Владикавказский математический журнал
июль–сентябрь, 2006, Том 8, Выпуск 3

УДК **517(075)**

ОПЕРАТОРНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

К. К. Казбеков

В работе формально найдено общее решение в замкнутом аналитическом виде для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка вида $(D_0^\alpha + \lambda)^q f(t) = g(t)$, где $q = 1, 2, \ldots$, на основе операторных методов теории операционного исчисления. Приводятся подробные поясняющие примеры для случаев $q = 1, 2, 3, 4$.

1. Введение

Напомним некоторые определения и факты из теории операционного исчисления необходимые нам в дальнейшем [1–4].

1.1. Пусть L обозначает класс всех функций, определенных и суммируемых на полуоткрытом отрезке $[0, \infty)$.

Обозначим через M множество всех функций, определенных в области $0 \leqslant t < \infty$, дифференцируемых в этой области и производная которых принадлежит множеству L. Тогда всякую функцию $F(t)$, принадлежащую множеству M, можно представить в виде

$$F(t) = F(0) + \int\limits_0^t f(u)\,du, \quad \text{где } f(t) \in L.$$

Очевидно, M относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число есть линейное множество, содержащееся в множестве L.

Введем в множестве M операцию умножения. Назовем произведением функций $F(t) \in M$ и $G(t) \in M$ функцию:

$$K(t) = F(t) * G(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t F(t-u)G(u)\,du. \tag{1.1.1}$$

Доказывается [1, 2], что функция $K(t)$ принадлежит множеству M. При этом произведение $(*)$ удовлетворяет свойствам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Отсюда следует, что линейное множество M с введением операции умножения (1.1.1) становится коммутативным кольцом; это кольцо называется кольцом Микусинского.

1.2. Рассмотрим коммутативное кольцо N с единицей и без делителей нуля. Для таких колец N верна [1, 4]

Теорема 1.2.1. *Всякое коммутативное кольцо N без делителей нуля может быть расширено до поля.*

Эта теорема играет весьма существенную роль в построении операционного исчисления.

Применяя известную теорему Титчмарша [1, 4] легко показать, что кольцо M не имеет делителей нуля и, следовательно, может быть расширено до поля отношений. Это поле в [1, 2, 3] обозначается через $\mathfrak{M}(M)$ или просто $\mathfrak{M}$. Элементы поля $\mathfrak{M}$ являются операторами. Точнее, элементами поля $\mathfrak{M}$ являются множества. Каждое такое множество состоит из эквивалентных между собой пар $\big(F(t), G(t)\big)$, $G(t) \not\equiv 0$. Элементы поля обозначаются символом $\dfrac{F}{G}$. Две пары $\big(F(t), G(t)\big)$ и, следовательно $\big(F_1(t), G_1(t)\big)$ называются эквивалентными, если $F * G_1 = F_1 * G$ и $\dfrac{F}{G} = \dfrac{F_1}{G_1}$, тогда и только тогда, когда $F * G_1 = F_1 * G$.

Множество всех операторов поля, приводящихся к виду $\dfrac{F}{1}$, образуют в поле $\mathfrak{M}$ подкольцо, изоморфное исходному подкольцу M. Поэтому вместо $\dfrac{F(t)}{1}$ можно писать $F(t)$, т. е. в $\mathfrak{M}(M)$ верно $\dfrac{F(t)}{1} = F(t)$.

Рассмотрим в поле $\mathfrak{M}$ все операторы, приводящиеся к виду $\dfrac{F(t)}{t}$, $F(0) = 0$. Очевидно, совокупность таких элементов будет линейным множеством.

Функция $F(t)$ дифференцируема и $F'(t) = f(t)$. Операторы поля $\mathfrak{M}$, приводящиеся к виду $\dfrac{F(t)}{t}$, $F(0) = 0$, будем вслед за [1, 2] называть функциями и вместо $\dfrac{F(t)}{t}$ писать $f(t)$, т. е.

$$\frac{F(t)}{t} = F'(t) = f(t), \quad \text{если } F(0) = 0. \tag{1.2.1}$$

Не всякий оператор может быть приведен к функции. Например оператор $\dfrac{1}{t}$, очевидно, не может быть приведен к виду $\dfrac{F(t)}{t}$, $F(0) = 0$.

Сумма функций есть снова функция. Однако в общем случае произведение функций есть оператор. В связи с этим верна [4]

Теорема 1.2.2. *Для того, чтобы произведение функций* $\dfrac{F(t)}{t} = f(t)$ *и* $\dfrac{G(t)}{t} = g(t)$ *было функцией, необходимо и достаточно, чтобы свертка этих функций $f(t)$ и $g(t)$ принадлежала исходному кольцу M и обращалась в нуль при $t = 0$.*

Следствие. *Произведение функции $F(t) \in M$ с любой функцией $g(t) \in L$ есть снова функция.*

Оператор $\dfrac{1}{t}$ играет фундаментальную роль в операционном исчислении. Для него вводится специальное обозначение $p = \dfrac{1}{t}$. В таком случае формула (1.2.1) примет вид

$$p * F(t) = F'(t), \quad F(0) = 0. \tag{1.2.2}$$

Оператор $p = \dfrac{1}{t}$ называется оператором дифференцирования.

Если $F(t)$ — любая функция, принадлежащая кольцу M, то из (1.2.2) следует формула

$$p * F(t) = F'(t) + pF(0). \tag{1.2.3}$$

В общем случае, когда $F(t)$ имеет производную n-го порядка $F^{(n)}(t)$, принадлежащую множеству L, последовательное применение формулы (1.2.3) дает соотношение:

$$p^n * F(t) = F^{(n)}(t) + pF^{(n-1)}(0) + p^2F^{(n-2)}(0) + \ldots + p^nF(0), \tag{1.2.4}$$

где p^n означает произведение $p * p * \ldots * p$ из n операторов.

Обозначим функцию $\dfrac{t^\nu}{\Gamma(1+\nu)}$, где $\nu \geqslant 0$, через $\dfrac{1}{p^\nu}$. Легко доказывается [1], что при таком обозначении верно равенство

$$\frac{1}{p^\nu} * \frac{1}{p^\mu} = \frac{1}{p^{\nu+\mu}}.$$

Следовательно, при всех $\nu \geqslant 0$ справедлива формула

$$\frac{1}{p^\nu} = \frac{t^\nu}{\Gamma(1+\nu)}.$$

1.3. Одной из основных задач операционного исчисления является изучение операторов вида $R(p)$, где $R(z)$ — некоторая функция переменной z. В простейшем случае, когда $R(z) = \sum\limits_k \alpha_k z^k$ есть полином, оператор $R(p)$ равен $\sum\limits_k \alpha_k p^k$. Действия над такими полиномами выполняются таким же образом, как и в элементарной алгебре.

Рассмотрим приводимость операторных полиномов к функциям [1, 4].

Теорема 1.3.1. *Если полином* $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k p^k$ *приводится к функциям, то* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Из этой теоремы вытекает, что если степень многочлена $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ больше или равна единице, то соответствующий оператор $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k p^k$ не может быть приведен к функции.

Совокупность всех операторов вида $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k p^k$, $0 \leqslant n < \infty$, образует кольцо. Это кольцо может быть расширено до поля отношений. Элементами поля будут рациональные дроби от оператора p, т. е. операторы вида $R(p) = \dfrac{P_n(p)}{Q_m(p)}$, где $P_n(p) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k p^k$ и $Q_m(p) = \sum\limits_{k=0}^{m} \beta_k p^k$. Оператор $R(p)$ называется рациональным оператором. Каждой рациональной дроби $R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ отвечает рациональный оператор $R(p)$. Это соответствие устанавливает изоморфизм между полем всех рациональных дробей и полем рациональных операторов. Само поле рациональных операторов содержится в поле $\mathfrak{M}$ и, следовательно, является подполем поля $\mathfrak{M}$.

Из теоремы 1.3.1 например следует, что любые рациональные операторы вида $\dfrac{1}{p-\lambda}$ и $\dfrac{p-\lambda}{p-\mu}$ являются функциями, принадлежащими кольцу M. В частности справедлива формула:

$$\frac{p}{(p-\mu)^{n+1}} = \frac{t^n e^{\mu t}}{n!}. \tag{1.3.1}$$

Вопрос о приводимости к функциям произвольного рационального оператора разрешает [1, 4]

Теорема 1.3.2. *Для того, чтобы рациональный оператор* $R(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ *приводился к функции, необходимо и достаточно, чтобы степень полинома* $P(p)$ *была меньше или равна степени полинома* $Q(p)$.

1.4. Обозначим через $S \subset M$ множество функций $f(t)$, для которых интеграл Лапласа

$$f^*(z) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt \tag{1.4.1}$$

сходится абсолютно. Через S^* обозначим множество всех функций комплексной переменной $z = x + iy$, представимых интегралом (1.4.1), где $f(t) \in S$. Множество S^* состоит из функций аналитических в полуплоскостях $\operatorname{Re} z > \gamma$. Число γ, вообще говоря, зависит от выбора функции $f^*(z)$. Очевидно, S^* есть линейное множество. Кроме того, из теоремы Бореля следует, что если $f^*(z) \in S^*$ и $g^*(z) \in S^*$, то и их произведение $f^*(z)g(z)^*$ тоже принадлежит S^*, т. е. S^* есть кольцо относительно обычных операций сложения и умножения.

Множество всех преобразуемых по Лапласу операторов образует поле [1, 2, 3]. Это поле будем обозначать через $\mathfrak{M}(S)$.

Можно показать, что каждому оператору $a \in \mathfrak{M}(S)$ ставится в соответствие функция $\overline{a}\,(z)$, преобразуемая по Лапласу.

Это преобразование a в $\overline{a}\,(z)$ часто обозначают символом

$$a \risingdotseq \overline{a}\,(z). \tag{1.4.2}$$

Обозначим через $\overline{\mathfrak{M}}\,(S)$ образ поля $\mathfrak{M}(S)$ при преобразовании (1.4.2); элементами множества $\overline{\mathfrak{M}}\,(S)$ являются функции $\overline{a}\,(z) = \dfrac{F^*(z)}{G^*(z)}$, где $F^*(z)$ и $G^*(z)$ представимы абсолютно сходящимися интегралами Лапласа. Существует известная теорема [1, 3], утверждающая изоморфизм полей $\mathfrak{M}(S)$ и $\overline{\mathfrak{M}}\,(S)$, на деталях которой мы не будем останавливаться.

Заметим только, что благодаря ей в поле $\mathfrak{M}$ выделено подполе $\mathfrak{M}(S)$ операторов, которые можно представить в виде функций от оператора p:

$$a = \overline{a}\,(p) \risingdotseq \overline{a}\,(z). \tag{1.4.3}$$

В ряде случаев обозначение оператора $\dfrac{1}{t}$ и комплексного числа z одной и той же буквой упрощает изложение. Таким образом, буква p в поле $\mathfrak{M}$ означает оператор $\dfrac{1}{t}$, а в поле $\overline{\mathfrak{M}}\,(S)$ элемент p есть комплексное число $p = \sigma + i\tau$.

В связи с тем, что любая функция $f(t)$ множества S представима в виде $f(t) = \overline{f}\,(p)$, выражение $\overline{f}\,(p)$ называют операторным изображением функции $f(t)$. Здесь

$$\overline{f}\,(p) = p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt. \tag{1.4.4}$$

2. Решение для одного класса биномиальных дробных дифференциальных уравнений

Всюду ниже введем обозначение, согласно которому D_{0+}^{α} означает оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля [5], такой что для любой функции $f(t) \in M$ (или $f(t) \in \mathfrak{M}(M)$):

$$D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int\limits_0^t \frac{f(x)\,dx}{(t-x)^{\alpha-n+1}},$$

где параметр дифференцирования α изменяется в пределах $n-1 < \alpha \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$.

2.1. Однородный случай. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$\begin{gathered} C_q^q \cdot D_{0+}^{q\alpha} f(t) + C_q^{q-1} \cdot D_{0+}^{(q-1)\alpha} f(t) + C_q^{q-2} \cdot D_{0+}^{(q-2)\alpha} f(t) + \ldots \\ + C_q^2 \cdot D_{0+}^{2\alpha} f(t) + C_q^1 \cdot D_{0+}^{\alpha} f(t) + C_q^0 f(t) = 0, \end{gathered} \tag{2.1.1}$$

где функция $f(t) \in M$, $C_q^{\nu} = q!/\nu!(q-\nu)!$ — биномиальные коэффициенты ($C_q^q = C_q^0 = 1$), параметр $q \in \mathbb{N}$.

Уравнение (2.1.1) удобно переписать в свернутом виде:

$$(D_{0+}^{\alpha} + 1)^q f(t) = 0. \tag{2.1.2}$$

Запишем начальные условия для уравнения (2.1.2)

$$D_{0+}^{\nu\alpha-k} f(0) = a_k^{\nu}, \quad k = 1, 2, \ldots, \nu n. \tag{2.1.3}$$

Здесь a_k^{ν} некоторые вещественные числа.

Нас интересует решение $f(t)$ уравнения (2.1.2) с начальными условиями (2.1.3) в операторном поле $\mathfrak{M}(M)$ для любого натурального параметра q.

Прежде всего обобщим выражение (1.2.4) на случай дробного показателя степени оператора дифференцирования p.

Лемма 2.1.1. *Для любой функции $f(t)$ из кольца M и показателя α такого, что $n-1 < \alpha \leqslant n$, где $n \in \mathbb{N}$, операционное произведение $p^{\alpha} * f(t)$ в операторном поле $\mathfrak{M}(M)$ приводит к следующему выражению:*

$$\begin{gathered} p^{\alpha} * f(t) = D_{0+}^{\alpha} f(t) + p D_{0+}^{\alpha-1} f(0) + p^2 D_{0+}^{\alpha-2} f(0) + \ldots \\ + p^{n-1} D_{0+}^{\alpha-(n-1)} f(0) + p^n D_{0+}^{\alpha-n} f(0). \end{gathered} \tag{2.1.4}$$

$\lhd$ Пусть функция $f(t)$ принадлежит функциональному кольцу M. Согласно определениям операторов p и D_{0+}^{α} при значениях параметра α, $0 < \alpha \leqslant 1$ формула (1.2.2) приобретает вид:

$$p^{\alpha} * f(t) = D_{0+}^{\alpha} f(t), \quad f(0) = 0.$$

Действительно, воспользуемся для вычисления $p^{\alpha} * f(t)$ определением (1.1.1). В силу принципа аналитического продолжения для гамма-функции формула (1.2.6) при $\nu < 0$ дает:

$$p^{\nu} = \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}, \quad \nu \neq 1, 2, \ldots$$

Тогда сразу имеем

$$p^\alpha * f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{f(u)\,du}{(t-u)^\alpha} = D^\alpha_{0+} f(t).$$

Если $f(t)$ произвольная функция из кольца M, то

$$p^\alpha * f(t) = D^\alpha_{0+} f(t) + p^\alpha f(0), \tag{$*.1$}$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$ и $f(0) \neq 0$. Так как правая часть последнего выражения принадлежит полю $\mathfrak{M}(M)$, то выбирая параметр β_1, $0 < \beta_1 \leqslant 1$, повторным применением ($*.1$) найдем:

$$p^{\alpha+\beta_1} * f(t) = D^{\alpha+\beta_1}_{0+} f(t) + p^{\beta_1} D^\alpha_{0+} f(0) + p^{\alpha+\beta_1} f(0), \tag{$*.2$}$$

где оператор $p^{\alpha+\beta_1}$ есть $p^\alpha * p^{\beta_1}$. Здесь учтено полугрупповое свойство оператора D^α_{0+} [5].

Пусть теперь выбраны параметры β_i, $0 < \beta_i \leqslant 1$, $i = 1, \dots, m$ ($m \in \mathbb{N}$). Покажем по индукции верность ($*.2$) для всех β_i, $i = 1, \dots, m$. Введем индукционное предположение для $i = m-1$:

$$\begin{aligned} p^{\alpha+\beta_1+\ldots+\beta_{m-1}} * f(t) = D^{\alpha+\beta_1+\ldots+\beta_{m-1}}_{0+} f(t) &+ p^{\beta_{m-1}} D^{\alpha+\beta_1+\ldots+\beta_{m-2}}_{0+} f(0) \\ &+ p^{\beta_{m-1}+\beta_{m-2}} D^{\alpha+\beta_1+\ldots+\beta_{m-3}}_{0+} f(0) + \ldots \\ &+ p^{\beta_{m-1}+\ldots+\beta_1} D^\alpha_{0+} f(0) + p^{\beta_{m-1}+\ldots+\beta_1+\alpha} f(0). \end{aligned} \tag{$*.3$}$$

Из принадлежности правой части ($*.3$) полю $\mathfrak{M}(M)$ и применением к нему оператора p^{β_m} найдем искомое

$$\begin{aligned} p^{\alpha+\beta_1+\ldots+\beta_m} * f(t) = D^{\alpha+\beta_1+\ldots+\beta_m}_{0+} f(t) + p^{\beta_m} D^{\alpha+\beta_1+\ldots+\beta_{m-1}}_{0+} f(0) + \ldots \\ + p^{\beta_m+\ldots+\beta_1} D^\alpha_{0+} f(0) + p^{\alpha+\beta_1+\ldots+\beta_m} f(0). \end{aligned} \tag{$*.4$}$$

В частности, при $n-1 < \alpha \leqslant n$, выражение ($*.4$) запишется в виде:

$$p^\alpha * f(t) = D^\alpha_{0+} f(t) + p D^{\alpha-1}_{0+} f(0) + p^2 D^{\alpha-2}_{0+} f(0) + \ldots + p^{n-1} D^{\alpha-(n-1)}_{0+} f(0) + p^\alpha f(0). \tag{$*.5$}$$

С другой стороны, если выбрать параметр α в виде $\alpha = n - \beta$ ($0 \leqslant \beta < 1$), то из ($*.5$) получаем:

$$p^\alpha * f(t) = D^\alpha_{0+} f(t) + p D^{\alpha-1}_{0+} f(0) + \ldots + p^n D^{\alpha-n}_{0+} f(0). \quad \triangleright$$

Замечание. Форма записи (2.1.4) является более предпочтительной, так как в отличии от выражения ($*.5$) в нем присутствует в явном виде коэффициент $b_n = D^{\alpha-n}_{0+} f(0)$, тогда как в ($*.5$) его необходимо дополнительного выделять из последнего члена $p^\alpha f(0)$.

Из леммы 2.1.1 непосредственно следует

Лемма 2.1.2. *Пусть задана произвольная функция $f(t)$ из функционального кольца M с начальными условиями $D^{\alpha-k}_{0+} f(0) = b_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, где параметр α таков, что $n-1 < \alpha \leqslant n$, $n = 1, 2, \dots$ Тогда в поле $\mathfrak{M}(M)$ операторное изображение выражения $D^\alpha_{0+} f(t)$ имеет вид:*

$$D^\alpha_{0+} f(t) = p^\alpha * f(t) - \sum_{k=1}^n b_k p^k. \tag{2.1.5}$$

Прежде чем переходить к собственно решению уравнений вида (2.1.2) сформулируем две известные из [5] теоремы единственности.

Теорема $(*.1)$. *Пусть $p_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, и $g(x)$ — непрерывные в интервале $(0, h)$ функции. Тогда задача Коши*

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{m} p_k(x) D_{0+}^{(m-k)\alpha} f(x) = g(x), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,\\ D_{0+}^{k\alpha-1} f(+0) = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m,\end{gathered} \tag{2.1.6}$$

имеет единственное непрерывное на $(0, h)$ решение.

Теорема $(*.2)$. *При условиях теоремы $(*.1)$ задача Коши*

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{m} p_k(x) D_{0+}^{(m-k)\alpha} f(x) = g(x), \quad n-1 < \alpha \leqslant n,\\ D_{0+}^{k\alpha-j} f(+0) = b_{k,j}, \quad k = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n,\end{gathered} \tag{2.1.7}$$

имеет единственное непрерывное на $(0, h)$ решение.

Следствие. *Из теорем $(*.1)$ и $(*.2)$ следует, что уравнения вида (2.1.2) с начальными условиями (2.1.3) имеют единственное на интервале $(0, \infty)$ решение и значит в силу изоморфизма полей $\mathfrak{M}(S)$ и $\overline{\mathfrak{M}(S)}$ (см. пункт 1.4) операторное решение уравнений (2.1.2) в поле $\mathfrak{M}(S) \subset \mathfrak{M}(M)$ будет также единственно.*

При этом априорно полагается, что функция $f(x)$ преобразуема по Лапласу.

Нахождение явного вида решения уравнения (2.1.2) проведем в два этапа. В начале рассмотрим функциональное представление оператора, заданного структурой уравнения (2.1.2), в кольце M. Затем, исходя из вида этого функционального представления найдем операторное решение (2.1.2) в общем виде.

Введем в рассмотрение оператор $\mathcal{B}_\alpha^q(p) \in \mathfrak{M}(M)$:

$$\mathcal{B}_\alpha^q(p) \equiv \frac{1}{(p^\alpha + 1)^q}, \quad n-1 < \alpha \leqslant n,\ n, q \in \mathbb{N}. \tag{2.1.8}$$

Как будет показано ниже (см. теорему 2.2.2) данный оператор приводим к функции.

Лемма 2.1.3. *Функциональное представление оператора $\mathcal{B}_\alpha^q(p) \in \mathfrak{M}(M)$ в кольце M при любых α и $n, q \in \mathbb{N}$ задается следующим выражением:*

$$\mathcal{B}_\alpha^q(p) \equiv \frac{1}{(p^\alpha + 1)^q} = t^{q\alpha} \widetilde{P}_{q-1}\Big(t^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big) E_{\alpha, q\alpha+1}(-t^\alpha), \tag{2.1.9}$$

где $E_{\alpha,\beta}(x)$ — функция Миттаг — Леффлера, а $\widetilde{P}_m(x)$ есть полином степени m от x, коэффициенты которого подлежат вычислению для каждого данного $m = 0, 1, 2, \ldots$

$\triangleleft$ Согласно определению степени оператора в поле $\mathfrak{M}(M)$ оператор $\mathcal{B}_\alpha^q(p)$ равен произведению операторов $\mathcal{B}_\alpha^1(p)$ взятых q раз, т. е.

$$\mathcal{B}_\alpha^q(p) = \underset{(1)}{\mathcal{B}_\alpha^1(p)} * \underset{(2)}{\mathcal{B}_\alpha^1(p)} * \ldots * \underset{(q)}{\mathcal{B}_\alpha^1(p)}, \tag{$*.1$}$$

где $\mathcal{B}_\alpha^1(p) = \dfrac{1}{p^\alpha + 1}$.

Оператор $\mathcal{B}^1_\alpha(p)$, согласно теореме 1.3.2, будучи рациональным оператором, приводится к функции при любых α, $n-1<\alpha\leqslant n$ и $n\in\mathbb{N}$. Следовательно, если рассмотреть формально, полное разложение оператора $\mathcal{B}^1_\alpha(p)$ в ряд по степеням p вида $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k p^k$, то по теореме 1.3.1 все коэффициенты при положительных степенях p обратятся в нуль $c_1=c_2=\ldots=0$. Таким образом, формальное разложение оператора $\mathcal{B}^1_\alpha(p)$ в ряд по степеням p может быть только вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}$. Осуществляя такое разложение в поле $\mathfrak{M}(M)$, сразу найдем:

$$\mathcal{B}^1_\alpha(p)=\frac{1}{p^\alpha+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p^{\alpha k+\alpha}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k+\alpha}}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1)}=t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-t^\alpha). \qquad (*.2)$$

Подстановка $(*.2)$ в $(*.1)$ в силу свойства (1.2.5) дает

$$\frac{1}{(p^\alpha+1)^q}=t^{q\alpha}\sum_{k_1\ldots k_q=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1+\ldots+k_q}t^{\alpha(k_1+\ldots+k_q)}}{\Gamma[\alpha(k_1+\ldots+k_q)+\alpha q+1]}. \qquad (*.3)$$

Из $(*.3)$ видно, что основная техническая трудность представления $\mathcal{B}^1_\alpha(p)$ в кольце M связана со сведением многомерной суммы по индексам $k_1,\ldots,k_q$ к одномерной сумме по k, что аналогично задаче сведения многомерного интеграла к одномерному. В общем случае легко показать, что

$$\sum_{k_1,\ldots,k_q=0}^{\infty}a(k_1,\ldots,k_q)=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{P}_{q-1}(k)a(k), \qquad (*.4)$$

где $\widetilde{P}_{q-1}(k)$ — многочлен степени $q-1$ от k. Однако, как показывают вычисления, обобщение на общий $a(k_1,\ldots,k_q)$ не носит простой характер и поэтому записать явно $\widetilde{P}_{q-1}(k)$ для произвольного $q\in\mathbb{N}$ не представляется возможным. В связи с этим для каждого данного $q=1,2,\ldots$ необходимо производить отдельные вычисления.

Применяя $(*.4)$ к выражению $(*.3)$ найдем

$$\frac{1}{(p^\alpha+1)^q}=t^{q\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{P}_{q-1}(k)\frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha q+1)},$$

откуда непосредственно следует (2.1.9). $\triangleright$

Выражение (2.1.9) леммы 2.1.3 естественным образом приводит к определению новых специальных функций, являющихся некоторым обобщением для функций типа Миттаг–Леффлера.

Определение 2.1.1. Функциями $E^{q-1}_{\alpha,\beta}(x)$, определенными для вещественных $x\in\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$, будем называть функции вида:

$$E^{q-1}_{\alpha,\beta}(x)\equiv\widetilde{P}_{q-1}\Big(x\frac{\partial}{\partial x}\Big)E_{\alpha,\beta}(x),\quad q=1,2,\ldots, \qquad (2.1.10)$$

где $\widetilde{P}_m(x)$ определен в лемме 2.1.3 и $E^0_{\alpha,\beta}(x)=E_{\alpha,\beta}(x)$.

Применяя функции (2.1.10), выражение (2.1.9) для оператора $\mathcal{B}^q_\alpha(p)$ принимает простой вид:

$$\mathcal{B}^q_\alpha(p)=t^{q\alpha}E^{q-1}_{\alpha,q\alpha+1}(-t^\alpha). \qquad (2.1.11)$$

Теорема 2.1.1. *Общее решение класса уравнений вида* $(D^{\alpha}_{0+}+1)^q f(t)=0$ *с начальными условиями* $D^{\nu\alpha-k}_{0+}f(0)=a^{\nu}_{k}$, *где* $n-1<\alpha\leqslant n$; $q,n=1,2,\ldots$, *в операторном поле* $\mathfrak{M}(M)$ *равно*

$$f(t)=\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{k=1}^{\nu n}C^{\nu}_{q}a^{\nu}_{k}\cdot t^{q\alpha-k}E^{q-1}_{\alpha,q\alpha+1-k}(-t^{\alpha}). \tag{2.1.12}$$

◁ В соответствии с леммой 2.1.2 операторное изображение уравнения (2.1.2) с начальными условиями (2.1.3) принимает вид:

$$(p^{\alpha}+1)^q\overline{f}(p)=P^{\Sigma}_{n}(p), \tag{$*$.1}$$

где $\overline{f}(p)$ — операторное изображение $f(t)$, $P^{\Sigma}_{n}(p)$ — операторная сумма:

$$P^{\Sigma}_{n}(p)\equiv\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{k=1}^{\nu n}C^{\nu}_{q}a^{\nu}_{k}\cdot p^{k}. \tag{$*$.2}$$

Операторное решение уравнения ($*$.1) в поле $\mathfrak{M}(M)$ с использованием оператора $\mathcal{B}^{q}_{\alpha}(p)$ сводится к выражению:

$$\overline{f}(p)=P^{\Sigma}_{n}(p)*\mathcal{B}^{q}_{\alpha}(p), \tag{$*$.3.a}$$

или учитывая явное выражение ($*$.2) для $P^{\Sigma}_{n}(p)$ к

$$\overline{f}(p)=\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{k=1}^{\nu n}C^{\nu}_{q}a^{\nu}_{k}\cdot(p^{k}*\mathcal{B}^{q}_{\alpha}(p)). \tag{$*$.3.б}$$

Проводя стандартные вычисления в поле $\mathfrak{M}(M)$ для всех $k=1,\ldots,\nu n$ и $\nu=1,\ldots,q$, легко найти:

$$p^{k}*\mathcal{B}^{q}_{\alpha}(p)=t^{q\alpha-k}E^{q-1}_{\alpha,q\alpha+1-k}(-t^{\alpha}). \tag{$*$.4}$$

Здесь использовано выражение (2.1.11) для $\mathcal{B}^{q}_{\alpha}(p)$. Следовательно, учитывая операторное равенство $f(t)=\overline{f}(p)$ в поле $\mathfrak{M}(M)$ (см. пункт 1.4) из ($*$.3) и ($*$.4) найдем общее решение уравнения (2.1.2) в виде (2.1.12). ▷

Пример 2.1.1. Пусть $q=1$; уравнение (2.1.2) имеет вид:

$$(D^{\alpha}_{0+}+1)f(t)=0, \tag{2.1.13}$$

где $n-1<\alpha\leqslant n$, $n\in\mathbb{N}$. Начальные условия равны

$$D^{\alpha-k}_{0+}f(0)=a^{1}_{k}=a_{k}, \tag{2.1.14}$$

где $k=1,2,\ldots,n$. Согласно (2.1.12) для уравнения (2.1.13) найдем

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}a_{k}\cdot t^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha+1-k}(-t^{\alpha}), \tag{2.1.15}$$

т. е. известный из [5] результат.

Пример 2.1.2. Пусть $q=2$, уравнение (2.1.2) имеет вид:

$$(D^{2\alpha}_{0+}+2D^{\alpha}_{0+}+1)f(t)=0, \tag{2.1.16}$$

где $n-1<\alpha\leqslant n$. Начальные условия равны:

$$D_{0+}^{\nu\alpha-k}f(0)=a_k^\nu,\quad k=1,2,\dots,\nu n;\ \ \nu=1,2. \tag{2.1.17}$$

Общее решение для (2.1.16) согласно (2.1.12) равно:

$$\begin{aligned} f(t)&=\sum_{\nu=1}^{2}\sum_{k=1}^{\nu n}C_2^\nu a_k^\nu\cdot t^{2\alpha-k}E^1_{\alpha,2\alpha+1-k}(-t^\alpha)\\ &=\sum_{\nu=1}^{2}\sum_{k=1}^{\nu n}C_2^\nu a_k^\nu\cdot t^{2\alpha-k}\Big(1+t^\alpha\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big)E_{\alpha,2\alpha+1-k}(-t^\alpha). \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Пример 2.1.3. Пусть $q=3$, $n\in\mathbb{N}$, $n-1<\alpha\leqslant n$ и $\nu=1,2,3$. Тогда уравнение (2.1.2) вместе с начальными условиями принимает вид:

$$(D_{0+}^{3\alpha}+3D_{0+}^{2\alpha}+3D_{0+}^{\alpha}+1)f(t)=0,\quad D_{0+}^{\nu\alpha-k}f(0)=a_k^\nu,\quad k=1,2,\dots,\nu n. \tag{2.1.19}$$

Общее решение для (2.1.19) согласно (2.1.12) равно:

$$\begin{aligned} f(t)&=\sum_{\nu=1}^{3}\sum_{k=1}^{\nu n}C_3^\nu a_k^\nu\cdot t^{3\alpha-k}E^2_{\alpha,3\alpha+1-k}(-t^\alpha)\\ &=\sum_{\nu=1}^{3}\sum_{k=1}^{\nu n}C_3^\nu a_k^\nu\cdot t^{3\alpha-k}\Big[1+\frac{3}{2}\Big(t^\alpha\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big)+\frac{1}{2}\Big(t^\alpha\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big)^2\Big]E_{\alpha,3\alpha+1-k}(-t^\alpha). \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Пример 2.1.4. Пусть $q=4$, $n-1<\alpha\leqslant n$, $n\in\mathbb{N}$ и $\nu=1,2,3,4$. Тогда уравнение (2.1.2) вместе с начальными условиями принимает вид:

$$\begin{gathered} (D_{0+}^{4\alpha}+4D_{0+}^{3\alpha}+6D_{0+}^{2\alpha}+4D_{0+}^{\alpha}+1)f(t)=0,\\ D_{0+}^{\nu\alpha-k}f(0)=a_k^\nu,\quad k=1,2,\dots,\nu n. \end{gathered} \tag{2.1.21}$$

Общее решение для (2.1.21) согласно (2.1.12) равно:

$$\begin{aligned} f(t)&=\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{k=1}^{\nu n}C_4^\nu a_k^\nu\cdot t^{4\alpha-k}E^3_{\alpha,4\alpha+1-k}(-t^\alpha)=\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{k=1}^{\nu n}C_4^\nu a_k^\nu t^{4\alpha-k}\\ &\times\Big[1+\frac{11}{6}\Big(t^\alpha\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big)+\Big(t^\alpha\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big)^2+\frac{1}{6}\Big(t^\alpha\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big)^3\Big]E_{\alpha,4\alpha+1-k}(-t^\alpha). \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

В (2.1.20) и в (2.1.22) оператор $\Big(t^\alpha\dfrac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big)^m$ понимается как оператор $\Big(t^\alpha\dfrac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big)$ взятый m раз подряд.

Исходя из теоремы 2.1.1 легко произвести следующее простое обобщение.

Теорема 2.1.2. *Общее решение класса уравнений вида*

$$(D_{0+}^{\alpha}+\lambda)^q f(t)=0 \tag{2.1.23}$$

с начальными условиями $D_{0+}^{\nu\alpha-k}f(0)=a_k^\nu$, *где* λ *— произвольное вещественное число,* $q,n=1,2,\dots$, $n-1<\alpha\leqslant n$, *в операторном поле* $\mathfrak{M}(M)$ *равно:*

$$f(t)=\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{k=1}^{\nu n}C_q^\nu\lambda^{q-\nu}a_k^\nu\cdot t^{q\alpha-k}E^{q-1}_{\alpha,q\alpha+1-k}(-\lambda t^\alpha). \tag{2.1.24}$$

$\triangleleft$ В соответствии с леммой 2.1.2 операторное изображение уравнения (2.1.13) с начальными условиями (2.1.3) принимает вид:

$$(p^\alpha+\lambda)^q \bar{f}(p)=P_n^\Sigma(p;\lambda), \tag{$*.1$}$$

где $\bar{f}(p)$ — операторное изображение $f(t)$, $P_n^\Sigma(p;\lambda)$ — операторная сумма:

$$P_n^\Sigma(p;\lambda)\equiv\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{k=1}^{\nu n}C_q^\nu\lambda^{q-\nu}a_k^\nu\cdot p^k. \tag{$*.2$}$$

Введем оператор $\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda)$ такой, что:

$$\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda)\equiv\frac{1}{(p^\alpha+\lambda)^q},\quad \mathcal{B}_\alpha^q(p;1)=\mathcal{B}_\alpha^q(p). \tag{$*.3$}$$

Простое обобщение показывает, что в кольце M верно представление:

$$\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda)=t^{q\alpha}E_{\alpha,q\alpha+1}^{q-1}(-\lambda t^\alpha). \tag{$*.4$}$$

Тогда с использованием оператора $\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda)$ операторное решение уравнения ($*$.4) в поле $\mathfrak{M}$ сводится к выражению:

$$\bar{f}(p)=P_n^\Sigma(p;\lambda)*\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda). \tag{$*.5$}$$

Проводя простые вычисления в поле $\mathfrak{M}$ с ($*$.4), найдем:

$$p^k*\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda)=t^{q\alpha-k}E_{\alpha,q\alpha+1-k}^{q-1}(-\lambda t^\alpha). \tag{$*.6$}$$

Подставляя ($*$.6) в ($*$.5) и учитывая операторное равенство $f(t)=\bar{f}(p)$ в поле $\mathfrak{M}$, получим общее решение для (2.1.23) в виде выражения (2.1.24). $\triangleright$

2.2 Неоднородный случай. Рассмотрим теперь класс неоднородных уравнений, когда с правой стороны уравнения (2.1.23) стоит некоторая функция из M.

Теорема 2.2.1. *Общее решение класса уравнений вида*

$$(D_{0+}^\alpha+\lambda)^q f(t)=g(t), \tag{2.2.1}$$

с начальными условиями

$$D_{0+}^{\nu\alpha-k}f(0)=a_k^\nu,$$

где $g(t)$ — произвольная функция из кольца M, λ — вещественное число, $q,n=1,2,\ldots$; $n-1<\alpha\leqslant n$ в операторном поле $\mathfrak{M}(M)$ равно:

$$\begin{aligned} f(t)=&\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{k=1}^{\nu n}\widetilde{a}_k^{q,\nu}(\lambda)\cdot t^{q\alpha-k}E_{\alpha,q\alpha+1-k}^{q-1}(-\lambda t^\alpha)\\ &+\frac{d}{dt}\int_0^t(t-u)^{q\alpha}E_{\alpha,q\alpha+1}^{q-1}[-\lambda(t-u)^\alpha]\cdot g(u)\,du, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

где коэффициенты $\widetilde{a}_k^{q,\nu}(\lambda)=C_q^\nu\lambda^{q-\nu}a_k^\nu$.

$\triangleleft$ В соответствии с леммой 2.1.2 операторное изображение уравнения (2.2.1) с начальными условиями (2.1.3) принимает вид:

$$(p^\alpha+\lambda)^q \bar{f}(p)=P_n^\Sigma(p;\lambda)+\bar{g}(p), \tag{$*.1$}$$

где $\bar{f}(p)$ и $\bar{g}(p)$ — операторные изображения для $f(t)$ и $g(t)$, $P_n^{\Sigma}(p;\lambda)$ определено в теореме 2.1.2 (см. доказательство).

Операторное решение уравнения $(*.1)$ в поле $\mathfrak{M}$ сводится к сумме однородного и неоднородного членов:

$$\bar{f}(p) = P_n^{\Sigma}(p;\lambda) * \mathcal{B}_{\alpha}^{q}(p;\lambda) + \bar{g}(p) * \mathcal{B}_{\alpha}^{q}(p;\lambda). \qquad (*.2)$$

Первый член в $(*.2)$ есть результат теоремы 2.1.2. Для второго члена следует лишь учесть определение операторного произведения (1.1.1) в поле $\mathfrak{M}$ и выражение $(*.4)$ теоремы 2.1.2 для оператора $\mathcal{B}_{\alpha}^{q}(p;\lambda)$. Отсюда сразу найдем:

$$\bar{g}(p) * \mathcal{B}_{\alpha}^{q}(p;\lambda) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-u)^{q\alpha} E_{\alpha,q\alpha+1}^{q-1}\big[-\lambda(t-u)^{\alpha}\big]\cdot g(u)\,du. \quad \rhd$$

Сделаем замечание относительно природы решений уравнений класса (2.2.1).

Теорема 2.2.2. *В общем случае решение $f(t)$ любого уравнения класса* (2.2.1) *вида*

$$(D_{0+}^{\alpha} + \lambda)^q f(t) = g(t)$$

с начальными условиями (2.1.3)*, где $g(t) \in M$, $q, n \in \mathbb{N}$ и $n-1 < \alpha < n$, принадлежит множеству операторов поля $\mathfrak{M}(M)$ при любых значениях входящих параметров q, n и α.*

Замечание. Другими словами, решением любого уравнения класса (2.2.1) является некоторый оператор $\bar{f}(p)$ из поля $\mathfrak{M}(M)$ (а не функция $f(t)$!). Поэтому некорректно говорить о функциональном решении уравнения вида (2.2.1). Однако в приложениях (например, в задачах теоретической физики) использование понятия оператора поля $\mathfrak{M}(M)$ во многом не удобно для исследований. В связи с этим, можно условно для оператора $\bar{f}(p)$, являющегося (частным или общим) решением некоторого уравнения вида (2.2.1) использовать запись в виде функции $f(t)$ (что и было сделано в методических целях при формулировках теорем 2.1.1, 2.1.2 и 2.2.1), памятуя при этом, что, строго говоря, $f(t)$ есть $\bar{f}(p) = f\big(\frac{1}{t}\big)$.

$\lhd$ Согласно $(*.2)$ теоремы 2.2.1 $\overline{f}(p)$ имеет вид:

$$\overline{f}(p) = P_n^{\Sigma}(p;\lambda) * \mathcal{B}_{\alpha}^{q}(p;\lambda) + \mathcal{B}_{\alpha}^{q}(p;\lambda) * \overline{g}(p).$$

Если хотя бы одно из двух слагаемых в данном выражении есть оператор, то очевидно и все $\overline{f}(p)$ есть оператор. Так как $\overline{g}(p)$ в общем случае произвольно, то нам достаточно рассмотреть только первое слагаемое. Нужно показать, что при любых q, n и α из условия теоремы 2.2.2 оператор $P_n^{\Sigma}(p;\lambda) * \mathcal{B}_{\alpha}^{q}(p;\lambda)$ не приводится к функции, т. е. не приводится к виду $\dfrac{F(t)}{t}$, где $F(0) = 0$ (см. пункт 1.2).

Так как, вообще говоря, всякая функция $y(t)$ из функционального кольца M есть частный случай некоторого оператора $\overline{y}(p)$ из поля $\mathfrak{M}$, то в терминологических целях будем называть оператор $\varphi(p)$ из поля $\mathfrak{M}$ собственно оператором, если никаким образом он не сводится к виду $\dfrac{F(t)}{t}$, $F(0) = 0$, где $F(t) \in M$.

Разберем отдельно составляющие оператора $P_n^{\Sigma}(p;\lambda) * \mathcal{B}_{\alpha}^{q}(p;\lambda)$. В соответствии с теоремой 1.3.1 видно, что оператор $P_n^{\Sigma}(p;\lambda) = \sum\limits_{\nu=1}^{q}\sum\limits_{k=1}^{\nu n}\widetilde{a}_k^{q,\nu}(\lambda)\cdot p^k$ является собственно оператором. В то же время, по теореме 1.3.2 находим, что оператор $\mathcal{B}_{\alpha}^{q}(p;\lambda)$ сводится к функции, так как нулевой порядок числителя оператора $\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda)$ всегда меньше порядка его знаменателя, равного $q\alpha$ (см. $(*.3)$ теоремы 2.1.2). Функциональное представление для оператора $\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda)$ в кольце M дает выражение $(*.4)$ теоремы 2.1.2.

Произведение двух операторов $P_n^\Sigma(p;\lambda)$ и $\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda)$ является собственно оператором. Действительно, оператор $P_n^\Sigma(p;\lambda)*\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda)$ относится к классу рациональных операторов и имеет вид:

$$P_n^\Sigma(p;\lambda)*\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda)=\frac{1}{(p^\alpha+1)^q}*\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{k=1}^{\nu n}\widetilde{a}_k^{q,\nu}(\lambda)\cdot p^k.$$

Порядок знаменателя этого оператора равен $q\alpha$, порядок числителя равен qn, т. е. при любых значениях α, $n-1<\alpha<n$ верно $q\alpha<qn$, и значит, согласно теореме 1.3.2 оператор $P_n^\Sigma(p;\lambda)*\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda)$ не приводится к функции. $\rhd$

Замечание 1. Оператор $\mathcal{B}_\alpha^q(p;\lambda)*\overline{g}(p)$ может являться и не являться собственно оператором в зависимости от вида функции $g(t)$.

Замечание 2. При $\alpha=n$ оператор $P_n^\Sigma*\mathcal{B}_\alpha^q$ приводится к функции, что очевидно из равенства $q\alpha=qn$ и, следовательно, при $\alpha=n$ решение уравнений (2.2.1) переходит в класс функций поля $\mathfrak{M}(M)$, т. е. в кольцо M.

Операторную природу решений (2.2.1) легко продемонстрировать на простейшем примере 2.1.1. Пусть $n=1$ $(0<\alpha<1)$, $a_1=a=1$. Тогда решение уравнения (2.1.13) имеет вид: $f(t)=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)$. Хотя $E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)$ является функцией, «$f(t)$» — есть оператор, что видно из разложения:

$$\begin{aligned}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)&=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}p^{1-\alpha(k+1)}\\&=\frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)}-\frac{p^{1-2\alpha}}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2-\alpha)}+\frac{p^{1-3\alpha}}{\Gamma(3\alpha)\Gamma(2-\alpha)}-\ldots=f_\alpha(p),\end{aligned}$$

где $f_\alpha(p)$ — собственный оператор поля $\mathfrak{M}(M)$, так как ни при каких $\alpha\in(0,1)$ $f_\alpha(p)$ не сводится к функции.

Литература

1. *Диткин В. А.* Операционное исчисление // Успехи мат. наук.—1947.—Т. 22, вып. 6, № 2.—С. 72–158.
2. *Диткин В. А.* К теории операционного исчисления // Докл. АН СССР.—1957.—Т. 116.—С. 15–17.
3. *Диткин В. А.* К теории операционного исчисления // Докл. АН СССР.—1958.—Т. 123.—С. 395–396.
4. *Микусинский Я.* Операторное исчисление.—М.: ИЛ, 1956.—366 с.
5. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука, 1987.—688 с.

Статья поступила 5 сентября 2005 г.

Казбеков Каирбек Казбекович, к. ф.-м. н.
Владикавказ, Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН
E-mail: kairbek75@mail.ru