Владикавказский математический журнал
июль–сентябрь, 2006, Том 8, Выпуск 3

УДК **517.98**

ОБ ОБЕРТЫВАЮЩИХ C^*-АЛГЕБРАХ JB-АЛГЕБР

Ф. Н. Арзикулов

В данной статье исследуются обертывающие C^*-алгебры JB-алгебр. Доказано, что обратимая JB-алгебра является AJW-алгеброй (JW-алгеброй) тогда и только тогда когда ее обертывающая C^*-алгебра является AW^*-алгеброй (соответственно алгеброй фон Неймана).

Введение

В статье обсуждаются вопросы, касающиеся обертывающих C^*-алгебр JB-алгебр. Для этого мы используем понятие AJW-алгебры, введенное и исследованное в работах [1–3]. Эти йордановы операторные алгебры впервые были введены Топпингом в 1965 году (см. [3]). Топпинг изучил класс AJW-алгебр в рамках класса йордановых алгебр самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Далее, в работе [1] понятие AJW-алгебры было введено и изучено в рамках класса JB-алгебр. А также, в этой работе введено и исследовано понятие обертывающей AW^*-алгебры AJW-алгебры. Основной результат данной работы: *произвольная обратимая JB-алгебра является AJW-алгеброй (JW-алгеброй) тогда и только тогда когда ее обертывающая C^*-алгебра является AW^*-алгеброй (соответственно алгеброй фон Неймана).*

0. Терминология и обозначения

Говорят, что специальная JC-алгебра A является *обратимой*, если $a_1a_2\dots a_n + a_na_{n-1}\dots a_1$ принадлежит алгебре A всякий раз, когда $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$.

JB-алгебра A называется *AJW-алгеброй*, если она удовлетворяет условию: для всякого подмножества $S \subseteq A_+$ существует проектор $e \in A$ такой, что $S^\perp = U_e(A)$, где $U_ab = 2a\cdot(a\cdot b) - a^2\cdot b$, $S^\perp := \{a \in A : U_as = 0,\ s \in S\}$ и $U_e(A) := \{U_ea : a \in A\}$. Относительно AJW-алгебры в [1] доказана следующая теорема.

Введем обозначения

$$S^\perp := \{a \in A : U_ax = 0, x \in S\}, \quad {}^\perp S := \{x \in A : U_ax = 0, a \in S\},$$
$${}^\perp S_+ = {}^\perp S \cap A_+, \quad \mathrm{Ann}_J(P) = \{x \in A : x\cdot y = 0, y \in P\}$$

относительно йорданова умножения $\cdot$.

Теорема. *Для JB-алгебры A равносильны следующие условия:*
(a) *алгебра A обладает следующими свойствами:*

(1) *в частично упорядоченном множестве проекторов любое подмножество попарно ортогональных проекторов имеет точную верхнюю границу в этом множестве,*

(2) *любая максимальная сильно ассоциативная подалгебра порождается своими проекторами (т. е. совпадает с наименьшей замкнутой подалгеброй, содержащей ее проекторы);*

(b) *для любого подмножества* $S \subseteq A_+$ *существует такой проектор* $e \in A$, *что* $S^\perp = U_e(A)$;

(c) *для любого подмножества* $S \subseteq A$ *существует такой проектор* $e \in A$, *что* ${}^\perp S_+ = U_e(A_+)$.

(d) *для любого подмножества* $S \subseteq A_+$ *существует проектор* $e \in P(A)$ *такой, что* $Ann_J(S) = U_e(A)$.

Пусть A — C^*-алгебра. Как известно, множество $A_{sa} = \{x \in A : x^* = x\}$ с операцией умножения $x \cdot y = 1/2(xy + yx)$ для всяких $x, y \in A_{sa}$ является JC-алгеброй. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение. *Пусть* A — C^**-алгебра. Тогда* A_{sa} *является* AJW*-алгеброй тогда и только тогда когда* A *является* AW^**-алгеброй.*

$\triangleleft$ Пусть A_{sa} является AJW-алгеброй. Докажем, что для всякого $S \subseteq A$ аннулятор $\mathrm{Ann}(S) = \{x \in A : xs = 0$ для всякого $s \in S\}$ порождается проектором, т. е. $\mathrm{Ann}(S) = Ae$, $e \in P(A)$.

Пусть $S \subseteq A_+$. Тогда имеем $S \subseteq A_{sa}$ и $\mathrm{Ann}_J(S) \subseteq \mathrm{Ann}(S)_{sa}$. Более точно, если $xs = 0$ для $x \in A_{sa}$ и для всех $s \in S$, то для всякого $s \in S$ верно $x \cdot s = 0$. Так как A_{sa} является AJW-алгеброй, то существует проектор $e \in P(A)$ такой, что $\mathrm{Ann}_J(S) = eA_{sa}e$. Имеем $eA_{sa}e \subset \mathrm{Ann}(S)_{sa}$. Заметим, что $Ae \subset \mathrm{Ann}(S)$.

Пусть $x \in \mathrm{Ann}(S)$ и $x(1-e) \neq 0$. Берем $y = (1-e)x \cdot x(1-e)$. Имеем $x(1-e)s = xs - xes = 0$, т. е. $y \in \mathrm{Ann}(S)$ и $y \in A_{sa}$. Существуют проектор $f \in P(A)$ и элемент z в некоторой максимальной сильно ассоциативной подалгебре A_0 AJW-алгебры A_{sa}, содержащей элемент y такой, что $f = yz$. Имеем $ys = sy = 0$ и $y \in \mathrm{Ann}_J(S) = eA_{sa}e$. Так как $y \in (1-e)A_{sa}(1-e)$, то последнее является противоречием. Итак, $y = 0$ и $xe = x$. Отсюда $\mathrm{Ann}(S) = Ae$.

Пусть, теперь, S — произвольное подмножество C^*-алгебры A и $SS^* = \{aa^* \in A : a \in S\}$. Тогда SS^* является множеством самосопряженных элементов алгебры A. Утверждаем, что $\mathrm{Ann}(S) = \mathrm{Ann}(SS^*)$. Действительно, если $a \in \mathrm{Ann}(S)$, то $ass^* = (as)s^* = 0s^* = 0$ для всякого $ss^* \in SS^*$. Отсюда $a \in \mathrm{Ann}(SS^*)$. Тогда $\mathrm{Ann}(S) \subseteq \mathrm{Ann}(SS^*)$. Обратно, пусть, теперь $a \in \mathrm{Ann}(SS^*)$. Для произвольного $s \in S$ имеем $ass^* = 0$. Отсюда $ss^*a = 0$ и для йорданового умножения $\cdot$ имеем $a \cdot (ss^*) = 0$. Поэтому $al(ss^*) = 0$. Отсюда $as = al(s)s = 0$, поскольку $l(ss^*) = l(s)$. Следовательно, $\mathrm{Ann}(SS^*) \subseteq \mathrm{Ann}(S)$. Отсюда $\mathrm{Ann}(S) = \mathrm{Ann}(SS^*)$. Из предыдущей части доказательства имеем, существует проектор $e \in P(A)$ такой, что $\mathrm{Ann}(SS^*) = Ae$. Отсюда $\mathrm{Ann}(S) = Ae$.

Пусть A — AW^*-алгебра. Тогда A_{sa} является JC-алгеброй. Легко заметить, что для любого подмножества $S \subseteq A_+$ $\mathrm{Ann}(S)_{sa} \subseteq \mathrm{Ann}_J(S)$. В то же время, если $a \in \mathrm{Ann}_J(S)$, то в силу предложения 1 из [4] $as = sa = 1/2(as + sa) = 0$ для всякого $s \in S$. Отсюда $\mathrm{Ann}_J(S) \subseteq \mathrm{Ann}(S)_{sa}$. Поэтому существует проектор $e \in P(A)$ такой, что $\mathrm{Ann}_J(S) = U_e(A_{sa})$. Значит, A_{sa} является AJW-алгеброй. $\triangleright$

Приведем примеры AJW-алгебр.

1) Любая JBW-алгебра является AJW-алгеброй.

2) Алгебра $C(Q)$ всех непрерывных вещественных функций является AJW-алгеброй, если Q является экстремальным вполне несвязным компактом.

3) Алгебры вида $C(Q, B(H_K)_{sa})$ являются AJW-алгебрами, где $B(H_K)_{sa}$ — алгебра всех ограниченных самосопряженных операторов в конечномерном гильбертовом пространстве H_K над K, где $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, Q — экстремальный вполне несвязный компакт.

Другие примеры AJW-алгебр см. [5].

Пусть A — JC-алгебра самосопряженных линейных операторов в гильбертовом пространстве H. В дальнейшем для произвольного множества $B \subseteq A$ его $*$-слабое замыкание в $B(H)$ обозначим через $w(B)$. Через $R^*(A)$ будем обозначать равномерно замкнутую вещественную $*$-алгебру в $B(H)$, порожденную A. Для этой алгебры все аксиомы C^*-алгебры выполняются. Значит $R^*(A)$ является вещественной C^*-алгеброй. Далее, через $C^*(A)$ будем обозначать равномерно замкнутую комплексную $*$-алгебру в $B(H)$, порожденную A. Тогда $C^*(A) = R^*(A) + iR^*(A)$. Действительно, сумма $R^*(A) + iR^*(A)$ является комплексной $*$-алгеброй и для этой суммы выполняются все аксиомы C^*-алгебры. В данной работе $C^*(A)$ будем называть *обертывающей C^*-алгеброй A*. Для разнообразия, $R^*(A)$ будем называть *вещественной C^*-алгеброй*, порожденной A. Аналогично для произвольного подмножества $S \subseteq A$ через $C^*(S)$ (через $R^*(S)$) будем обозначать равномерно замкнутую комплексную (вещественную) $*$-алгебру в $B(H)$, порожденную A, и будем называть *C^*-алгеброй* (соответственно *вещественной C^*-алгеброй*), порожденной S. Подробности об этих понятиях имеются в работе [6]. Для J-алгебры A слабое замыкание алгебры $C^*(A)$ в $B(H)$ называют *обертывающей алгеброй фон Неймана JC-алгебры A* (см. [7]). Следующее предложение доказывается также как предложение 3.2 из [7].

Предложение. *JC-алгебра A обратима тогда и только тогда когда $A = R^*(A)_{sa}$.*

1. Йордановы алгебры, порожденные двумя элементами

1.1. Пусть A — обратимая AJW-алгебра, $C^*(A)$ — обертывающая C^*-алгебра A и $R^*(A)$ — вещественная C^*-алгебра, порожденная алгеброй A. Тогда в силу сказанного выше $C^*(A) = R^*(A) + iR^*(A)$ и $R^*(A)_{sa} = A$. Пусть p — проектор в $C^*(A)$. Тогда существуют такие элементы x, y в $R^*(A)$, что $p = x + iy$. Так как $p^2 = p$, $p^* = p$, то

$$x = x^2 - y^2, \quad y = yx + xy, \quad x^* = x, \quad y^* = -y. \tag{1.1}$$

В этом параграфе мы будем исследовать C^*-подалгебру $C^*(x, y)$, порожденную элементами x, y, связанными соотношением (1.1).

1.2. Предложение. *Пусть p — проектор алгебры $C^*(A)$, $p = x + iy$, $x, y \in R^*(A)$, и $R^*(x, y)$ — вещественная C^*-алгебра, порожденная элементами x, y. Далее, пусть $C^*(x)$ — C^*-подалгебра, порожденная элементом x. Тогда $C^*(x, y) = C^*(x) + yC^*(x)$ и $R^*(x, y) = C^*(x)_{sa} + yC^*(x)_{sa}$.*

$\lhd$ В силу (1.1) y^2, $y^{2k} \in C^*(x)$ для всякого $k \in \mathbb{N}$. Верно также,

$$y^{2n+1} = yy^{2n} = y(x^2 - x)^n,$$
$$x^n y = x^{n-1}xy = x^{n-1}(y - yx) = x^{n-1}y(1 - x) = \cdots = y(1 - x)^n,$$
$$yx^n y = yy(1 - x)^n = y^2(1 - x)^n = (x^2 - x)(1 - x)^n,$$

для всякого $n \in \mathbb{N}$. Эти равенства показывают, что всякое произведение конечного числа элементов из x и y может быть представлен как конечная линейная комбинация элементов вида yx^n и x^n, $n \in \mathbb{N}$. Действительно, например, у элемента $x^{i_1}y^{j_1} \dots x^{i_k}y^{j_k}$ подалгебры $C^*(x, y)$, где $i_1, j_1, \dots, i_k, j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, все множители $y^{j_1}, y^{j_2} \dots, y^{j_k}$ в силу последних равенств имеют вид многочлена от x или многочлена от x, умноженного на y. Далее, оставшиеся y можно «собрать» вместе, используя равенство $x^n y = y(1 - x)^n$. Поэтому нетрудно видеть, что, так как алгебраические операции непрерывны относительно C^*-нормы, то всякий элемент $a \in C^*(x, y)$ может быть представлен как $a = f(x) + yg(x)$, где $f(x)$, $g(x) \in C^*(x)$. Отсюда, поскольку $C^*(x) \subset C^*(x, y)$, $yC^*(x) \subset C^*(x, y)$, то $C^*(x, y) = C^*(x) + yC^*(x)$. Аналогично имеем $R^*(x, y) = R^*(x) + yR^*(x)$. Заметим, что $R^*(x) = C^*(x)_{sa}$. Отсюда $R^*(x, y) = C^*(x)_{sa} + yC^*(x)_{sa}$. $\rhd$

1.3. Предложение. *Пусть p — проектор алгебры $C^*(A)$, $p = x + iy$, $x, y \in R^*(A)$, и $R^*(x, y)$ — вещественная C^*-алгебра, порожденная элементами x, y. Тогда $R^*(x, y)_{sa} = C^*(x)_{sa} + yC^*(x)^{-y}_{sa}$, где $C^*(x)^{-y}_{sa} = \{g(x) \in C^*(x)_{sa} : yg(x) = -g(x)y\}$. Более того, каждая пара элементов множества $C^*(x)^{-y}_{sa}$ коммутирует.*

$\lhd$ В силу предложения 1.2 $R^*(x, y) = C^*(x)_{sa} + yC^*(x)_{sa}$. Пусть a — элемент алгебры $R^*(x, y)_{sa}$. Тогда существуют $f(x)$, $g(x) \in C^*(x)$ такие, что $a = f(x) + yg(x)$. Так как $a^* = a$, тогда $yg(x) = -g(x)y$. Пусть

$$C^*(x)^{-y}_{sa} = \{g(x) \in C^*(x)_{sa} : yg(x) = -g(x)y\}.$$

Тогда $R^*(x, y)_{sa} = C^*(x)_{sa} + yC^*(x)^{-y}_{sa}$. Все элементы множества $yC^*(x)^{-y}_{sa}$ попарно коммутируют. Действительно, для произвольных $yg_1(x)$, $yg_2(x) \in C^*(x)^{-y}_{sa}$, имеем $yg_1(x)yg_2(x) = -yg_1(x)g_2(x)y = -yg_2(x)g_1(x)y = -yg_2(x)(-yg_1(x)) = yg_2(x)yg_1(x)$. $\rhd$

1.4. Теорема. *Пусть $a \in C^*(A)$, a — конечная линейная комбинация ортогональных проекторов из $C^*(A)$, $a = x + iy$, $x, y \in R^*(A)$, и $R^*(x, y)$ — вещественная C^*-алгебра, порожденная элементами x, y. Тогда $R^*(x, y)_{sa} = C^*(x)_{sa} + yC^*(x)^{-y}_{sa}$, где $C^*(x)^{-y}_{sa} = \{\rho(x) \in C^*(x)_{sa} :\ y\rho(x) = -\rho(x)y\}$, и каждые два элемента алгебры $C^*(x)^{-y}_{sa}$ коммутируют.*

$\lhd$ Предположим, что a является линейной комбинацией $\lambda p + \mu q$, где λ, $\mu \in \mathbb{R}$, ортогональных проекторов p и q. Пусть $p = x_1 + iy_1$, $q = x_2 + iy_2$, где $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R^*(A)$. Тогда $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$. Так как $p \cdot q = 0$, то $x_1x_2 = x_1y_2 = y_1x_2 = y_1y_2 = 0$. В силу предложения 1.2 $C^*(x_i, y_i) = C^*(x_i) + y_iC^*(x_i)$, $i = 1, 2$. Следовательно, ввиду ортогональности p и q $C^*(x_1, x_2, y_1, y_2) = C^*(x_1) + C^*(x_2) + y_1C^*(x_1) + y_2C^*(x_2)$.

Тогда $R^*(x, y)_{sa} \subseteq C^*(x_1)_{sa} + C^*(x_2)_{sa} + y_1C^*(x_1) + y_2C^*(x_2)$. Нетрудно видеть, что для элемента $x^{i_1}y^{j_1} \ldots x^{i_k}y^{j_k} \in R^*(x, y)_{sa}$ в силу предложения 1.3 имеет место

$$x^{i_1}y^{j_1} \ldots x^{i_k}y^{j_k} = x_1^{i_1}y_1^{j_1} \ldots x_1^{i_k}y_1^{j_k} + x_2^{i_1}y_2^{j_1} \ldots x_2^{i_k}y_2^{j_k} = f(x_1) + y_1g(x_1) + f(x_2) + y_2g(x_2)$$

для некоторых полиномов f и g. Более того $y_ig(x_i) = -g(x_i)y_i$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{2}(f(x_i) + y_ig(x_i)) = f(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)g(x_1 + x_2) = f(x) + yg(x)$$

в силу равенств $x_1x_2 = y_1x_2 = x_1y_2 = 0$. Тем самым $x^{i_1}y^{j_1} \ldots x^{i_k}y^{j_k} = f(x) + yg(x)$, $yg(x) = -g(x)y$. Аналогичные рассуждения имеют место для всякого полинома $f(x, y) \in R^*(x, y)_{sa}$. Всякий элемент $b \in R^*(x, y)$ является пределом по норме некоторой сети полиномов вида $f(x, y) \in R^*(x, y)_{sa}$. Поэтому существуют элементы $f(x)$, $g(x) \in C^*(x)_{sa}$ такие, что $b = f(x) + yg(x)$, $yg(x) = -g(x)y$. В то же время, всякая сумма $a(x) + yb(x)$ такая, что $a(x)$, $b(x) \in C^*(x)_{sa}$ и $yb(x) = -b(x)y$ принадлежит алгебре $R^*(x, y)_{sa}$.

Мы можем доказать аналогичные утверждения, если a является линейной комбинацией конечного числа ортогональных проекторов с учетом комплекснозначных коэффициентов. $\rhd$

1.5. Предложение. *Пусть $a \in C^*(A)$, a — конечная линейная комбинация ортогональных проекторов из $C^*(A)$, $a = x + iy$, $x, y \in R^*(A)$, и $R^*(x, y)$ — вещественная*

C^*-алгебра, порожденная элементами x, y. Тогда $R^*(x,y)_{sa}$ представляется как сумма двух ассоциативных JC-подалгебр.

$\lhd$ Заметим, что с операцией йорданова умножения $a\cdot b = 1/2(ab+ba)$, $a,b \in R^*(x,y)_{sa}$, $R^*(x,y)_{sa}$ является JC-подалгеброй алгебры $C^*(A)_{sa}$. Применяя ассоциативность алгебры $C^*(x)_{sa}$ мы получим, существует такая максимальная ассоциативная подалгебра A_0 алгебры $R^*(x,y)_{sa}$, что $C^*(x)_{sa} \subset A_0$. По предложению 1.4 каждая пара элементов подмножества $C^*(x)_{sa}^{-y}$ операторно коммутирует. Следовательно, существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра A^0 алгебры $R(x,y)_{sa}$, содержащая $C^*(x)_{sa}^{-y}$. Снова применяя предложение 1.4 получим, что $R^*(x,y)_{sa} = A_0 + A^0$. $\rhd$

2. Классификация алгебры $R^*(x,y)_{sa}$

2.1. Пусть $a \in C^*(A)$, $a = x+iy$, где $x,y \in R^*(A)$ и $R^*(x,y)$ — вещественная C^*-алгебра, порожденная элементами x, y. Основной результат данного параграфа утверждает, что JW-алгебра $[R^*(x,y)_{sa}]^{**}$ имеет только прямые слагаемые типа I_1 и I_2 (включая нулевую компоненту).

Следует отметить, что, если JW-алгебра M имеет прямые слагаемые не только типа I_1 и I_2, то JB-фактор $H_3(\mathbb{R})$ может быть вложен в M. Следовательно, если мы докажем, что JB-фактор $H_3(\mathbb{R})$ не может быть вложен в $[R^*(x,y)_{sa}]^{**}$, то, отсюда следует, что $[R^*(x,y)_{sa}]^{**}$ имеет только прямые слагаемые типа I_1 и I_2.

2.2. Теорема. *JW-алгебра $[R^*(x,y)_{sa}]^{**}$ имеет только прямые слагаемые типа I_1 и I_2 (включая случай, когда одно из прямых слагаемых нулевое).*

$\lhd$ Вначале предположим, что элемент $a = x+iy$ является конечной линейной комбинацией ортогональных проекторов из $C^*(A)$. Докажем теорему от противного. Предположим, что в JW-алгебре $[R^*(x,y)_{sa}]^{**}$ существует прямое слагаемое A_0, которое является алгеброй типа I_n, $n>2$, или типа II, или типа III. По теореме 1.4 $R^*(x,y)_{sa} = C^*(x)_{sa} + yC^*(x)_{sa}^{-y}$. Заметим, что $y[C^*(x)_{sa}^{-y}]$ является банаховым пространством. Следовательно в силу $*$-слабо непрерывности йорданова умножения мы имеем

$$[R^*(x,y)_{sa}]^{**} = [C^*(x)_{sa}]^{**} + y[C^*(x)_{sa}^{-y}]^{**}.$$

Пусть $M = [R^*(x,y)_{sa}]^{**}$. Мы можем предположить, что $M = A_0$. Тогда JB-фактор $H_3(\mathbb{R})$ может быть вложен в M. В силу предложения 1.5 $M = A_0 + A^0$ для некоторых максимальных сильно ассоциативных подалгебр A_0, A^0. Ясно, что либо в A_0, либо в A^0 существует проектор, не лежащий в центре алгебры M. В противном случае алгебра M была бы абелевой. Пусть e — проектор в A_0, который не лежит в центре алгебры M. Тогда $\{eM(1-e)\} \neq \{0\}$. Заметим, что $\{eM(1-e)\} = \{e(A_0+A^0)(1-e)\} = \{eA^0(1-e)\}$.

Предположим, что в подалгебре $U_e(A_0)$ существует проектор f такой, что $\{(e-f)Mf\} \neq \{0\}$, т. е. f не является центральным в $U_e(M)$. Тогда либо одна из компонент $\{fM(1-e)\}$ или $\{(1-e)M(e-f)\}$, либо обе компоненты ненулевые. Заметим, что в силу того, что M разлагается по проекторам f, $e-f$, $1-e$ в прямую сумму пирсовских компонент имеет место

$$M = U_{1-e}(M) \oplus U_{e-f}(M) \oplus U_f(M) \oplus \{fM(e-f)\} \oplus \{(e-f)M(1-e)\} \oplus \{(1-e)Mf\},$$
$$M = A_0 + A^0 = U_f(A_0+A^0) \oplus U_{e-f}(A_0+A^0) \oplus U_{1-e}(A_0+A^0)$$
$$\oplus \{fA^0(e-f)\} \oplus \{(e-f)A^0(1-e)\} \oplus \{(1-e)A^0 f\}$$

и

$$A_0 = U_f(A_0) \oplus U_{e-f}(A_0) \oplus U_{1-e}(A_0).$$

Тогда должно быть

$$\{fM(e-f)\} \oplus \{(e-f)M(1-e)\} \oplus \{(1-e)Mf\} \subseteq A^0.$$

Однако, по крайней мере две из компонент $\{fM(e-f)\}$, $\{(e-f)M(1-e)\}$, $\{(1-e)Mf\}$ ненулевые и в них существуют попарно не коммутирующие элементы, что противоречит их вхождению в подалгебру A^0.

Пусть в $U_e(A_0)$ не существует проектора f, который удовлетворял бы условию $\{(e-f)Mf\} \neq \{0\}$, т. е. не существует f, не являющегося центральным в $U_e(M)$. Тогда для всякого проектора f из A_0 имеет место $\{e - fA^0f\} = \{0\}$. Поскольку $U_e(M) = U_e(A_0) + U_e(A^0)$, то $U_e(A_0)$ лежит в центре алгебры $U_e(M)$ и $U_e(M)$ является абелевой алгеброй. Следовательно и e является абелевым. В этом случае положим в подалгебре $U_{1-e}(A_0)$ существует проектор f, который удовлетворяет условию $\{(1-e-f)Mf\} \neq \{0\}$, т. е. f не является центральным в $U_{1-e}(M)$. Далее повторяются рассуждения, проведенные для $f \in U_e(A_0)$.

Рассмотрим случай, когда в $U_{1-e}(A_0)$ не существует проектора f, который удовлетворял бы условию $\{(1-e-f)Mf\} \neq \{0\}$, т. е. не существует f, не являющегося центральным в $U_{1-e}(M)$. Тогда для всякого проектора f из A_0 имеет место $\{e - fA^0f\} = \{0\}$. В этом случае, так же как, выше, проектор $1-e$ является абелевым. Тогда в силу разложения

$$M = U_e(M) \oplus \{eM(1-e)\} \oplus U_{1-e}(M)$$

абелевы проекторы e, $1-e$ имеют в качестве центрального носителя единицу алгебры M, и M является алгеброй типа I_2. Последнее утверждение является противоречием.

В итоге получили, что утверждение о том, что JB-фактор $H_3(\mathbb{R})$ может быть вложен в M противоречит равенство $M = A_0 + A^0$. Отсюда JW-алгебра M, не может иметь прямых слагаемых типа I_n, $n > 2$ или типа II, или типа III и имеет только прямых слагаемых типа I_1 и I_2 (включая случай, когда одно из прямых слагаемых нулевое). Отсюда следует утверждение теоремы.

В случае произвольного элемента $a \in C^*(A)$ берется гильбертово пространство H такое, что A является подалгеброй операторной йордановой алгебры $B(H)_{sa}$ всех самосопряженных ограниченных линейных операторов на H и единица A является единицей алгебры $B(H)_{sa}$ (по условию A является JC-алгеброй). Далее, существует максимальное ортогональное множество $\{g_i\}$ минимальных проекторов в $B(H)_{sa}$ такое, что всякие два элемента множества $\{g_i\} \cup \{a\}$ операторно коммутируют. Если алгебра $H_3(\mathbb{R})$ вложима в алгебру $R^*(x,y)_{sa}$, то сущесвует проектор e, являющийся суммой конечного количества проекторов из семейства $\{g_i\}$ такой, что алгебра $H_3(\mathbb{R})$ вложима также в конечномерную алгебру $eR^*(x,y)_{sa}e$. Последнее утверждение противоречить предыдущую часть доказательства. $\rhd$

2.3. По теореме 2.2 существуют гиперстоуновские компакты X, Y такие, что $[R^*(x,y)_{sa}]^{**} \cong C(X) \oplus C(Y, H_2(\mathbb{R}))$. Пусть $1_{xy} = \sup\{r(x), r(y)\}$, где $r(x)$, $r(y)$ — носители элементов x, y в алгебре A. Используя это представление, для $R^*(x,y,1_{xy})_{sa}$ можно построить доказательство представления этой алгебры в виде алгебры непрерывных комплекснозначных и матричнозначных функций на компакте по аналогии с доказательством представления коммутативной C^*-алгебры как алгебра непрерывных функций на компакте (используя максимальные идеалы и гомоморфизмы). В обозначениях пункта 2.1 имеет место следующая теорема.

Теорема. *Существуют такие компакты K_1 и K_2 и такой проектор e в A, что*

$$R^*(x,y,1_{xy},e)_{sa} \cong C(K_1) \oplus C(K_2, H_2(\mathbb{R})), \quad eR^*(x,y,1_{xy},e)_{sa} \cong C(K_1),$$
$$(1-e)R^*(x,y,1_{xy},e)_{sa} \cong C(K_2, H_2(\mathbb{R})),\ C(K_1)^{**} = C(X),$$
$$C(K_2, H_2(\mathbb{R}))^{**} = C(Y, H_2(\mathbb{R})).$$

$\lhd$ Повторим доказательство теоремы о представлении коммутативной банаховой алгебры в виде алгебры непрерывных комплекснозначных функций на компакте. Пусть M означает множество всех нетривиальных мультипликативных функционалов, определенных на $R^*(x,y,1_{xy})_{sa}$. Ядро $\mathrm{Ker}(f)$ при $f \in M$ есть максимальный идеал. В нашем случае по всякому максимальному идеалу m можно однозначно построить линейный непрерывный мультипликативный функционал $f \in M$ такой, что $m = \mathrm{Ker}(f)$. Здесь, функционал $f \in M$ может принимать или комплексные значения, или значения из $H_2(\mathbb{R})$. Таким образом, так же, как в случае коммутативной банаховой алгебры, получим, что между максимальными идеалами m и функционалами $f \in M$ существует однозначное соответствие. В силу этого обстоятельства условимся функционалы из M обозначать f_m, а буквой m соответствующие им максимальные идеалы. Для множества всех максимальных идеалов $\{m\}$ мы будем употреблять ту же букву M, что и для соответствующего ему множества $\{f_m\}$.

Пусть a — некоторый элемент из $R^*(x,y,1_{xy})_{sa}$. Рассмотрим функцию $a(m)$ на множестве M, задав ее формулой

$$a(m) = f_m(a).$$

Множество M есть замкнутое подмножество единичного шара в $(R^*(x,y,1_{xy})_{sa})^*$ и функции $a(m)$ непрерывны на M.

Отображение $a \mapsto a(m)$ задает изометрический изоморфизм алгебры $R^*(x,y,1_{xy})_{sa}$ в алгебру $C(M)$ непрерывных функций на компактном хаусдорфовом протсранстве M максимальных идеалов алгебры $R^*(x,y,1_{xy})_{sa}$; при этом

$$\|a(m)\| = \max|a(m)| = \|a\|.$$

Мы можем считать, что M является подмножеством множества $X \cup Y$. Можно проверить непосредственно, что M всюду плотно в $X \cup Y$.

Множество $M \cap X$ является локально компактным пространством. Имеем, $M \cap X$ можно отождествить с некоторым подпространством характеров алгебры $R^*(x,y,1_{xy})_{sa}$, наделенным топологией, индуцированной топологией

$$\sigma([R^*(x,y,1_{xy})_{sa}]^*, R^*(x,y,1_{xy})_{sa}).$$

Аналогично, X — некоторое подпространство характеров алгебры $[R^*(x,y,1_{xy})_{sa}]^{**}$, наделенное топологией, индуцированной топологией

$$\sigma([R^*(x,y,1_{xy})_{sa}]^{***},\ [R^*(x,y,1_{xy})_{sa}]^{**}).$$

Так как $[R^*(x,y,1_{xy})_{sa}]^* \subseteq [R^*(x,y,1_{xy})_{sa}]^{***}$, то, как мы уже заметили, можно предположить, что $M \cap X \subseteq X$. В этом случае $M \cap X$ всюду плотно в X. Пусть $K = M \cap X$, и пусть τ_K и τ_X — топологии локально компактного пространства K и компакта X соответственно. Тогда по построению для всякого $U \in \tau_X$ множество $U \cap K$ всюду плотно в U и образует в K локально компактное подпространство. Действительно, системы окрестностей в топологиях τ_K и τ_X определяются множествами характеров K и X из

$[R^*(x,y,1_{xy})_{sa}]^*$ и $[R^*(x,y,1_{xy})_{sa}]^{***}$ соответственно, и элементами алгебр $R^*(x,y,1_{xy})_{sa}$ и $[R^*(x,y,1_{xy})_{sa}]^{**}$ соответственно. При этом $K \subseteq X$ и $C(K) \subseteq C(X)$. Следовательно, если для $x \in K$ множество U — окрестность точки x в X, то $U \cap K$ является окрестностью точки x в K. Следовательно, алгебра $C(K)$ всюду $*$-слабо плотна в алгебре $C(X)$ и $C(K)^{**} = C(X)$.

Аналогично, можно получить, что $C(Q, H_2(\mathbb{R}))^{**} = C(Y, H_2(\mathbb{R}))$, где $Q = M \cap Y$. Отметим, что K и Q являются локально компактными подпространствами компактного хаусдорфова пространства M, с топологиями $\tau_K = \{U \cap M : U \in \tau_X\}$, $\tau_Q = \{U \cap M : U \in \tau_Y\}$ соответственно.

Пусть A_{I_1}, A_{I_2} — соответствующие образы в $R^*(x,y,1_{xy})_{sa}$ алгебр $C(K)$ и $C(Q, H_2(\mathbb{R}))$. Далее, пусть $e = \sup\{r(a) : a \in A_{I_1}\}$, где sup вычислен в A. Тогда $1 - e = \sup\{r(a) : a \in A_{I_2}\}$ и $R^*(x,y,1_{xy},e)_{sa} \cong C(K_1) \oplus C(K_2, H_2(\mathbb{R}))$ для компактов K_1, K_2, построенных по K, Q. $\rhd$

3. Обратимые AJW-алгебры и их обертывающие AW^*-алгебры

3.1. Пусть A — специальная AJW-алгебра, $C^*(A)$ — обертывающая C^*-алгебра алгебры A и $R^*(A)$ — вещественная C^*-алгебра, порожденная алгеброй A. Пусть всюду в оставшейся части статьи $a \cdot b$ — йорданово произведение и ab — ассоциативное умножение элементов a и b. Следующая теорема может быть доказана также как в случае JW-алгебр.

3.2. Теорема. *Пусть A — специальная AJW-алгебра без прямых слагаемых типа I_2. Тогда алгебра A является обратимой.*

Всюду в оставшейся части данного параграфа A является обратимой AJW-алгеброй.

3.3. Лемма. *Пусть e, f — проекторы, s — частичная симметрия алгебры A такие, что $e \cdot f = 0$, $s^2 = e + f$ и $U_s e = f$. И пусть q, x, z, y_1, y_2 — элементы A такие, что*

$$x = x^2 + ((y_1 + iy_2)(y_1 - iy_2), \quad y_1 + iy_2 = x(y_1 + iy_2) + z(y_1 + iy_2),$$
$$y_1 - iy_2 = x(y_1 - iy_2) + z(y_1 - iy_2), \quad z = z^2 + (y_1 - iy_2)(y_1 + iy_2),$$
$$p = xe + zf + i((y_1 + iy_2)es - (y_1 - iy_2)fs) + q, \text{ и } q^2 = q, \ (e + f) \cdot q = 0.$$

Кроме того, каждый из элементов x, z, y_1, y_2, q коммутирует со всеми остальными элементами и элементами e, f, s. Тогда элемент

$$xe + zf + i((y_1 + iy_2)es - (y_1 - iy_2)fs) + q$$

алгебры $C^*(A)$ является проектором.

$\lhd$ Эта лемма может быть доказана непосредственно используя равенства $esf = es$, $fse = fs$, $sf = es$, $se = fs$ относительно ассоциативного умножения. $\rhd$

3.4. Лемма. *Пусть p — произвольный проектор алгебры $C^*(A)$. Тогда существуют элементы e, f, $q \in P(A)$ и симметрия $s \in A$ такие, что $e \cdot f = 0$, $s^2 = e + f$, $e = U_s f$, и существуют элементы x, z, y_1 и y_2 в A такие, что $p = xe + zf + i((y_1 + iy_2)es - (y_1 - iy_2)fs) + q$. Более того, элементы e, f, s, x, z, y_1, y_2, q удовлетворяют условиям леммы* 3.3.

$\lhd$ Заметим, что $p = a + ib$ для некоторых $a, b \in R^*(A)$. Так как p — проектор, имеем $a^* = a$, $b^* = -b$. Пусть $C^*(a,b)$ — C^*-алгебра, порожденная элементами a, b. Пусть $1_{ab} = \sup\{r(a), r(b)\}$, где $r(a)$, $r(b)$ — носители элементов a, b в алгебре A. В силу результатов из § 2 существуют компакты Q и X, а также проектор $e \in A$ такие, что

$C^*(a,b,1_{ab},e) = A_{I_1} \oplus A_{I_2}$, $A_{I_1} \cong C^c(Q)$, $A_{I_2} \cong C^c(X, M_2(\mathbb{C}))$, где $C^c(Q)$ (соответственно $C^c(X, M_2(\mathbb{C}))$) —алгебра непрерывных комплексных (соответсвенно $M_2(\mathbb{C})$-значных) функций на Q (соответственно X). Существуют a_1, $b_1 \in A_{I_1}$ и a_2, $b_2 \in A_{I_2}$ такие, что $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$. Предположим, что $A_{I_1} = C^c(Q)$ и $A_{I_2} = C^c(X, M_2(\mathbb{C}))$. Фиксируем точку x_0 в X. Так как $b^* = -b$, то $b_2^*(x_0) = -b_2(x_0)$. Следовательно,

$$b_2(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & y'_{x_0} \\ -y'_{x_0} & 0 \end{pmatrix},$$

где $y'_{x_0} \in \mathbb{R}$. Так как $a^* = a$, $a \in A$, то $a_2(x_0)^* = a_2(x_0)$. Поэтому

$$a_2(x_0) = \begin{pmatrix} x_{x_0} & y^2_{x_0} \\ y^2_{x_0} & z_{x_0} \end{pmatrix},$$

где x_{x_0}, $y^2_{x_0}$, $z_{x_0} \in \mathbb{R}$. В силу произвольности точки $x_0 \in X$ и равенства $C^c(X, M_2(\mathbb{C})) = C^c(X) \otimes M_2(\mathbb{C})$ мы имеем

$$a + ib = \begin{pmatrix} x & y_2 \\ y_2 & z \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ -y_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где x, y_1, y_2, $z \in C(X)$. Пусть $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ являются постоянными функциями в $C^c(X, M_2(\mathbb{C}))$. Тогда e, f, $s \in A$. Следовательно $a_2 + ib_2 = xe + zf + i((y_1 + iy_2)es - (y_1 - iy_2)fs)$.Теперь, легко видеть, что $(a_1 + ib_1)^2 = a_1 + ib_1$. Следовательно, $b_1 = 0$, $a_1^2 = a_1$. Пусть $q = a_1$. Тогда x, z, y_1, y_2, e, f, s и q удовлетворяют условиям леммы 3.4. $\rhd$

3.5. Замечание. Следует отметить, что в силу доказательства леммы 3.4, если $p = xe + zf + i((y_1 + iy_2)es - (y_1 - iy_2)fs)$ является проектором алгебры $C^*(A)$ и x, z, y_1, y_2, e, f, s удовлетворяют условиям леммы 3.3, то можно считать $r_A(x) = r_A(z) = r_A(y_1) \vee r_A(y_2)$. Здесь $r_A(a)$ — носитель элемента $a \in A$. Действительно, из равенств $x = x^2 + (y_1 + iy_2)(y_1 - iy_2) = x^2 + y_1^2 + y_2^2$ и из того, что элементы x, y_1, y_2 операторно коммутируют следует $r_A(x) \geqslant r_A(y_1)$, $r_A(x) \geqslant r_A(y_2)$. Аналогично и $r_A(z) \geqslant r_A(y_1)$, $r_A(z) \geqslant r_A(y_2)$. Далее, пусть $q = r_A(x) - r_A(y_1) \vee r_A(y_2)$. Тогда $q((y_1 + iy_2)es - (y_1 - iy_2)fs) = 0$ и $q(xe + zf)$ является проектором. Поэтому можно взять $r_A(x) = r_A(y_1) \vee r_A(y_2)$. Аналогично и $r_A(z) = r_A(y_1) \vee r_A(y_2)$. Так что далее предположим $e = r_A(x)e$, $f = r_A(x)f$ и $s = sr_A(x) = sr_A(z)$.

Доказательство леммы 3.4 можно с незначительными изменениями применить к следующему утверждению: пусть c — произвольный элемент алгебры $C^*(A)$. Тогда существуют элементы e, f, $q \in P(A)$ и симметрия $s \in A$ такие, что $e \cdot f = 0$, $s^2 = e + f$, $e = U_s f$, и существуют элементы x, z, y_1, y_2, y_3, y_4 в A такие, что $c = xe + zf + i((y_1 + iy_3)es + (y_2 + iy_4)fs) + q$. Более того, каждый из элементов x, z, y_1, y_2, y_3, y_4, q коммутирует со всеми остальными элементами и элементами e, f, s.

3.6. Лемма. *Пусть $p_1 = x_1e_1 + z_1f_1 + i\left((y_1^1 + iy_2^1)e_1s_1 - (y_1^1 - iy_2^1)f_1s_1\right)$ и $p_2 = x_2e_2 + z_2f_2 + i\left((y_1^2 + iy_2^2)e_2s_2 - (y_1^2 - iy_2^2)f_1s_1\right)$ являются проекторами алгебры $C^*(A)$, удовлетворяющим условиям леммы 3.3. Тогда проекторы e_1, f_1, e_2, f_2 попарно ортогональны тогда и только тогда когда p_1, p_2 ортогональны.*

$\lhd$ Если проекторы e_1, f_1, e_2, f_2 попарно ортогональны, то очевидным образом проекторы p_1 и p_2 ортогональны.

Предположим, что p_1, p_2 являются ортогональными. Тогда имеем $e_1p_1p_2 = (x_1e_1 + i(y_1^1 + iy_2^1)e_1s_1)p_2 = 0$. Следовательно, $p_2(x_1e_1 + i(y_1^1 + iy_2^1)e_1s_1) = 0$, и умножая это равенство на e_1, получим $p_2e_1x_1 = p_2x_1e_1 = 0$. Элемент e_1x_1 в силу замечания 3.5 имеет носитель e_1 в A. Поэтому $p_2e_1 = 0$. Следовательно, $e_2p_2e_1 = (x_2e_2+i(y_1^2+iy_2^2)e_2s_2)e_1 = 0$ и $e_1e_2x_2 = 0$. В силу последнего равенства $e_1e_2 = 0$. Аналогично и $e_1f_2 = f_1f_2 = f_1e_2 = 0$. $\triangleright$

3.7. Лемма. *Пусть A — обратимая AJW-алгебра. Тогда всякое ортогональное множество $\{p_i\} \subset C^*(A)$ проекторов имеет точнюю верхнюю грань в $C^*(A)$.*

$\triangleleft$ В силу леммы 3.4 $p_i = x_ie_i + z_if_i + i((y_1^i + iy_2^i)e_is_i - (y_1^i - iy_2^i)f_is_i) + q_i$, для всякого i, где x_i, z_i, e_i, f_i, y_1^i, y_2^i, s_i, q_i — элементы A, удовлетворяющие условиям леммы 3.4. Тогда в силу леммы 3.6 $\{e_i\} \cup \{f_i\}$ является ортогональным множеством. Следовательно, если $e = \sup e_i$, $f = \sup f_i$, то $e = U_sf$ для симметрии s такой, что $(s+e+f)/2 = \sup(s_i+e_i+f_i)/2$ (см. доказательство в [8]). Действительно, для каждого i имеем $e_i(e-U_sf)e_i = e_i - U_{s_i}f_i = 0$ и последнее равенство позволяет утверждать, что $e - U_sf = 0$. Легко видеть, что каждые два элемента множества $\{x_i\}$ операторно коммутируют и $\{x_i\}$ является ортогональными семейством положительных элементов. Следовательно, порядковая сумма $\sum x_i$ может быть вычислена в максимальной ассоциативной подалгебре A_0, содержащей $\{x_i\}$. Действительно, для некоторого экстремального компакта X будет $A_0 \cong C(X)$, и сумма $\sum x_i$ вычисляется в A_0 как точная верхняя граница монотонно возрастающей ограниченной сверху сети конечных сумм элементов множества $\{x_i\}$. Суммы $\sum y_i^1$, $\sum y_i^2$, $\sum z_i$ также могут быть вычислены аналогично. Пусть $x = \sum x_i$, $y_1 = \sum y_i^1$, $y_2 = \sum y_i^2$, $z = \sum z_i$. Тогда $p = xe + zf + i((y_1+iy_2)es - (y_1-iy_2)fs)$ является проектором. Теперь мы докажем, что p является точной верхней граню семейства $\{p_i\}$ в $C^*(A)$. Отметим, что для всяких i

$$xe \cdot x_ie_i = x \cdot x_iee_i = x_i^2 \cdot e_i, \quad xe \cdot z_if_i = 0,$$
$$xe \cdot y_i^1 \cdot e_i \cdot s_i = xy_i^1e_is_i = x_iy_i^1e_is_i, \quad xe \cdot y_i^2f_is_i = 0, \ldots$$

В силу последних равенств $p \cdot p_i = p_i$, для всякого i. Поэтому, $p_i \leqslant p$ для всяких i. В то же время для всякого i выполняется $U_pe_i = e_ip = e_ip_i$, $U_pf_i = f_ip_i$ и $U_p(e_i+f_i) = (e_i+f_i)p_i = p_i$. Следовательно, $\sup U_p(e_i+f_i) = \sup p_i = U_p(\sup(e_i+f_i)) = U_p(e+f) = p$, поскольку $(e+f)x = x$, $(e+f)y_i^k = y_i^k$, $k = 1, 2$, $(e+f)z = z$. $\triangleright$

3.8. Лемма. *Пусть A — обратимая AJW-алгебра и $a \in C^*(A)_{sa}$. Тогда существует такой проектор e в $C^*(A)$, что $ea = a$ и неравенство $e \leqslant f$ имеет место для всякого проектора $f \in C^*(A)$ с условием $fa = a$. В этом случае e называется носителем элемента a и обозночается через $r(a)$.*

$\triangleleft$ Имеем, существуют $x, y \in R^*(A)$ такие, что $a = x + iy$. Так как a является самосопряженным элементом, то $x^* = x$, $y^* = -y$. Пусть $C^*(x,y)$ — C^*-алгебра, порожденная элементами x, y, и пусть $1_{xy} = \sup\{r(x), r(y)\}$, где $r(x)$, $r(y)$ — носители элементов x, y в алгебре A. В соответствие с результатами из § 2 существуют компакты Q, X и проектор $e \in A$ такие, что

$$C^*(x, y, 1_{xy}, e) \cong C^c(Q) \oplus C^c(X, M_2(\mathbb{C}))$$

(см. доказательство леммы 3.4). Пусть $C^*(x,y,1_{xy},e) = \mathcal{A}_{I_1} \oplus \mathcal{A}_{I_2}$, и $\mathcal{A}_{I_1} \cong C^c(Q)$, $\mathcal{A}_{I_2} \cong C^c(X, M_2(\mathbb{C}))$. Имеем, проектор $1 - e$ является единицей алгебры $\mathcal{A}_{I_2}$. Пусть $1_{I_2} = 1 - e$. Тогда $1_{I_2}a$ лежит в $C(X) \otimes M_2(\mathbb{C}) = C(X, M_2(\mathbb{C}))$ и представляется как

$$1_{I_2}a = \begin{pmatrix} z_1 & y_1 + iy_2 \\ y_1 - iy_2 & z_2 \end{pmatrix}, \quad z_1,\, z_2,\, y_1,\, y_2 \in C(X).$$

Можно утверждать, что существуют абелевы проекторы e_1 и e_2, элементы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ в $C^c(X)$ такие, что $C(e_1) = C(e_2) = 1_{I_2}$, $e_1+e_2 = 1_{I_2}$ и $1_{I_2}a = \mathbf{A}e_1+\mathbf{B}e_2$. Действительно, $(1_{I_2}a)(t) \in$

$M_2(\mathbf{C})$ для всякого $t \in X$ и существуют минимальные проекторы $e_1(t)$, $e_2(t)$ в $M_2(\mathbb{C})$, и числа $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t) \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие равенству $1_{I_2}a(t) = \lambda_1(t)e_1(t) + \lambda_2(t)e_2(t)$. Элементы e_1 и e_2 можно представить так

$$e_1 = \begin{pmatrix} \lambda & \mu + i\nu \\ \mu - i\nu & 1-\lambda \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -\mu - i\nu \\ -\mu + i\nu & \lambda \end{pmatrix}.$$

Поэтому в силу $1_{I_2}a = \mathbf{A}e_1 + \mathbf{B}e_2$ мы получим систему из пяти уравнений. Пятое уравнение $\lambda = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ можно получить из равенства $e_1^2 = e_1$ или $e_2^2 = e_2$. Тогда используя равенство

$$\mathbf{A}e_1 + \mathbf{B}e_2 = \begin{pmatrix} z_1 & y_1 + iy_2 \\ y_1 - iy_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

и эти уравнения, функции $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, μ, ν и λ могут быть представлены через известные функции z_1, z_2, y_1, $y_2 \in C(X)$. Следовательно, функции $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, μ, ν и λ существуют и лежат в $C(X)$. По определению, $r(\mathbf{A})$ и $r(\mathbf{B})$ (носители элеменов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в $C(X)$ соответсвенно) существуют и принадлежат алгебре A. Можно проверить непосредственно, что $r(\mathbf{A})e_1$ и $r(\mathbf{B})e_2$ являются носителями элементов $\mathbf{A}e_1$ и $\mathbf{B}e_2$ соответственно. Тогда, так как $e_1e_2 = 0$, то $r(\mathbf{A})e_1 + r(\mathbf{B})e_2$ является носителем $1_{I_2}a$ в $C^*(A)$

Пусть $\mathcal{A}_{I_1} = C^c(Q)$. Тогда $(1-1_{I_2})a$ лежит в $C^c(Q)$ и $(1-1_{I_2})a = (1-1_{I_2})x + i(1-1_{I_2})y$. Так как $C^c(Q)_{sa} = C(Q)$ и $(A_{I_2})_{sa} \subseteq A$, то $(1-1_{I_2})y = 0$. Следовательно, $(1-1_{I_2})a = (1-1_{I_2})x$ и носитель этого элемента существует в $C^*(A)$ и лежит в A. $\triangleright$

Следующая теорема следует из лемм 3.7 и 3.8.

3.9. Теорема. *Обертывающая C^*-алгебра $C^*(A)$ обратимой AJW-алгебры A является AW^*-алгеброй.*

3.10. Замечание. Обертывающую C^*-алгебру $C^*(A)$ обратимой AJW-алгебры A можно называть *обертывающей AW^*-алгеброй* алгебры A.

Утверждение теоремы 3.9 может быть ложным, если A не является обратимой. Действительно, если A является бесконечномерным спин фактором, то C^*-алгебра, порожденная алгеброй A, является CAR алгеброй (см. § 6.2 из [9]). Эта C^*-алгебра не является AW^*-алгеброй.

Что касается остальных случаев, то всякая необратимая специальная AJW-алгебра является типа I_2. Следовательно, в силу функционального представления AJW-алгебр типа I_2 (см. [10]) для всякой необратимой специальной AJW-алгебры A утверждение теоремы 3.9 имеет место тогда и только тогда когда A не имеет прямых слагаемых как AJW-алгебры типа I_2 с максимальными бесконечными спин системами.

4. Основные результаты

4.1. Предложение. *Пусть A — обратимая JB-алгебра. Предположим, что обертывающая C^*-алгебра $C^*(A)$ является AW^*-алгеброй. Тогда A является AJW-алгеброй.*

$\triangleleft$ Пусть $a \in A$. Тогда существует носитель $r(a)$ в $C^*(A)$ элемента a. Так как алгебра A обратима, то существуют такие элементы x, $y \in R^*(A)$, что $r(a) = x + iy$. Тогда $a = ar(a) = a(x+iy) = ax + iay \in R^*(A)$, т. е. $ay = 0$. Отсюда $ax = a$. Так как a, $x \in A$, то x является проектором и $x = r(a)$.

Аналогично, можно доказать, что всякое ортогональное семейство проекторов алгебры A имеет точную верхнюю грань в A.

Заметим, что установленных выше фактов достаточно, чтобы сделать вывод о том, что A есть AJW-алгебра. $\rhd$

Из этого предложения и теоремы 3.9 получаем следующую теорему.

4.2. Теорема. *Произвольная обратимая JB-алгебра является AJW-алгеброй тогда и только тогда когда ее обертывающая C^*-алгебра является AW^*-алгеброй.*

4.3. Замечание. Что касается необратимых специальных JB-алгебр, то, всякая такая специальная AJW-алгебра имеет тип I_2. Этот случай обсужден в замечании 3.10. Мы можем утверждать, что для всякой AJW-алгебры A ее обертывающая C^*-алгебра $C^*(A)$ является AW^*-алгеброй тогда и только тогда когда A как AJW-алгебра не имеет прямых слагаемых типа I_2 с максимальной бесконечной спин системой.

Чтобы установить следующую теорему используем тот факт теории AW^*-алгебр, что если всякая максимальная коммутативная подалгебра AW^*-алгебры слабо$*$ замкнута, то эта AW^*-алгебра является алгеброй фон Неймана ([11]).

4.4. Теорема. *Произвольная обратимая JB-алгебра является JBW-алгеброй тогда и только тогда когда ее обертывающая C^*-алгебра является алгеброй фон Неймана.*

$\lhd$ Пусть A — произвольная обратимая JW-алгебра. Тогда A является AJW-алгеброй и в силу пункта 3.11 $C^*(A)$ является AW^*-алгеброй. Пусть ρ — произвольный нормальный функционал на A. Продолжим ρ на $C^*(A)$ следующим образом. Для всякого элемента $a \in C^*(A)_{sa}$ положим $\rho(a) = \rho(x)$, где $a = x + iy$, $x, y \in R^*(A)$. Значит $x \in A$. Нормальность функционала ρ можно доказать, например, также как в доказательстве теоремы 1 из [12]. Естественно определить ρ на $C^*(A)$ как $\rho(a+ib) = \rho(a)+i\rho(b)$, для всяких $a, b \in C^*(A)_{sa}$. Нетрудно заметить, что функционал ρ, определенный на $C^*(A)$ таким образом, является нормальным линейным непрерывным функционалом на $C^*(A)$. Очевидно, что $C^*(A)$ имеет разделяющее множество нормальных состояний. Тогда в силу результата Педерсена (см. [11]) C^*-алгебра $C^*(A)$ является алгеброй фон Неймана.

Пусть обертывающая C^*-алгебра $C^*(A)$ произвольной обратимой JB-алгебры A является алгеброй фон Неймана. Тогда поскольку операция умножения $*$-слабо непрерывна, то $R^*(A)$ — вещественная алгебра фон Неймана. Отсюда поскольку $R^*(A)_{sa} = A$, то A является JW-алгеброй. $\rhd$

4.5. Замечание. Так же, как в замечании пункта 3.11, мы можем утверждать, что для всякой JW-алгебры A ее обертывающая C^*-алгебра $C^*(A)$ является алгеброй фон Неймана тогда и только тогда когда A как JW-алгебра не имеет прямых слагаемых типа I_2 с максимальной бесконечной спин системой. Более того обертывающая C^*-алгебра $C^*(A)$ всякой JW-алгебры типа I_2 с максимальной бесконечной спин системой не является алгеброй фон Неймана.

Литература

1. *Арзикулов Ф. Н.* Об абстрактных JW-алгебрах // Сиб. мат. журн.—1998.—№ 1.—С. 20–27.
2. *Arzikulov F. N.* AJW-algebras of type I and their classification // Siberian Adv. Math.—1998.—V. 8, № 2.—P. 30–48.
3. *Topping D. M.* Jordan algebras of self-adjoint operators // Mem. Am. Math. Soc.—1965.—V. 53.—P. 1–48.
4. *Arzikulov F. N.* On an analog of the Peirce decomposition // Sib. Math. J.—1999.—V. 40, № 3.—P. 413–419.
5. *Кусраев А. Г.* Булевозначный анализ нормированных йордановых алгебр // Вин: Исследования по функциональному анализу и его приложениям.—М.: Наука, 2006.—С. 50–124.

6. *Li Bing-Ren*. Real operator algebras, Institute of Mathematics, Academia Sinica Beijing 100080.—China.—223 p.
7. *Аюпов Ш. А.* Классификация и представления упорядоченных йордановых алгебр.—Ташкент: Фан, 1986.—122 с.
8. *Alfsen E. M., Shultz F. W., Stormer E. A.* Gelfand–Neumark theorem for Jordan algebras // Adv. Math.—1978.—V. 28, № 1.—P. 11–56.
9. *Hanche-Olcen H., Stormer E.* Jordan Operator Algebras.—Boston etc: Pitman Publ. Inc., 1984.—183 p.
10. *Кусраев А. Г.* О структуре AJW-алгебр типа I_2 // Сиб. мат. журн.—1999.—№ 4.—С. 905–917.
11. *Pedersen G. K.* On weak and monotone σ-closure of C^*-algebras // Commun. Math. Phys.—1968/1969.—№ 11.—P. 221–226.
12. *Ayupov S. A.* Exitension of traces and type criterions for Jordan algebras of selv-adjoint operators // Math. Z.—1982.—V. 181.—P. 253–268.

Статья поступила 21 октября 2005 г.

Арзикулов Фарходжон Нематжонович, к. ф.-м. н.
Андижан, Научный центр Андижан — Наманган
E-mail: `arzikulovfn@yahoo.com`