $h(g) = f'(x, g)$ — соответствующая производная функции f в точке x по направлению g. Функция $h(g)$ положительно однородна первой степени. Если h — полунепрерывна сверху как функция g, то (см. п. 2) $h(g)$ может быть представлена в виде (5), а если $h(g) = f'(x, g)$ — полунепрерывная снизу как функция g, то $h(g)$ может быть выписана в форме(6).

Если h непрерывна по g, то оба представления выше (5) и (6) верны. Например, если f — липшицева функция, то ее производные Адамара совпадают с соответствующими производными Дини и непрерывны как функции направления.

В [15] М. Кастеллани показал, что если функция h — липшицева, то она может быть записана в виде

$$h(g) = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} (v, g) \quad \forall\, g \in R^n \tag{9}$$

и в виде

$$h(g) = \max_{C \in E_*} \min_{w \in C} (w, g) \quad \forall\, g \in R^n, \tag{10}$$

где семейства множеств E^* и E_* — ограничены в совокупности. Напомним, что семейство множеств E ограничено в совокупности, если найдется такой шар B в R^n, что $C \subset B\ \forall\ C \in E$.

Пара $E = [E^*, E_*]$ семейств выпуклых множеств, где E^* — верхний экзостер, и E_* — нижний, называется биэкзостером. Экзостеры были введены в [5, 21, 22].

Там было показано, что если функция f достигает минимума на R^n в точке x^* и если известен верхний экзостер E^* функции f в точке x^*, то выполнено следующее необходимое условие безусловного минимума:

$$0_n \in C \quad \forall\ C \in E^*. \tag{11}$$

Пусть h — непрерывна. Если найдется такое $\delta > 0$, что

$$B_\delta \subset C \quad \forall\ C \in E^*, \tag{12}$$

где $B_\delta\ = \{x \in R^n \mid ||x|| < \delta\}$, то x^* — точка строгого локального минимума функции f. Условие (12) является достаточным условием строгого локального минимума функции f.

Если x^{**} — точка максимума функции f на R^n и известен нижний экзостер E_* функции f в точке x^{**}, то необходимое условие максимума в случае отсутствия ограничений принимает вид

$$0_n \in C \quad \forall\ C \in E_*. \tag{13}$$

Пусть h непрерывна. Если найдется такое $\delta > 0$, что

$$B_\delta \subset C \quad \forall\ C \in E_*, \tag{14}$$

то x^{**} — точка строгого локального максимума f. Условие (14) является достаточным условием строгого локального максимума функции f.

В [17] был представлен обзор некоторых результатов, относящихся к этим новым объектам. Некоторые свойства и приложения экзостеров также обсуждались в [19, 20, 29, 30].

4. Соотношение между субдифференциалами Фреше и Гато и верхними и нижними экзостерами

4.1. Субдифференциал Фреше и экзостеры. Пусть X — открытое множество в R^n. Нижний субдифференциал Фреше функции $f : X \to R$ в точке $x_0 \in X$ можно определить следующим образом (см. [25, 28]):

$$\partial_F^- f(x_0) := \left\{ v \in R^n \;\middle|\; \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - (v, x - x_0)}{||x - x_0||} \geqslant 0 \right\}.$$

Симметрично нижнему субдифференциалу Фреше также можно определить соответствующий *верхний субдифференциал Фреше*:

$$\partial_F^+ f(x_0) := \left\{ v \in R^n \;\middle|\; \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - (v, x - x_0)}{||x - x_0||} \leqslant 0 \right\}.$$

Первую из этих конструкций принято называть *субдифференциалом Фреше*, опуская слово «нижний». Элементы нижнего (верхнего) субдифференциала Фреше называются *нижними* (*верхними*) *субградиентами Фреше*. Насколько нам известно (см. [25]), субградиенты Фреше были впервые введены в [13] для конечномерных пространств и были названы $\geqslant$- и $\leqslant$-градиентами.

Нижние и верхние субдифференциалы Фреше также могут быть определены через понятие дифференцируемости по Фреше (см. [14, 25]). А именно, $v \in R^n$ является нижним (верхним) субградиентом Фреше функции f в точке x_0, если найдется такая дифференцируемая по Фреше в точке x_0 функция g, что $g(x) \leqslant f(x)$ ($g(x) \geqslant f(x)$) для всех $x \in X$, $g(x_0) = f(x_0)$ и $v = g'(x_0)$.

Функция $f : X \to R$ называется *субдифференцируемой (супердифференцируемой) по Фреше*, если множество $\partial_F^- f(x_0)$ ($\partial_F^+ f(x_0)$) — непусто. Заметим, что оба (верхний и нижний) субдифференциала Фреше функции f непусты в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда f дифференцируема по Фреше в точке x_0 (см. [25]). В этом случае $\partial_F^- f(x_0) = \partial_F^+ f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.

Следующее соотношение верно для дифференцируемой по Адамару функции.

Лемма 1. *Пусть функция $f : X \to R$ дифференцируема по направлениям в смысле Адамара в точке $x_0 \in X$. Положим $h(g) = f'(x_0; g)$ для всех $g \in R^n$. Тогда*

$$\partial_F^- f(x_0) = \partial_F^- h(0_n); \quad \partial_F^+ f(x_0) = \partial_F^+ h(0_n). \tag{15}$$

$\lhd$ Из (8) следует, что

$$\frac{f(x) - f(x_0) - (v, x - x_0)}{||x - x_0||} = \frac{f'(x; x - x_0) - (v, x - x_0)}{||x - x_0||} + \frac{o(x - x_0)}{||x - x_0||}.$$

Принимая во внимание, что последнее слагаемое стремится к нулю, когда $x \to x_0$, и что $h(x - x_0) - h(0_n) = f'(x_0; x - x_0)$, подставляя $y = x - x_0$ в правую часть, мы сразу же получаем

$$\liminf_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - (v, x - x_0)}{||x - x_0||} = \liminf_{y \to 0_n} \frac{h(y) - h(0_n) - (v, y)}{||y||}$$

и

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - (v, x - x_0)}{||x - x_0||} = \limsup_{y \to 0_n} \frac{h(y) - h(0_n) - (v, y)}{||y||},$$

что влечет (15). $\rhd$

Следующая теорема о представлении субдифференциала Фреше положительно однородной функции была доказана в [29].

Теорема 2. *Пусть E — верхний (нижний) экзостер положительно однородной функции $h : R^n \to R$. Тогда*

$$\bigcap_{C \in E} C = \partial_F h, \tag{16}$$

где $\partial_F h$ — нижний (верхний) субдифференциал Фреше функции h в нуле.

Следствие 1. *Пусть E_1 и E_2 — различные верхние (нижние) экзостеры одной и той же функции $h:\ R^n \to R$. Тогда*

$$\bigcap_{C \in E_1} C = \bigcap_{C \in E_2} C.$$

Из леммы 1 и теоремы 2 можно сделать вывод, что если функция $f:\ X \to R$ дифференцируема по направлениям в смысле Адамара в точке $x_0 \in X$ и $f'(x_0; g)$ — полунепрерывна сверху (снизу) как функция g, то

$$\partial_F f(x_0) = \bigcap_{C \in E_f(x_0)} C,$$

где $\partial_F f(x_0)$ — нижний (верхний) субдифференциал Фреше функции f в точке x_0, а $E_f(x_0)$ — верхний (нижний) экзостер f в точке x_0.

Лемма 2. *Пусть функции $f_1,\ f_2:\ X \to R$ — дифференцируемы по направлениям в смысле Адамара в точке $x_0 \in X$ и пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ для всех $x \in X$. Следующее равенство:*

$$\partial_F^- f_1(x_0) + \partial_F^- f_2(x_0) = \partial_F^- f(x_0) \tag{17}$$

имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие верхние экзостеры E_1 и E_2 функций f_1 и f_2 соответственно, что

$$\bigcap_{C_1 \in E_1} + \bigcap_{C_2 \in E_2} = \bigcap_{C \in E} C,$$

где $\quad E = \{C \in R^n \mid \exists\, C_1 \in E_1, C_2 \in E_2\ :\ C = C_1 + C_2\}.$

$\lhd$ Следует из представления верхнего экзостера суммы функций (см. [17]) и теоремы 2. $\rhd$

Аналогичный результат имеет место и для верхнего субдифференциала Фреше. Хорошо известно (см. [11, 25]), что если одна из функций дифференцируема по Фреше в точке x_0 или обе функции f_1 и f_2 — выпуклые, то имеет место равенство (17). Несложно убедиться, что эти результаты также следуют из леммы 2.

Известно, что необходимые и достаточные условия минимума могут быть выражены через нижний субдифференциал Фреше (см. [9]). Для того, чтобы точка $x^* \in X$ была точкой локального минимума функции $f:\ X \to R$, необходимо, чтобы

$$0_n \in \partial_F^- f(x^*);$$

условие

$$0_n \in \operatorname{int} \partial_F^- f(x^*)$$

— достаточное для того, чтобы точка x^* была точкой локального минимума функции f. Пусть f дифференцируема по направлениям по Адамару. Принимая во внимание представление (16) субдифференциала Фреше, получаем условия (13) и (14). Таким образом, выражения для необходимых и достаточных условий минимальности через верхние экзостеры и нижний субдифференциал Фреше совпадают для функций, дифференцируемых по направлениям в смысле Адамара. Однако, в случае, когда необходимые условия минимума не выполнены, верхние экзостеры могут предоставить информацию о направлениях спуска (см. [17]), в то время как нижний субдифференциал Фреше - нет, и может даже оказаться пустым. Подобный результат имеет место для условий максимума в терминах нижнего экзостера и верхнего субдифференциала Фреше.

4.2. Субдифференциал Гато и экзостеры. Пусть $f : X \to R$, где X — открытое множество в R^n. Нижний субдифференциал Гато функции f в точке $x_0 \in X$ можно определить следующим образом (см. [23]):

$$\partial_G^- f(x_0) = \Big\{ v \in R^n \mid \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tg) - f(x_0)}{t} \geqslant (v, g) \ \forall \ g \in R^n \Big\}.$$

Верхний субдифференциал Гато может быть определен аналогично:

$$\partial_G^+ f(x_0) = \Big\{ v \in R^n \mid \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tg) - f(x_0)}{t} \leqslant (v, g) \ \forall \ g \in R^n \Big\}.$$

Заметим, что, вообще говоря, $\partial_F^- f(x_0) \subset \partial_G^- f(x_0)$ и $\partial_F^+ f(x_0) \subset \partial_G^+ f(x_0)$ (см. [23]).

Лемма 3. *Нижний (верхний) субдифференциал Фреше положительно однородной функции в нуле совпадает с нижним (верхним) субдифференциалом Гато.*

$\lhd$ Пусть $h : R^n \to R$ — положительно однородная функция. Несложно заметить, что для любых $g \in R^n$ и $t > 0$

$$\frac{h(0_n - tg) - h(0_n)}{t} = \frac{th(g)}{t} = h(g).$$

Таким образом, нижний и верхний субдифференциалы Гато функции h в нуле принимают вид

$$\partial_G^- h(0_n) = \{ v \in R^n \mid h(g) \geqslant (v, g) \ \forall \, g \in R^n \},$$
$$\partial_G^+ h(0_n) = \{ v \in R^n \mid h(g) \leqslant (v, g) \ \forall \, g \in R^n \},$$

что совпадает с представлениями для нижнего и верхнего субдифференциалов Фреше положительно однородной функции (см. [25], Предложение 1.9). $\rhd$

Из леммы 3 немедленно следует, что утверждение, аналогичное утверждению теоремы 2, выполняется для нижних и верхних субдифференциалов Гато.

Следующая лемма может быть доказана аналогично лемме 1.

Лемма 4. *Пусть фукция $f : X \to R$ дифференцируема по направлениям в смысле Дини в точке $x_0 \in R^n$. Положим $h(g) = f'(x_0; g)$ для всех $g \in R^n$. Тогда*

$$\partial_G^- f(x_0) = \partial_G^- h(0_n); \quad \partial_G^+ f(x_0) = \partial_G^+ h(0_n). \tag{18}$$

Из вышеизложенного результата очевидно, что нижние и верхние субдифференциалы Гато дифференцируемой по направлениям в смысле Дини функции могут быть выражены и изучены посредством верхних и нижних экзостеров. Результат, подобный результату леммы 2, может быть также получен для дифференцируемой по направлениям в смысле Дини функции и субдифференциалов Гато.

5. Субдифференциал Кларка

В 1973г. Ф.Кларк ввел понятие обобщенного градиента (см. [16, 6]).

Пусть X — открытое множество в R^n и пусть $f : X \to R$, $x \in X$, $g \in R^n$. Положим

$$f_{cl}^{\uparrow}(x; g) = \limsup_{[\alpha, x'] \to [+0, x]} \frac{1}{\alpha} [f(x' + \alpha g) - f(x')], \tag{19}$$

$$f^{\downarrow}_{cl}(x;g) = \liminf_{[\alpha,x']\to[+0,x]} \frac{1}{\alpha}[f(x'+\alpha g) - f(x')]. \tag{20}$$

Величина $f^{\uparrow}_{cl}(x;g)$ называется *верхней производной Кларка* функции f по направлению g, а величина $f^{\downarrow}_{cl}(x;g)$ называется *нижней производной Кларка* функции f по направлению g. Отметим, что пределы в (19) и (20) существуют всегда (хотя могут принимать бесконечные значения). Функции $f^{\uparrow}_{cl}(x;g)$ и $f^{\downarrow}_{cl}(x;g)$ положительно однородны по g. Если f локально липшицева, то эти значения конечны. Рассмотрим этот случай более подробно.

Итак, пусть функция f локально липшицева на X. Тогда f почти везде дифференцирема. Через $T(f)$ обозначим множество точек дифференцируемости функции f. Множество $T(f)$ является множеством полной меры. Положим

$$\partial_{sh} f(x) = \{v \in R^n \mid \exists \{x_k\}: \ x_k \in T(f), \ x_k \to x, \ f'(x_k) \to v\}. \tag{21}$$

Это множество было введено Н. З. Шором в 1972 г. (см. [12]) и названо им множеством почти-градиентов. Это множество не обязательно выпукло. Множество

$$\partial_{cl} f(x) = \mathrm{co}\{v \in R^n \mid \exists \{x_k\}: \ x_k \in T(f), \ x_k \to x, \ f'(x_k) \to v\} \tag{22}$$

называется *субдифференциалом Кларка.* Очевидно,

$$\partial_{cl} f(x) = \mathrm{co}\ \partial_{sh} f(x).$$

Это множество выпукло и компактно (в липшицевом случае). Любое $v \in \partial_{cl} f(x)$ называется *обобщенным градиентом.* Ф. Кларк доказал, что (см. [6])

$$f^{\uparrow}_{cl}(x;g) = \max_{v\in\partial_{cl} f(x)} (v,g), \quad f^{\downarrow}_{cl}(x;g) = \min_{w\in\partial_{cl} f(x)} (w,g). \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что условие

$$0_n \in \partial_{cl} f(x_0) \tag{24}$$

является необходимым для того, чтобы точка $x_0 \in X$ была точкой локального или глобального минимума. Это же условие является необходимым для того, чтобы точка x_0 была точкой локального или глобального максимума. Точка $x_0 \in X$, удовлетворяющая (24), называется *стационарной (в смысле Кларка) точкой.* Таким образом, условие (24) не различает точки минимума и максимума.

6. Субдифференциал Мишеля–Пено

Ф. Мишель и Ж.–П. Пено в [26] предложили следующее обобщение производной по направлению:

$$f^{\uparrow}_{mp}(x;g) = \sup_{q\in R^n} \left\{ \limsup_{\alpha\downarrow 0} \frac{1}{\alpha}[f(x+\alpha(g+q)) - f(x+\alpha q)] \right\}. \tag{25}$$

Будем называть эту величину *верхней производной Мишеля–Пено* функции f в точке x по направлению g. Величина

$$f^{\downarrow}_{mp}(x;g) = \inf_{q\in R^n} \left\{ \liminf_{\alpha\downarrow 0} \frac{1}{\alpha}[f(x+\alpha(g+q)) - f(x+\alpha q)] \right\} \tag{26}$$

называется *нижней производной Мишеля–Пено* функции f в точке x по направлению g. Если f локально липшицева, то существует выпуклое компактное множество $\partial_{mp} f(x) \subset R^n$, такое, что

$$f_{mp}^{\uparrow}(x;g) = \max_{v \in \partial_{mp} f(x)} (v,g), \quad f_{mp}^{\downarrow}(x;g) = \min_{w \in \partial_{mp} f(x)} (w,g). \tag{27}$$

Напомним, что если функция f является дифференцируемой по направлениям, то $\partial_{mp} f(x)$ есть субдифференциал Кларка функции $h(g) = f'(x,g)$ в точке $g = 0_n$. Множество $\partial_{mp} f(x)$ часто называют [24] *малым субдифференциалом.* Вообще говоря,

$$\partial_{mp} f(x) \subset \partial_{cl} f(x), \tag{28}$$

а в некоторых случаях

$$\partial_{mp} f(x) = \partial_{cl} f(x). \tag{29}$$

В то же время множество $\partial_{mp} f(x)$ сохраняет ряд свойств множества $\partial_{cl} f(x)$. Например, условие

$$0_n \in \partial_{mp} f(x_0) \tag{30}$$

является необходимым условием и минимума, и максимума. Условие (30), вообще говоря, сильнее условия (24).

В [18] было показано, что если функция f квазидифференцируемая (в смысле [3, 4]), то можно построить исчисление субдифференциалов Мишеля–Пено в терминах квазидифференциалов. В следующем пункте выводится формула для вычисления субдифференциала Мишеля–Пено в терминах экзостеров.

7. Субдифференциалы Кларка и Мишеля–Пено в терминах экзостеров

7.1. Полиэдральный случай. Пусть функция h положительно однородная и липшицевая. Как отмечалось выше, h может быть представлена в формах (9) и (10). Вначале рассмотрим представление (9). Положим

$$Q(g) = \{C \in E^* \mid h(g) = \max_{v \in C} (v,g)\}, \tag{31}$$

$$h_C(g) = \max_{v \in C} (v,g), \tag{32}$$

$$V_g(C) = \{w \in C \mid (w,g) = h_C(g) = \max_{v \in C} (v,g)\}. \tag{33}$$

Тогда

$$h(g) = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} (v,g) = \min_{C \in Q(g)} \max_{w \in V_g(C)} (w,g) = \min_{w \in E_g^*} (w,g) \quad \forall\, g \in R^n, \tag{34}$$

где

$$E_g^* = \mathrm{cl\ co}\{V_g(C) \mid C \in Q(g)\}. \tag{35}$$

Теперь рассмотрим полиэдральный случай: предположим, что семейство E^* содержит конечное количество множеств и каждое множество $C \in E^*$ является многогранником. Тогда функция h дифференцируема по направлениям в каждой точке $g \in R^*$, причем

$$h'(g,q) = \min_{C \in Q(g)} \max_{w \in V_g(C)} (w,q). \tag{36}$$

Более того, для почти всех g множества $Q(g)$ и $V_g(C)$ являются одноточечными, поэтому множество E_g^* тоже одноточечное: $E_g^* = \{w_g\}$. Это означает, что функция h почти везде дифференцируема (ее дифференцируемость вытекает из липшицевости h) и потому для почти каждого g существует градиент $h'(g)$ функции h и $h'(g) = w_g$. Обозначим через $T(h)$ множество точек дифференцируемости функции h. Множество $T(h)$ является множеством полной меры.

7.2. Общий случай. Снова положим

$$Q(g) = \{C \in E^* \mid h(g) = \max_{v \in C}(v, g)\}, \tag{37}$$

$$h_C(g) = \max_{v \in C}(v, g), \tag{38}$$

$$V_g(C) = \{w \in C \mid (w, g) = h_C(g) = \max_{v \in C}(v, g)\}. \tag{39}$$

Тогда

$$h(g) = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C}(v, g) \leqslant \max_{v \in C}(v, g) \ = \ h_C(g) \quad \forall\, g \in R^n, \ \forall\, C \in E^*. \tag{40}$$

Для любого фиксированного $C \in E^*$ функция $h_C(g)$, как функция максимума, является дифференцируемой по направлениям, при этом

$$h'_C(g, q) = \max_{v \in V_{g(C)}}(v, q) \quad \forall\, q \in R^n. \tag{41}$$

Функция $h_C(g)$ почти везде дифференцируема, т. е. множество $V_C(g)$ для почти всех g является одноточечным: $V_C(g) = \{v_C(g)\}$, где $v_C(g) \in R^n$.

Поскольку h — липшицевая функция, то она почти везде дифференцируема и поэтому для почти каждого g существует градиент функции h: $h'(g) = w_g$. Через $T(h)$ обозначим множество точек дифференцируемости функции h. Множество $T(h)$ является множеством полной меры.

Зафиксируем $g_0 \in T(h)$. Возьмем произвольное $C(g_0) \in Q(g_0)$, т. е. $h(g_0) = h_{C(g_0)}(g_0)$. Так как h дифференцируема в точке g_0, то она дифференцируема по направлениям в этой точке g_0 и

$$h'(g_0, q) = (w_{g_0}, q) \quad \forall\, q \in R^n. \tag{42}$$

Если точка g_0 — точка дифференцируемости функции $h_{C(g_0)}(g)$, то производная по направлениям функции $h_{C(g_0)}$ в точке g_0 равна

$$h'_{C(g_0)}(g_0, q) = (v_{C(g_0)}(g_0), q) \quad \forall\, q \in R^n. \tag{43}$$

Так как $h(g) \leqslant h_{C(g_0)}(g) \quad \forall\, g \in R^n$ и $h(g_0) = h_{C(g_0)}(g_0)$, то

$$h'(g_0, q) \leqslant h'_{C(g_0)}(g_0, q) \quad \forall\, q \in R^n. \tag{44}$$

Из (44), (42) и (43) вытекает

$$w_{g_0} = v(g_0), \tag{45}$$

где $v(g_0) = v_{C(g_0)}(g_0)$. В силу произвольности g_0 заключаем, что $w_g = v(g)$. Это соотношение имеет место только в случае, когда g — точка дифференцируемости обеих функций, h и $h_{C(g)}$.

Множество $T(h)$ точек дифференцируемости функции h является множеством полной меры. Для любого $C \in E^*$ множество $T(h_C)$ точек дифференцируемости функции h_C тоже является множеством полной меры. Теперь предположим, что множество

$$T^* = \bigcap_{C \in E^*} T(h_C) \tag{46}$$

является множеством полной меры (это предположение выполняется, например, если множество E^* счетное). Тогда $T(h) \cap T^*$ — множество полной меры. Из (45) следует, что

$$w_g = v_{C(g)}(g) = v(g) \quad \text{для почти всех } g. \tag{47}$$

Замечание 1. Вместо множества E^* в (46) можно взять множество

$$\bigcup_{g \in T(h)} Q(g) \ \subset E^*.$$

Замечание 2. Из определения h ясно, что

$$C(\lambda g) = C(g), \quad V_{\lambda g}(C) = V_g(C), \ Q(\lambda g) = Q(\lambda),$$
$$h_C(\lambda g) = \lambda h_C(g), \ w_{\lambda g} = v_{C(\lambda g)}(\lambda g) \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Поэтому можно рассматривать только g из единичной сферы.

7.3. Субдифференциалы Кларка и Мишеля–Пено. Известно (см. [6]), что множество

$$\partial_{cl} h(0_n) = \mathrm{cl}\ \mathrm{co}\{w_g \mid g \in T(h)\} \tag{48}$$

является субдифференциалом Кларка функции h в точке 0_n. Используя соотношение (47), можно выразить субдифференциал Кларка функции h в 0_n конструктивно в терминах точек v_g.

Если функция $f : R^n \to R$ липшицева и дифференцируема по направлениям в точке $x \in R^n$, а $h(g)$ — ее производная по направлениям в точке x, то $\partial_{cl} h(0_n)$ является субдифференциалом Мишеля–Пено (см. [26]) функции f в точке x:

$$\partial_{mp} f(x) = \partial_{Cl} h(0_n) = \mathrm{cl}\ \mathrm{co}\{w_g \mid g \in T(h)\} \subset \partial_{cl} f(x). \tag{49}$$

Итак, субдифференциал Мишеля–Пено функции f в точке x может быть построен с помощью верхнего экзостера производной по направлениям $h(g) = f'(x, g)$. В некоторых случаях (см. [4]) субдифференциал Мишеля–Пено совпадает с субдифференциалом Кларка.

Замечание 3. Аналогичные результаты (с необходимыми изменениями) можно получить, если использовать представление (10) вместо (9). В этом случае используется нижний экзостер E_*.

Замечание 4. Выше в пунктах 4 и 7 было показано, что экзостеры тесно связаны с другими негладкими инструментами, такими как субдифференциалы Мишеля–Пено, Кларка, Гато и Фреше. Отметим, что выведенные отношения имеют вид равенств, т. е. получено исчисление упомянутых субдифференциалов.

Замечание 5. Для квазидифференцируемых функций формула для субдифференциала Мишеля–Пено была получена (см. [18]) с помощью $\dot{-}$-разности, введенной в [2]. Формула (49) является обобщением этой формулы на случай произвольной дифференцируемой по направлениям функции.

Литература

1. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс.—М.: Наука, 1972.—368 с.
2. *Демьянов В. Ф.* О связи между субдифференциалом Кларка и квазидифференциалом // Вестник Ленинградского ун-та.—1980.—Т. 13.—С. 18–24.
3. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Элементы квазидифференциального исчисления // Негладкие задачи теории оптимизации и управления.—Л.: Изд-во Ленингр. ун-та.—1982.—С. 5–127.
4. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.—М.: Наука, 1990.—432 с.
5. *Демьянов В. Ф.* Условные производные и экзостеры в негладком анализе // Докл. РАН.—1999.–Т. 338, № 6.—С. 730–733.
6. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ.—М.: Наука, 1988.—288 с.
7. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление.—Новосибирск: Наука, 1987.—224 с.
8. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с.
9. *Мордухович Б. Ш.* Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления.—М.: Наука, 1988.—360 с.
10. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи.—М.: Наука, 1980.—320 с.
11. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.—М.: Мир, 1973.—472 с.
12. *Шор Н. З.* О классе почти-дифференцируемых функций и одном методе минимизации функций этого класса // Кибернетика.—1972.—№ 4.—С. 65–70.
13. *Bazaraa M. S., Goode J. J., Nashed M. Z.* On the Cones of Tangents with Applications to Mathematical Programming // J. of Optimization Theory and Applications.—1974.–V. 13, № 4.—P. 389–426.
14. *Borwein J. M., Zhu Q. J.* A survey of subdifferential calculus with applications // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory and Methods.—1999.—V. 38, № 6.—P. 687–773.
15. *Castellani M.* A dual characterization for proper positively homogeneous functions // J. of Global Optimization.—2000.—V. 16.—P. 393–400.
16. *Clarke F.* Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.–V. 205, № 2.—P. 247–262.
17. *Demyanov V. F.* Exhausters and Convexificators – New Tools in Nonsmooth Analysis // In: V. Demyanov and A. Rubinov (Eds.) Quasidifferentiability and related topics.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.—P. 85–137.
18. *Demyanov V. F., Jeyakumar V.* Hunting for a smaller convex subdifferential // J. of Global Optimization.—1997.—V. 10, № 3.—P. 305–326.
19. *Demyanov V. F., Roshchina V. A.* Constrained optimality conditions in terms of proper and adjoint exhausters // Applied and Computational Mathematics (Azerbaijan National Academy of Sciences).—Baku, 2005.—V. 4, № 2.—P. 25–35.
20. *Demyanov V. F., Roshchina V. A.* Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters // Optimization.—2006.—V. 55, № 5/6.—P. 525–540.
21. *Demyanov V. F.* Exhausters of a positively homogeneous function // Optimization.—1999.—V. 45.—P. 13–29.
22. *Demyanov V. F., Rubinov A. M.* Exhaustive families of approximations revisited // In: R. P. Gilbert, P. D. Panagiotopoulos, P. M. Pardalos (Eds.) From Convexity to Nonconvexity. Nonconvex Optimization and Its Applications.—2001.—V. 55.—P. 43–50. (Dordrecht: Kluwer Scientific Publishers).
23. *Guo X.* Characteristics of subdifferentials of functions // Appl. Math. Mech.—1996.—V. 17, № 5.—P. 445–450.
24. *Ioffe A. D.* A Lagrange multiplier rule with small convex-valued subdifferentials for nonsmooth problems of mathematical programming involving equality and nonfunctional constraints // Math. Programming.—1993.—V. 58.—P. 137–145.
25. *Kruger A. Ya.* On Fréchet subdifferentials // J. of Math. Sciences.—N. Y., 2003.—V. 116, № 3.—P. 3325–3358.
26. *Michel P., Penot J.-P.* Calcus sous-differential pour les fonctions lipschitzienness et non-lipschitziennes // C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. I.—1984.—V. 298.—P. 269–272.
27. *Mordukhovich B. S.* Necessary conditions in nonsmooth minimization via lower and upper subgradients // Set-Valued Anal.—2004.—V. 12, № 1-2.—P. 163–193.
28. *Mordukhovich B. S.* Variational analysis and generalized differentiation I. Basic theory.—Berlin: Springer-Verlag, 2006.—xxii+579 p.
29. *Roshchina V.* On the relationship between the Fréchet subdifferential and upper exhausters //

International Workshop on Optimization: Theory and Algorithms. 19–22 August 2006, Zhangjiajie, Hunan, China.

30. *Uderzo A.* Convex approximators, convexificators and exhausters: applications to constrained extremum problems // In: V. Demyanov and A. Rubinov (Eds.) Quasidifferentiability and related topics.– Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.—P. 297–327.

Статья поступила 20 декабря 2006 г.

Демьянов Владимир Федорович, д. ф.-м. н.
Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: `vfd@ad9503.spb.edu`

Рощина Вера Алексеевна
Hong Kong, City University of Hong Kong, Department of Mathematics
E-mail: `vera.roshchina@gmail.com`