Владикавказский математический журнал
июль–сентябрь, 2006, Том 8, Выпуск 3

УДК **517.986**

БОРНОЛОГИИ И ЕСТЕСТВЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ КЛАССОВ РЕГУЛЯРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В АЛГЕБРАХ ОПЕРАТОРОВ

В. П. Кондаков, Л. В. Рунов, В. Е. Ковальчук

В алгебре непрерывных линейных эндоморфизмов счетно-нормированного пространства рассматривается естественное расширение класса регулярных элементов и показано, что это расширение, которое называют *классом квазирегулярных элементов,* содержит компактные и другие возмущения некоторых обратимых элементов и проекторов. Квазирегулярные элементы имеют сравнительно простые спектральные свойства при дополнительных ограничениях на пространство.

Пусть E — полное отделимое линейное топологическое пространство и $L(E)$ — алгебра непрерывных линейных эндоморфизмов пространства E.

В случае ненормируемого локально выпуклого пространства E на $L(E)$, как известно [1], не существует никакой стандартной топологии равномерной сходимости на ограниченных множествах, при которой операция умножения была бы непрерывна или множество обратимых элементов было бы открыто.

Непрерывность композиции операторов полезна в ряде случаев. Например, при построении спектральной теории, аналогичной теории банаховых алгебр, при построении голоморфного функционального исчисления и др. Чтобы обеспечить непрерывность указанной операции умножения, $L(E)$ наделяют либо псевдотопологией [2], либо борнологией ([3], с. 23–44).

В настоящей работе алгебры операторов наделяются борнологиями и в них описываются классы элементов, которые можно рассматривать как расширение известных классов регулярных (ограниченных) элементов этих алгебр (определения будут даны ниже). Показано, что расширенные классы так называемых квазирегулярных элементов содержат многие употребительные классы операторов и в некоторых случаях исчерпывают $L(E)$ с точностью до диагональных операторов в некотором базисе. На примерах обсуждаются спектры этих операторов.

Для удобства читателей напомним отдельные факты из теории борнологических пространств (желающие могут подробнее ознакомиться в [3–7]).

Определение 1. Пусть во множестве Y выделена система подмножеств β, обладающая следующими свойствами:

1) если $A \in \beta$ и $B \in \beta$, то $A \cup B \in \beta$;

2) если $A \subset B$ и $B \in \beta$, то $A \in \beta$;

3) для каждой точки $y \in Y$ одноэлементное множество $\{y\} \in \beta$.

Систему подмножеств β называют *борнологией* на Y. Элементы множества β называют *ограниченными множествами*.

Множество Y с заданной на нем борнологией β называют *борнологическим пространством* и обозначают (Y,β). Возвращаясь к алгебре эндоморфизмов $L(E)$ локально выпуклого пространства E, наделим $L(E)$ борнологией равностепенной непрерывности, т. е. в качестве ограниченных в $L(E)$ множеств возьмем множество всех равностепенно непрерывных подмножеств пространства $L(E)$.

Борнологическое пространство $L(E)$ с борнологией равностепенной непрерывности принято обозначать через $\mathrm{Lec}(E)$. Таким образом, множество $M \subset \mathrm{Lec}(E)$ является ограниченным в $\mathrm{Lec}(E)$ тогда и только тогда, когда для всякой окрестности V нуля в E множество $\bigcap\limits_{A\in M} A^{-1}(V)$ — окрестность нуля в E.

Если топология в E определяется счетной системой полунорм $(\|\cdot\|_r)_{r\in\mathbb{N}}$, то критерий ограниченности множества M в борнологическом пространстве $\mathrm{Lec}(E)$ можно сформулировать и в терминах полунорм $\|\cdot\|_r$, $r\in\mathbb{N}$.

Предложение 1. *Множество $M\subset \mathrm{Lec}(E)$ ограничено в пространстве $\mathrm{Lec}(E)$ тогда и только тогда, когда существуют отображение $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ и функция $C:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ такие, что*

$$\sup_{A\in M}\left\{\|Ax\|_r : \|x\|_{\pi(r)}\leqslant 1\right\}\leqslant C(r)\quad (r\in\mathbb{N}).$$

Определение 2. Пусть Y — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$). Говорят, что борнология β на Y согласуется с алгебраической структурой, если алгебраические операции в (Y,β) ограничены, т. е. переводят ограниченные множества в ограниченные. В этом случае говорят, что (Y,β) — *векторное борнологическое пространство*.

Пространство $\mathrm{Lec}(E)$ — векторное борнологическое пространство.

Определение 3. Говорят, что обобщенная последовательность $\{y_\lambda\}$ в векторном борнологическом пространстве (Y,β) сходится к $y_0\in Y$ *в смысле Макки* (или *борнологически*), если существует ограниченное множество $B\in\beta$ такое, что для всякого $\varepsilon>0$ существует λ_0 такое, что $(y_\lambda-y_0)\in\varepsilon B$ для всех $\lambda>\lambda_0$.

Для пространства $\mathrm{Lec}(E)$ справедливо

Предложение 2. *Обобщенная последовательность $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ операторов $T_\lambda\in L(E)$ сходится к $T\in L(E)$ в смысле Макки в $\mathrm{Lec}(E)$ тогда и только тогда, когда существуют функции $s:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ и $C:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ такие, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\lambda_0(\varepsilon)$ такое, что*

$$\|T_\lambda - T\|_{s(r),r}\leqslant \varepsilon C(r)\quad (\lambda>\lambda_0,\quad \forall\, r\in\mathbb{N}),$$

где $\|T\|_{s,r}=\sup\{\|Tx\|_r : \|x\|_s\leqslant 1\}$, $T\in L(E)$.

Функционалы $\|\cdot\|_{s,r}$, $s,r\in\mathbb{N}$, обладают следующими свойствами:

1) $0\leqslant\|T\|_{r,s}\leqslant+\infty$, $T\in L(E)$; если $T=0$, то $\|T\|_{s,r}=0$ для любых $s,r\in\mathbb{N}$; если $T\neq 0$, то для любого $r\in\mathbb{N}$ существует $s(r)\in\mathbb{N}$ такое, что $0<\|T\|_{s(r),r}<\infty$;

2) $\|\lambda T\|_{s,r}=|\lambda|\,\|T\|_{s,r}$ для любых $\lambda\in\mathbb{C}$ и $s,r\in\mathbb{N}$;

3) $\|T_1+T_2\|_{s,r}\leqslant\|T_1\|_{s,r}+\|T_2\|_{s,r}$ для любых $T_1,T_2\in L(E)$ $\forall\, s,r\in\mathbb{N}$;

4) оператор T принадлежит $\mathrm{Lec}(E)$ тогда и только тогда, когда существуют отображения $s:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ и $C:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ такие, что $\|T\|_{s(r),r}\leqslant C(r)$ для всех $r\in\mathbb{N}$.

Последнее следует из того, что если $L(E_s,E_r)$ — множество всех непрерывных линейных операторов, действующих из полунормированного пространства $(E,\|\cdot\|_s)$ в полунормированное пространство $(E,\|\cdot\|_r)$, то оператор T принадлежит $L(E_s,E_r)$ тогда и только тогда, когда $\|T\|_{s,r}<\infty$.

Определение 4. Алгебра R называется *борнологической алгеброй*, если R — векторное борнологическое пространство, в котором операция умножения $R\times R\ni(x,y)\to xy\in R$ ограничена.

Алгебра $\mathrm{Lec}(E)$ с композицией операторов в качестве умножения является борнологической алгеброй.

В работах ([3; с. 83], [6; с. 400], [4; с. 94], [7] и др.) продуктивно использовались понятия регулярного элемента кольца и регулярного спектра элемента кольца. Регулярные элементы кольца назывались также ограниченными (Ж. Аллен) или i-ограниченными (С. Варнер).

Определение 5. Элемент a борнологической алгебры R с единицей e называется *регулярным*, если резольвента $R(\lambda, a)$ определена и ограничена в окрестности бесконечности.

Из определения 5 непосредственно следует, что резольвента в окрестности бесконечности аналитична и представима рядом Неймана. Регулярность элемента a равносильна (см. [3; с. 83]) тому, что существует константа $M > 0$ такая, что множество $\{a^n/M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является ограниченным. Поэтому элемент $T \in \mathrm{Lec}(E)$ будет регулярным тогда и только тогда, когда существуют константа M и функция $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что

$$\|T^n\|_{s(r),r} \leqslant M^n \quad (r \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

или $\|T^n x\|_r \leqslant M^n \|x\|_{s(r)}$ для всех $r \in \mathbb{N}$ и $x \in E$. Регулярные элементы в пространстве $\mathrm{Lec}(E)$ можно охарактеризовать и с помощью спектрального радиуса

$$R(T) = \inf_{r\in\mathbb{N}} \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|_{s(r),r}} = \inf\{M > 0 : \ (\forall\, n \in \mathbb{N})\, \|T^n\|_{s(r),r} \leqslant M^n\}$$

(см., напр., [13]). Для того, чтобы элемент $T \in \mathrm{Lec}(E)$ был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы $R(T) < \infty$.

В [8] было предложено модифицировать известные характеристики целых функций и характеризовать операторы $T \in L(E)$ порядком $\beta(T)$, где

$$\beta(T) = \sup_{r\in\mathbb{N}} \inf_{s\in\mathbb{N}} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \|A^n\|_{s,r}}{n \ln n}$$

и типом

$$\alpha(T) = \sup_{r\in\mathbb{N}} \inf_{s\in\mathbb{N}} \varlimsup \frac{\sqrt[n]{\|A^n\|_{s,r}}}{n^{\beta_r(T)}}, \qquad \text{где} \qquad \beta_r(T) = \inf_{s\in\mathbb{N}} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \|A^n\|_{s,r}}{n \ln n}.$$

Тогда, очевидно, для того, чтобы элемент $T \in \mathrm{Lec}(E)$ был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы порядок $\beta(T)$ был либо отрицательным, либо равным нулю при типе $\alpha(T) < \infty$.

Определение 6. (см. [3; с. 83]) *Регулярным резольвентным множеством* регулярного элемента a борнологической алгебры R с единицей называется множество всех таких комплексных чисел λ, для которых резольвента $R(\lambda, a)$ существует и является регулярным элементом. Это множество будем обозначать $\rho_r(a)$. *Регулярным спектром a* называется дополнение регулярного резольвентного множества.

Регулярный спектр элемента a будем обозначать $\mathrm{Sp}_r(a)$.

Предложение 3. *Регулярное резольвентное множество регулярного элемента $\rho_r(a)$ — это наибольшее открытое множество, на котором резольвента локально ограничена.*

$$\rho_r(a) = \inf\bigl\{M : M > 0, \quad \{a^n/M^n\}_{n\in\mathbb{N}} - \ \textit{ограниченное множество}\bigr\}.$$

Регулярный спектр регулярного элемента компактен и не пуст.

Предложение 3 следует из двух тождеств:

$$(a - s_0 - h)^{-1} = (a - s_0)^{-1} - (a - s_0)^{-2}((a - s_0)^{-1} - h^{-1})^{-1},$$
$$((a - s_0)^{-1} - h^{-1})^{-1} = (a - s_0)h(a - s_0 - h)^{-1}.$$

В определении 6 можно отказаться от регулярности элемента $a \in R$. В этом случае резольвентное регулярное множество $\rho_r(a)$ может оказаться пустым, но обязательно открытым множеством. Спектр $\mathrm{Sp}_r a$ — неограниченное замкнутое множество.

На регулярные элементы борнологической алгебры R переносится большая часть теории Гельфанда для банаховых алгебр. Строится функциональное исчисление Рисса — Данфорда. Если R — коммутативная борнологическая алгебра с единицей, то множество R_r регулярных элементов из R образует коммутативную подалгебру, для которой спектральный радиус является мультипликативной полунормой. Этот факт является ключевым к дальнейшему развитию теории.

В случае некоммутативности алгебры R (как в интересующем нас случае с алгеброй $\mathrm{Lec}(E)$), берут бикоммутант регулярного элемента a, затем — регулярную часть этого бикоммутанта. Получают коммутативную борнологическую алгебру, состоящую из регулярных элементов. Регулярные спектры новой подалгебры сохраняют свои значения, и далее строится теория, аналогичная случаю R_r.

Отмеченные факты составляют суть работ [3] и [6]. По существу, в них выделен класс элементов алгебры R, спектр которых «достаточно хорош». Но можно расширить класс «хороших» элементов алгебры $\mathrm{Lec}(E)$.

Определение 7. Элемент $T \in \mathrm{Lec}(E)$ назовем *квазирегулярным*, если существуют отображения $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $C : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ такие, что $\|T^n\|_{s(r),r} \leqslant C^n(r)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N}$ (сравните с неравенством (1)).

Определение 8. Число λ_0 назовем *сильно регулярной точкой* оператора $T \in \mathrm{Lec}(E)$, если в этой точке определена резольвента $R(\lambda_0, T) = (\lambda_0 I - T)^{-1}$, которая является квазирегулярным элементом кольца $\mathrm{Lec}(E)$.

Как и для замкнутых операторов в банаховой ситуации, в кольце $\mathrm{Lec}(E)$ актуальным вопросом является регулярность бесконечности. Для регулярных элементов удобно принимать бесконечность за элемент регулярного резольвентного множества, так как в окрестности бесконечности резольвента определена и локально ограничена. Для не регулярных элементов кольца $\mathrm{Lec}(E)$ дадим

Определение 9. Бесконечность назовем *сильно регулярной точкой* оператора $T \in \mathrm{Lec}(E)$, если T является квазирегулярным элементом кольца $\mathrm{Lec}(E)$. Множество всех сильно регулярных точек оператора $T \in \mathrm{Lec}(E)$ будем обозначать через $\rho_c(T)$.

Определение 10. Дополнение $\overline{\mathbb{C}} \backslash \rho_c(T)$ назовем *ультраспектром* оператора T. Ультраспектр оператора T будем обозначать через $\mathrm{Sp}_c(T)$. Очевидно, справедливы включения $\rho_r(T) \subset \rho_c(T) \subset \rho(T)$, $\mathrm{Sp}(T) \subset \mathrm{Sp}_c(T) \subset \mathrm{Sp}_r(T)$.

Понятия квазирегулярной точки оператора и ультраспектра оператора были впервые введены для операторов, действующих в пространствах A_R аналитических внутри круга $\{z : |z| < R\}$ функций, в работах [9], [11]. В [11] рассматривалось обобщенное функциональное исчисление в $\mathrm{Lec}(A_R)$. Многие идеи работ [9] и [11] послужили основой для дальнейших обобщений в работах [13–15] и других.

В приводимых ниже примерах рассматривается пространство A_R всех функций, аналитических в круге $\{|z| < R\}$ с топологией равномерной сходимости на компактах внутри этого круга. Эта топология счетно-нормированная и описывается, например, следующим набором норм:

$$\|f\|_{r_n} = \max_{|z|\leqslant r_n} |f(z)|, \text{ где } r_n \uparrow R,$$

или

$$\|f\|_{r_n} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_n| r_n^k, \text{ если } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Пусть оператор $T \in L(A_R)$. В дальнейшем будем рассматривать два способа конкретного задания оператора T:

а) оператор T определяется матрицей $\{s_{nk}\}$ тейлоровских коэффициентов системы функций

$$T(z^k) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{nk} z^n;$$

б) оператор T задается системой функций $s_k(z) = T(z^k)$.

Предложение 4 (см. [9] или [10])**.** *Точка $\lambda_0 \in \rho_c(T)$ для некоторого $T \in L(A_k)$ тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки λ_0 существует матрица $\{\pi_{nk}(\lambda)\}$, обратная матрице, задающей оператор $\lambda I - T$, и по любому $r < R$ найдется $\rho(r) < R$, $c(r) < \infty$ и $\delta(r) > 0$ такие, что*

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\|_{\rho(r),r} = \sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |\pi_{nk}(\lambda)| r^n \rho^{-k} \leqslant c(r) \quad \forall\, \lambda : \, |\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta(r).$$

Для $\lambda_0 = \infty$ надо брать окрестность $|\lambda| > \delta(r)$.

Предложение 5. *Точка $\lambda_0 \in \rho_r(T)$ тогда и только тогда, когда для любого $r < R$ существуют $\rho(r) < R$, $\delta > 0$, $c > 0$ такие, что для всех λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta$, выполняется*

$$\sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |\pi_{nk}(\lambda)| r^n \rho^{-k} \leqslant c.$$

Рассматриваемые примеры содержат описания операторов в функциональных пространствах, имеющих реализации в виде пространств Кёте числовых последовательностей

$$l_p[a_{r,n}] = \left\{ \xi = (\xi_n) : \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p a_{r,n}^p \right)^{\frac{1}{p}} \doteq |\xi|_r < \infty, r \in \mathbb{N} \right\}$$

с топологией, задаваемой системой полунорм $(|\cdot|_r)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 \leqslant a_{r,n} \leqslant a_{r+1,n}$, $r, n \in \mathbb{N}$. В работе [16] показано, что в этих пространствах всегда имеется система ограниченных множеств, состоящая из p-эллипсоидов, и эта система является базой некоторой борнологии, которую иногда называют *борнологией фон Неймана* (см., напр., [4]). Естественно называть ее *Кёте-борнологией*.

В заметке [17] показано, что имеется класс пространств Кёте, в которых каждый оператор из $L(E)$ с точностью до диагонального оператора в некотором базисе является или компактным возмущением проектора, либо тождественного оператора, или просто компактным оператором. Здесь компактность подразумевалась в каждом ассоциированном банаховом пространстве (это слабее компактности в E).

Тем самым каждый оператор из $L(E)$ с точностью до диагонального преобразования является квазирегулярным с достаточно «хорошими» спектральными свойствами, так как в нормированных пространствах спектр указанных операторов хорошо изучен.

Для счетно-нормированного пространства E покажем, что класс квазирегулярных операторов включает различные возмущения обратимых операторов и проекторов.

Предложение 6. *Пусть для оператора $T \in L(E)$ в счетно-нормированном пространстве E оператор $T^2 - T = R$ является квазирегулярным, т. е. имеется система полунорм $(\|\cdot\|_r)$, задающая исходную топологию E, такая, что для любых $r \in \mathbb{N}$ существует $C(r) > 0$, обеспечивающее неравенство $\|Re\|_r \leqslant C(r)\|e\|_r$ при всех $e \in E$. Тогда T тоже квазирегулярен.*

$\triangleleft$ Пространство E всегда можно считать наделенным топологией, задаваемой монотонной системой полунорм $(\|\cdot\|_r)$, т. е. для окрестностей нуля $U_r = \{e \in E : \|\cdot\|_r \leqslant 1\}$ выполнены вложения $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_r \supset U_{r+1} \supset \dots$. В силу непрерывности оператора T для любого $r \in \mathbb{N}$ существуют $s(r)$ и $B(r) > 0$ такие, что $\|Te\|_r \leqslant B(r)\|e\|_{s(r)}$ при всех $e \in E$. Покажем, что выполнено условие

$$(\forall\, r \in \mathbb{N}) \quad (\exists\, s(r)) \quad (\exists\, D(r) > 0) \quad \forall\, e \in E \quad \|T^n e\|_r \leqslant (D(r))^n \|e\|_{s(r)}.$$

Ввиду неравенства треугольника получаем

$$\|T^2 e\|_r \leqslant \|(T^2 - T)e\|_r + \|Te\|_r \leqslant C(r)\|e\|_r + B(r)\|e\|_{s(r)} \leqslant D^2(r)\|e\|_{s(r)}, \quad e \in E.$$

Если доказано, что

$$\|T^i e\|_r \leqslant (D(r))^i \|e\|_{s(r)}, \quad e \in E, \quad i \leqslant n-1,$$

то снова с использованием неравенства треугольника получаем

$$\begin{aligned}
\|T^n e\|_r &\leqslant \|(T^n - T^{n-1})e\|_r + \|(T^{n-1} - T^{n-2})e\|_r + \dots + \|(T^2 - T)e\|_r + \|Te\|_r \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-2} (D(r))^i C(r)\|e\|_{s(r)} \leqslant \sum_{i=0}^{n-2} (D(r))^{i+1}\|e\|_{s(r)} \\
&\leqslant \frac{(D(r))^n - D(r)}{D(r) - 1}\|e\|_{s(r)} \leqslant (D(r))^n\|e\|_{s(r)}, \quad e \in E.
\end{aligned}$$

Требуемое условие для степеней T доказано. В нем можно предполагать $D(r) \leqslant D(r+1)$, $r \in \mathbb{N}$, чего, в случае необходимости, можно добиться увеличением этих констант.

Определим на E новую систему окрестностей нуля, полагая

$$W_1 = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{(D(1))^n} U_1}, \dots,$$
$$W_r = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{(D(r))^n} U_r}, \dots$$

(здесь в объединениях при $n = 0$ присутствует U_r). Легко заметить, что $W_r \supset U_r \supset W_{s(r)}$, согласно доказанному выше условию, так что $(W_r)_{r=1}^{\infty}$ — базис окрестностей нуля исходной топологии E. Если $e \in \frac{T^n}{(D(r))^n} U_r$, то $\frac{Te}{D(r)} \in \frac{T^{n+1}}{(D(r))^{n+1}} U_r$, т. е. $Te \in D(r) W_r$, а значит, обозначив $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_r$ функционал Минковского множества W_r, имеем

$$|\!|\!|Te|\!|\!|_r \leqslant D(r)|\!|\!|e|\!|\!|_r, \quad e \in E,$$

что и требовалось доказать.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что в произвольном локально выпуклом пространстве E класс квазирегулярных операторов включает в себя различные возмущения инволютивных изоморфизмов.

Для счетно-нормированных пространств Кёте при различных дополнительных ограничениях на определяющую матрицу можно получить более детальную информацию, в частности, и о спектральных свойствах квазирегулярных операторов.

Пусть $E = l_p[a_{r,n}]$, $p \geqslant 1$, и матрица $[a_{r,n}]$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\frac{a_{r,n}}{a_{r+1,n}} \downarrow 0 \quad (n \uparrow \infty), \quad r \in \mathbb{N},$$

которое называют *правильностью в смысле Драгилева*. В этом случае говорят также, что E имеет правильный канонический базис (ортов).

Пространства $A_R(A_\infty)$ в приведенных выше и ниже примерах изоморфны, очевидно, пространствам Кёте последовательностей коэффициентов тэйлоровских разложений, определяемым правильными матрицами. При наличии правильного базиса ортов в пространстве Кёте E, т. е. предполагая правильность матрицы $[a_{r,n}]$, рассмотрим следующее условие разреженности этой матрицы

$$(\forall\, r) \quad \bigl(\exists\, s = s(r)\bigr) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{r,n}a_{s,n-1}}{a_{s,n}a_{r,n-1}} = 0. \tag{2}$$

В [18] показано, что это условие является топологическим инвариантом и записывается в терминах так называемых относительных n-поперечников окрестностей нуля. Из него непосредственно следует ядерность пространства Кёте.

Пусть $T : E \to E$ — линейный оператор с матрицей $((b_{ij}))$ в основном базисе пространства. Обозначим через J оператор, имеющий (в том же базисе) диагональную матрицу с элементами b_{jj} по главной диагонали. При некоторых условиях оператор T разлагается в сумму вида

$$T = J + L, \quad L \in \lambda(E), \tag{3}$$

где $\lambda(E)$ — класс всех тех линейных операторов $L : E \to E$, которые при любом $r \in \mathbb{N}$ могут быть продолжены до компактного оператора $L_r : E_r \to E_r$.

Теорема. *Всякий оператор $T : E \to E$, допускающий при любом r расширение до некоторого ограниченного оператора в E_r, разлагается в сумму* (3) *тогда и только тогда, когда в E выполнено условие* (2).

$\lhd$ Пусть T удовлетворяет условию теоремы и в E выполнено условие (2). Покажем, что T разлагается в сумму (3). Для этого надо доказать, что для оператора T', который получится из T, если положить $b_{jj} = 0$, $j = 1, 2, ...$, при любом $r \in \mathbb{N}$ выполняется условие:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_{in}| \frac{a_{r,i}}{a_{r,n}} \right) = 0, \tag{4}$$

которое достаточно для $T' \in \lambda(E)$.

Для произвольного r выберем r_1 и r_2 так, чтобы $r_1 < r < r_2$ и

$$\frac{a_{r_1,n}}{a_{r,n}} \cdot \frac{a_{r,n-1}}{a_{r_1,n-1}} \to 0, \quad \frac{a_{r_2,n}}{a_{r,n}} \cdot \frac{a_{r,n+1}}{a_{r_2,n+1}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Это можно сделать на основании (2). С помощью тождественных преобразований и оценок, вытекающих из правильности базиса $\{e_n\}$ ($\|e_n\|_p = a_{r,n}$), получаем

$$\frac{\|T'e_n\|_r}{\|e_n\|_r} = \sum_{i=1}^{n-1} |b_{in}| \frac{a_{r,i}}{a_{r,n}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} |b_{in}| \frac{a_{r,i}}{a_{r,n}} = \sum_{i=1}^{n-1} |b_{in}| \frac{a_{r,i}}{a_{r,n}} \frac{a_{r_1,i}}{a_{r_1,n}} \frac{a_{r_1,n}}{a_{r_1,i}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} |b_{in}| \frac{a_{r,i}}{a_{r,n}} \frac{a_{r_2,i}}{a_{r_2,n}} \frac{a_{r_2,n}}{a_{r_2,i}}$$
$$\leqslant \frac{a_{r_1,n}}{a_{r,n}} \max_{1\leqslant i\leqslant n-1} \frac{a_{r,i}}{a_{r_1,i}} \sum_{i=1}^{\infty} |b_{in}| \frac{a_{r_1,i}}{a_{r_1,n}} + \frac{a_{r_2,n}}{a_{r,n}} \max_{i\geqslant n+1} \frac{a_{r,i}}{a_{r_2,i}} \sum_{i=n+1}^{\infty} |b_{in}| \frac{a_{r_2,i}}{a_{r_2,n}}$$
$$\leqslant \frac{a_{r_1,n}}{a_{r,n}} \frac{a_{r,n-1}}{a_{r_1,n-1}} \|T_{r_1}\| + \frac{a_{r_2,n}}{a_{r,n}} \frac{a_{r,n+1}}{a_{r_2,n+1}} \|T_{r_2}\| \to 0 \quad (T_{r_i} : E_{r_i} \to E_{r_i})$$

при $n \to \infty$ в силу выбора r_1 и r_2. Таким образом, T' удовлетворяет условию (4) и T разлагается в сумму (3).

Предположим теперь, что в E условие (2) не выполняется, т. е. существует r_0 такое, что для любого r выполняется

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{r_0,n}}{a_{r,n}} \frac{a_{r,n-1}}{a_{r_0,n-1}} = \alpha_r^{r_0} > 0,$$

причем все $\alpha_r^{r_0} \leqslant 1$, так как

$$\frac{a_{r_0,n}}{a_{r,n}} \frac{a_{r,n-1}}{a_{r_0,n-1}} \leqslant 1.$$

Построим непрерывное отображение пространства E в себя, которое удовлетворяет условию леммы и которое нельзя представить в виде (3).

Обозначим ν_r $(r = r_0 + 1, r_0 + 2, ...)$ последовательности, для которых

$$\lim_{n\in\nu_r} \frac{a_{r_0,n}}{a_{r,n}} \frac{a_{r,n-1}}{a_{r_0,n-1}} = \alpha_r^{r_0} > 0.$$

Кроме того, ν_r для удобства выберем такими, что

$$\frac{a_{r_0,n}}{a_{r,n}} \cdot \frac{a_{r,n-1}}{a_{r_0,n-1}} \geqslant \alpha_r^{r_0} - \varepsilon_r$$

для всех $n \in \nu_r$, где ε_r $(r = r_0 + 1, r_0 + 2, ...)$ удовлетворяют неравенствам

$$1 < \frac{\alpha_r^{r_0}}{\varepsilon_r} < c_1 \qquad (c_1 \text{ — некоторая константа}).$$

Последовательности ν_r $(r = r_0+1, ...0)$ можно выбрать непересекающимися и состоящими из натуральных чисел одинаковой четности. Построим оператор $B = T - I$ с помощью такой матрицы $((b_{ij}))$, у которой все элементы за исключением элементов выше главной диагонали $b_{n+1,n}$ при $n \in \bigcup\limits_{r=r_0+1}^{\infty} \nu_r$ равны нулю.

Отличные от нуля элементы этой матрицы определим следующим образом: $b_{n-1,n} = \alpha_r^{r_0} a_{r,n} a_{r,n-1}^{-1}$, $n \in \nu_r$ $(r = r_0 + 1, ...)$. Пусть $\xi \in E$ произвольный элемент

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n.$$

Согласно построению, для любого $s > r_0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|B\xi\|_s &\leqslant \sum_{n\in\cup\nu_r}|\xi_n|\|Be_n\|_s = \sum_{n\in\cup\nu_r}|\xi_n|b_{n-1,n}a_{s,n-1} = \sum_r\sum_{n\in\nu_r}|\xi_n|\alpha_r^{r_0}\frac{a_{r,n}}{a_{r,n-1}}a_{s,n-1}\\ &\leqslant \sum_{r\leqslant s}\alpha_r^{r_0}\sum_{n\in\nu_r}|\xi_n|a_{s,n} + \sum_{r>s}\sum_{n\in\nu}|\xi_n|\alpha_r^{r_0}\frac{a_{r,n}}{a_{r,n-1}}\frac{a_{r_0,n-1}}{a_{r_0,n}}\frac{a_{r_0,n}}{a_{r_0,n-1}}a_{s,n-1}\\ &\leqslant \left(\max_{r\leqslant s}\{\alpha_r^{r_0}\} + \sup_{r>s}\left\{\frac{\alpha_r^{r_0}}{\alpha_r^{r_0}-\varepsilon_r}\right\}\right)\|\xi\|_s = c_s\|\xi\|_s.\end{aligned}$$

А это и означает ограниченность построенного оператора в E_s. В то же время нетрудно убедиться, что оператор $T = I + B$ нельзя представить в виде (3). Теорема доказана. $\triangleright$

Из спектральных свойств квазирегулярных проекторов в указанных пространствах вытекает

Следствие. *В пространствах Кёте, удовлетворяющих условию* (2), *образы квазирегулярных проекторов имеют базисы.*

Примерами пространств аналитических функций, удовлетворяющих условию теоремы, являются пространства лакунарных степенных рядов $A_R(\nu)$, $R \leqslant \infty$, порождаемые последовательностями степеней $(z^{n_k})_{n_k\in\nu}$ с ограничением на лакуны (пропуски)

$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{n_{k+1}}{n_k} > 1.$$

Как показано в [19] при более сильном ограничении

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{n_{k+1}} = 0$$

в указанных пространствах $A_R(\nu)$ любой непрерывный оператор с точностью до диагонального оператора-множителя квазирегулярен.

В следующих примерах обсуждаются соотношения между упоминавшимися видами спектров операторов.

Пример 1. Пусть $\lambda_k \in \mathbb{C}(k \in \overline{\mathbb{N}} = \{0\}\cup\mathbb{N})$, оператор T задан системой функций $s_k(z) = \lambda_k z^k$, где

$$\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|\lambda_k|} \leqslant 1.$$

Тогда $T \in L(A_R)$, $0 < R \leqslant \infty$. Резольвента $R(\lambda, T)$ определяется системой функций

$$\pi_k(z,\lambda) = \frac{z^k}{\lambda-\lambda_k}.$$

Спектр $\mathrm{Sp}(T)$, очевидно, задается следующим образом

$$\mathrm{Sp}(T) = \Lambda\cup\{\lambda : \varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{\lambda-\lambda_k}} > 1\} = \Lambda\cup\{\lambda : \varliminf_{k\to\infty}\sqrt[k]{|\lambda-\lambda_k|} < 1\},$$

где $\Lambda = \{\lambda_k : k \in \overline{\mathbb{N}}\}$. Покажем, что $\mathrm{Sp}_c(T) = \overline{\Lambda}$. Действительно, пусть $\lambda_0 \in \overline{\Lambda}$ и тогда существует подпоследовательность $\lambda_{k_j} \to \lambda_0$. Следовательно,

$$\sup_{|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta}\|(\lambda I - T)^{-1}\|_{r,\rho} = \sup_{|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta}\sup_{k\in\overline{\mathbb{N}}}\frac{r^k\rho^{-k}}{|\lambda-\lambda_k|} \geqslant \sup_{|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta}\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}}\frac{r^{k_j}\rho^{-k_j}}{|\lambda_{k_j}-\lambda_0|} = \infty,$$

где $r < R$, $r < \rho < R$. А это и означает, что $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}_c(T)$.

Если $\overline{\lim}\,|\lambda_k| = \infty$, то $\infty \in \mathrm{Sp}_c(T)$. Следовательно, $\mathrm{Sp}_c(T) \setminus \mathrm{Sp}(T) \neq \varnothing$, T — нерегулярный оператор и, очевидно, $\mathrm{Sp}_c(T) = \mathrm{Sp}_r(T)$.

Пример 2. Оператор умножения на функцию в A_R, $R \leqslant \infty$, $(Tf)(z) = \varphi_0(z)f(z)$, где $\varphi_0(z) \in A_R$, порождается системой функций $p_k(z) = z^k\varphi_0(z)$. Резольвента $R(\lambda, T)$ определяется системой функций

$$\pi_k(z,\lambda) = \frac{z^k}{\lambda - \varphi_0(z)}.$$

Нетрудно проверить, что в этом случае $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}_c(T) \subset \overline{\mathrm{Sp}(T)} = \mathrm{Sp}_r(T)$. Если $R = \infty$, то, если $\varphi_0(z)$ не является многочленом, ее максимум модуля растет бесконечно быстрее, чем максимум модуля любого многочлена. Поэтому оператор T умножения на $\varphi_0(z)$ не является регулярным, $\mathrm{Sp}_r(T) = \overline{\mathbb{C}}$. В частности, при $\varphi_0(z) = e^z$

$$\|T^{-1}\|_{\rho,\rho} = \sum \frac{\rho^n}{n!} = e^\rho.$$

Значит множество $\{e^{-\rho^n}T^{-n}\}$ — ограничено в пространстве $L(AC_\rho)$, где AC_ρ — банахово пространство всех аналитических в круге $|z| < \rho$ функций с конечной нормой

$$\|f\|_\rho = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\rho^k, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Следовательно, $0 \in \rho_c(T)$. Очевидно, $\|T^{-n}\|_{\rho\rho} \leqslant M^n$ для всех $M > e^\rho$, поэтому $\rho_c(T) = \{0, \infty\}$. В случае, когда T — оператор умножения на z, $\rho_c(T) = \{\infty\}$, $\rho_r(T) = \varnothing$.

Пример 3. Оператор T, порожденный системой

$$s_k(z) = \begin{cases} mz^{2m+1}, & k = 2m+1, \\ z^{2m+2}, & k = 2m, \end{cases} \quad m \in \overline{\mathbb{N}},$$

принадлежит $L(A_R)$, $0 < R < \infty$. В этом случае

$$\pi_k(z,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda - m} z^{2m+1}, & k = 2m+1, \\ \frac{1}{\lambda - z^2} z^{2m}, & k = 2m, \end{cases} \quad m \in \overline{\mathbb{N}}.$$

Отсюда легко получить, что

$$\mathrm{Sp}(T) = \overline{\mathbb{N}} \cup \{|\lambda| < R^2\}.$$

$$\mathrm{Sp}_r(T) = \mathrm{Sp}(T) \cup \{\infty\}, \quad \mathrm{Sp}_c = \mathrm{Sp}_r(T) \cup \{|\lambda| = R^2\}.$$

Во всех известных примерах в пространствах $L(A_R)$ справедливо включение

$$\mathrm{Sp}_c(T) \subset \overline{\mathrm{Sp}(T)}. \tag{5}$$

Доказать справедливость включения (5) в общем случае не удалось. Но при некоторых предположениях относительно оператора T было доказано, что пересечение $\mathrm{Sp}_c(T) \cap \mathrm{Int}\rho(T)$ первой категории в $\mathrm{Int}\rho(T)$ и связано с $\mathrm{Fr}\rho(T)$ [12], т. е. если $\mathrm{Sp}_c(T)$ и шире $\overline{\mathrm{Sp}(T)}$, то $\mathrm{Sp}_c(T)$ отличается от $\overline{\mathrm{Sp}(T)}$ на достаточно редкое множество. В [12] были доказаны некоторые уточнения и расширение результатов из [11].

Подробнее о функциональном исчислении в пространствах и его приложениях см. в [10], [19] и др.

Литература

1. *Kothe G.* Topologische lineare Raume.—Berlin: Springer-Verlag, 1960.
2. *Фрёлихер А., Бухер В.* Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы.—М.: Мир, 1970.—168 с.
3. *Waelbroeck L.* Topological Vector Spaces and Algebras.—Berlin: Springer-Verlag, 1971.—158 p. (Lecture Notes in Math.; 230.)
4. *Радыно Я. В.* Линейные уравнения и борнология—Минск: Изд-во БГУ, 1982.—200 с.
5. *Рунов Л. В., Ковальчук В. Е.* Псевдотопология и функциональное исчисление Рисса-Данфорда // РГУ. ВИНИТИ.—№ 1788-В03.—61 с.
6. *Allan G. R.* Aspectral theory for locally convex algebras // Proc. London Math. Soc.—1965.—V. 15, № 3.—P. 399–421.
7. *Радыно Я. В.* Линейные дифференциальные уравнения в локально-выпуклых пространствах. Регулярные операторы и их свойства // Диф. уравнения.—1977.—Т. 13, № 8.—С. 1402–1410.
8. *Громов В. П.* Порядок и тип линейного оператора и разложение в ряд по собственным функциям // Докл. АН СССР.—1986.—Т. 288, № 1.—С. 27–31.
9. *Захарюта В. П.* Аналитические функции от операторов и их применение к базисам в аналитических пространствах // Научные сообщения за 1963 г. Серия точных и естественных наук.—Ростов н/Д: РГУ, 1964.—С. 25–28.
10. *Захарюта В. П., Ковальчук В. Е., Рунов Л. В.* Ультраспектр оператора, действующего в пространстве аналитических функций, и функциональное исчисление Рисса — Данфорда / РГУ. Деп. в ВИНИТИ 1992 № 2276-В92.—43 с.
11. *Захарюта В. П.* Функции от оператора и базисы, связанные с данными, в пространствах аналитических функций: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов н/Д, 1964.—121 с.
12. *Рунов Л. В.* О соотношении спектра и ультраспектра операторов в пространстве аналитических функций // Мат. анализ и его приложения.—Ростов н/Д, 1972.—Т. 4.—С. 3–10.
13. *Arrikan H., Runov L., Zahariuta V.* Holomorphic functional calculus for operators on a locally convex space // Results in Mathematics.—2003.—V. 43.—P. 23–36.
14. *Рунов Л. В.* Проективная резольвента замкнутого оператора и функциональное исчисление Рисса — Данфорда / Деп. ВИНИТИ № 606-В00.—45 с.
15. *Рунов Л. В.* Голоморфное исчисление в полинормированной алгебре с единицей / Деп.ВИНИТИ № 509-В2002.—32 с.
16. *Кондаков В. П.* Вопросы геометрии ненормируемых пространств.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1983.—72 с.
17. *Драгилев М. М., Кондаков В. П.* Об одном классе ядерных пространств // Мат. заметки.—1970.—Т. 8, вып. 2.—С. 169–177.
18. *Кондаков В. П.* Некоторые вопросы изоморфизма и базисов локально выпуклых пространств: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов н/Д, 1972.—129 с.
19. *Кондаков В. П.* Характеризация дополняемых подпространств в декартовых произведениях структурно несравнимых пространств Кёте из классов и Драгилева // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, вып. 2.—С. 17–20.

Статья поступила 13 марта 2006 г.

Кондаков Владимир Петрович, д. ф.-м. н.
Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет,
Лаборатория математических исследований ИПМИ ВНЦ РАН и ЮРГУЭС
E-mail: kond@ns.math.rsu.ru

Рунов Леонид Владимирович, к. ф.-м. н.
Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет

Ковальчук Владимир Евстафиевич, к. ф.-м. н.
Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет