Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2006, Том 8, Выпуск 2

УДК **517.98**

ТЕОРЕМА ГЕЛЬФАНДА — МАЗУРА ДЛЯ C^*-АЛГЕБР НАД КОЛЬЦОМ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

К. К. Кудайбергенов

Установлено, что всякая C^*-алгебра классов эквивалентности измеримых сечений, элементы которого с единичным носителем обратимы, изоморфна алгебре измеримых функций.

Как известно, одним из важных результатов в теории банаховых алгебр является теорема Гельфанда — Мазура о том, что всякая банахова алгебра в которой всякий ненулевой элемент обратим, изометрически изоморфна полю комплексных чисел.

В последнее время интенсивно изучаются модули Банаха — Канторовича над кольцом измеримых функций (см. [1–4]). При этом основными методами исследования являются: метод булевозначного анализа и метод измеримых банаховых расслоений. Применение булевозначного анализа хорошо отражено в монографии А. Г. Кусраева [2], а метод измеримых банаховых расслоений в работе А. Е. Гутмана [1]. Исследование циклических комплексных C^*-алгебр, наделенных модульной структурой над алгеброй Стоуна с использованием методов булевозначного анализа предложено в работе [3] (см. также [4]). В [3] для C^*-алгебр, наделенных модульной структурой над алгеброй Стоуна с использованием методов булевозначного анализа были получены векторные аналоги теорем Гельфанда — Мазура и Глисона — Желязко — Кахана. А в [5], используя метод измеримых банаховых расслоений, было дано представление C^*-алгебр над кольцом измеримых функций в виде измеримого расслоения классических C^*-алгебр.

В данной работе доказывается, что всякая C^*-алгебра Банаха — Канторовича над кольцом измеримых функций, каждый элемент которой с единичным носителем обратим, изометрически $*$-изоморфна алгебре измеримых функций.

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с полной конечной мерой, $L^0 = L^0(\Omega)$ — алгебра всех комплексных измеримых функций на (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются).

Рассмотрим векторное пространство E над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Определение 1 [4]. Отображение $\|\cdot\| : E \longrightarrow L^0$ называется L^0-значной нормой на E, если для любых $x, y \in E$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ имеют место соотношения:

1) $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Пара $(E, \|\cdot\|)$ называется *решеточно-нормированным* пространством (РНП) над L^0. Говорят, что РНП E d-разложимо, если для любого $x \in E$ и для любого разложения $\|x\| = e_1 + e_2$ в сумму дизъюнктных элементов найдутся такие $x_1, x_2 \in E$, что $x = x_1 + x_2$ и $\|x_1\| = e_1, \|x_2\| = e_2$. Сеть $\{x_\alpha\}$ элементов из E называется (bo)-сходящейся к $x \in E$, если $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow{o} 0$ в L^0. Пространством Банаха — Канторовича (ПБК) над L^0 называется (bo)-полное d-разложимое РНП над L^0 (см. [2, 4]).

Пусть $\mathcal{U}$ — произвольная $*$-алгебра над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и $\mathcal{U}$ является модулем над L^0, причем $(\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*, (\lambda u)v = \lambda(uv) = u(\lambda v)$ для всех $\lambda \in L^0$, $u, v \in \mathcal{U}$. Рассмотрим на $\mathcal{U}$ некоторую L^0-значную норму $\|\cdot\|$, наделяющую $\mathcal{U}$ структурой пространства Банаха — Канторовича, в частности, $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ для всех $\lambda \in L^0$, $u \in \mathcal{U}$.

Определение 2 [5]. $\mathcal{U}$ называется *C^*-алгеброй над L^0*, если для всех $u, v \in \mathcal{U}$ имеют место соотношения:

1) $\|u \cdot v\| \leqslant \|u\|\|v\|$;
2) $\|u^*\| = \|u\|$;
3) $\|u^* \cdot u\| = \|u\|^2$.

Пусть X — отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторую C^*-алгебру $(\mathcal{U}(\omega), \|\cdot\|_\omega)$. *Сечением* X называется функция u, определенная почти всюду в Ω и принимающая значение $u(\omega) \in \mathcal{U}(\omega)$ для всех $\omega \in \operatorname{dom} u$, где $\operatorname{dom} u$ есть область определения u.

Пусть L — некоторое множество сечений.

Определение 3 [5]. Пара (X, L) называется *измеримым расслоением C^*-алгебр*, если

1) $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in L$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ и $c_1, c_2 \in L$, где $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 : \omega \in \operatorname{dom} c_1 \cap \operatorname{dom} c_2 \mapsto \lambda_1 c_1(\omega) + \lambda_2 c_2(\omega)$;
2) функция $\|c\| : \omega \in \operatorname{dom} c \mapsto \|c(\omega)\|_\omega$ измерима при всех $c \in L$;
3) для каждой точки $\omega \in \Omega$ множество $\{c(\omega) : c \in L, \omega \in \operatorname{dom} c\}$ плотно в $\mathcal{U}(\omega)$.
4) если $u \in L$, то $u^* \in L$, где $u^* : \omega \in \operatorname{dom} u \mapsto u(\omega)^*$;
5) если $u, v \in L$, то $u \cdot v \in L$, где $u \cdot v : \omega \in \operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v \mapsto u(\omega) \cdot v(\omega)$.

Сечение s называется ступенчатым, если $s(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(\omega) c_i(\omega)$, где $c_i \in L$, $A_i \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$. Сечение u называется измеримым, если найдется такая последовательность $\{s_n\}$ ступенчатых сечений, что $\|s_n(\omega) - u(\omega)\|_\omega \to 0$ почти для всех $\omega \in \Omega$.

Пусть $\mathcal{M}(\Omega, X)$ — множество всех измеримых сечений. Символом $L^0(\Omega, X)$ обозначим факторизацию $\mathcal{M}(\Omega, X)$ по отношению равенства почти всюду. Через $\hat{u}$ обозначим класс из $L^0(\Omega, X)$, содержащий сечение u. Отметим, что функция $\omega \mapsto \|u(\omega)\|_\omega$ измерима для любого $u \in \mathcal{M}(\Omega, X)$. Класс эквивалентности, содержащий функцию $\|u(\omega)\|_\omega$, обозначим через $\|\hat{u}\|$. Положим $\hat{u} \cdot \hat{v} = \widehat{u(\omega) \cdot v(\omega)}$ и $\hat{u}^* = \widehat{u(\omega)^*}$.

В работе [5] доказано, что $(L^0(\Omega, X), \|\cdot\|)$ является C^*-алгеброй над L^0.

Пусть $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ алгебра ограниченных измеримых функций на (Ω, Σ, μ), $L^\infty(\Omega)$ — факторизация $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ по отношению равенства почти всюду. Положим

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, X) = \{u \in \mathcal{M}(\Omega, X) : \|u(\omega)\|_\omega \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\}.$$

Элементы из $\mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ называются существенно ограниченными измеримыми сечениями. Множество классов эквивалентности существенно ограниченных сечений обозначается символом $L^\infty(\Omega, X)$.

Рассмотрим произвольный лифтинг $p : L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ (см. [1]).

Определение 4 [5]. Отображение $l_X : L^\infty(\Omega, X) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ называетсявекторнозначным лифтингом* (ассоциированным с лифтингом p), если для всех $\hat{u}, \hat{v} \in L^\infty(\Omega, X)$ и $\lambda \in L^\infty(\Omega)$ имеют место следующие соотношения:

1) $l_X(\hat{u}) \in \hat{u}$, $\operatorname{dom} l_X(\hat{u}) = \Omega$;
2) $\|l_X(\hat{u})(\omega)\|_\omega = p(\|\hat{u}\|)(\omega)$;
3) $l_X(\hat{u} + \hat{v}) = l_X(\hat{u}) + l_X(\hat{v})$;

4) $l_X(\lambda\hat{u}) = p(\lambda)l_X(\hat{u})$;
5) $l_X(\hat{u}^*) = l_X(\hat{u})^*$;
6) $l_X(\hat{u}\hat{v}) = l_X(\hat{u})l_X(\hat{v})$;
7) множество $\{l_X(\hat{u})(\omega) : \hat{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ плотно в $\mathcal{U}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — C^*-алгебры над L^0. Оператор $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ называется:
(a) L^0-*линейным*, если $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ для всех $\alpha, \beta \in L^0$ и $x, y \in \mathcal{U}$;
(b) *изометрией*, если $\|T(x)\| = \|x\|$ для всех $x \in \mathcal{U}$;
(c) $*$-*гомоморфизмом*, если $T(xy) = T(x)T(y)$ и $T(x^*) = T(x)^*$ для всех $x, y \in \mathcal{U}$.

Говорят, что $\mathcal{U}$ изометрически $*$-изоморфно $\mathcal{V}$, если существует L^0-линейный изометрически $*$-изоморфизм из $\mathcal{U}$ на $\mathcal{V}$.

Известно [5, теорема 2], что для всякой C^*-алгебры $\mathcal{U}$ над L^0 существует измеримое расслоение C^*-алгебр (X, L) такое, что $\mathcal{U}$ изометрически $*$-изоморфна $L^0(\Omega, X)$, и на $L^\infty(\Omega, X)$ существует лифтинг, ассоциированный с некоторым числовым лифтингом p.

Далее везде $L^0(\Omega, X)$ есть C^*-алгебра над L^0 с единицей e и $\|e\| = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — единица в L^0. Заметим, что на $L^\infty(\Omega, X)$ можно ввести числовую норму, полагая

$$\|x\|_\infty = \|\|x\|\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad x \in L^\infty(\Omega, X).$$

Так как $(L^\infty(\Omega, X), \|\cdot\|)$ ПБК над $L^\infty(\Omega)$, то из [4, теорема 7.1.2 (1)] следует, что $(L^\infty(\Omega, X), \|\cdot\|_\infty)$ банахово пространство. Кроме того, для $x, y \in L^\infty(\Omega, X)$ имеем

$$\|x \cdot y\|_\infty = \|\|x \cdot y\|\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|\|x\|\|y\|\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|\|x\|\|_{L^\infty(\Omega)}\|\|y\|\|_{L^\infty(\Omega)} = \|x\|_\infty\|y\|_\infty,$$
$$\|x^* \cdot x\|_\infty = \|\|x^* \cdot x\|\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\|x\|^2\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\|x\|\|^2_{L^\infty(\Omega)} = \|x\|^2_\infty.$$

Следовательно, $(L^\infty(\Omega, X), \|\cdot\|_\infty)$ является C^*-алгеброй над $\mathbb{C}$.

Для $x \in L^0(\Omega, X)$ положим $A_x = \{\omega \in \Omega : \|x\|(\omega) \neq 0\}$. Идемпотент $\pi_x = \chi_{A_x}$ называется носителем элемента x. Если $\pi_x = \mathbf{1}$, то x называется элементом с единичным носителем. Отметим, что носитель элемента x это наименьший идемпотент из ∇ со свойством $\pi_x x = x$, где ∇ — полная булева алгебра всех идемпотентов из L^0.

Следующий результат является векторным аналогом теоремы Гельфанда — Мазура.

Теорема 1. *Пусть $L^0(\Omega, X)$ — C^*-алгебра над L^0. Если всякий элемент из $L^0(\Omega, X)$ с единичным носителем обратим, то $L^0(\Omega, X)$ изометрически $*$-изоморфно L^0.*

$\lhd$ Пусть $x \in L^\infty(\Omega, X)$ и $x = aa^* \geqslant 0$. Покажем, что $x = \|x\|e$. Пусть $y = \|x\|e - x$. Положим $A_y = \{\omega \in \Omega : \|y\|(\omega) \neq 0\}$ и $\pi_y = \chi_{A_y}$. Элемент $\pi_y^\perp e + \pi_y y$ является элементом с единичным носителем. Поэтому существует $z \in L^0(\Omega, X)$ такое, что $e = (\pi_y^\perp e + \pi_y y)z = z(\pi_y^\perp e + \pi_y y)$. Отсюда почти для всех $\omega \in A_y$ имеет место $y(\omega)z(\omega) = z(\omega)y(\omega) = e(\omega)$. Следовательно, почти для всех $\omega \in A_y$ имеем

$$(\|x(\omega)\|_\omega e(\omega) - x(\omega))z(\omega) = z(\omega)(\|x(\omega)\|_\omega e(\omega) - x(\omega)) = e(\omega). \tag{1}$$

Так как $x = aa^* \geqslant 0$, то $x(\omega) = a(\omega)a^*(\omega) \geqslant 0$ почти для всех $\omega \in \Omega$. Поэтому из [6, теорема 11.28] число $\|x(\omega)\|_\omega$ почти для всех $\omega \in \Omega$ принадлежит спектру элемента $x(\omega) \in \mathcal{U}(\omega)$, где $\mathcal{U}(\omega)$ комплексная C^*-алгебра, соответствующая точке $\omega \in \Omega$ в измеримом расслоений C^*-алгебр над Ω. Отсюда в силу (1) вытекает, что $\pi_y = 0$. Следовательно, $\|x\|e - x = y = 0$ или $x = \|x\|e$.

Всякий элемент x комплексной C^*-алгебры $L^\infty(\Omega, X)$ можно представить в виде

$$x = t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 + t_4x_4,$$

где $t_i \in \mathbb{C}$, $x_i \in L^\infty(\Omega, X)$, $x_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, 4$. Поэтому $x = t_1\|x_1\|e + t_2\|x_2\|e + t_3\|x_3\|e + t_4\|x_4\|e$. Отсюда $x = \lambda_x e$, где $\lambda_x = t_1\|x_1\| + t_2\|x_2\| + t_3\|x_3\| + t_4\|x_4\| \in L^\infty(\Omega)$.

Так как $\|x\| = |\lambda_x|\|e\| = |\lambda_x|$, то $x \mapsto \lambda_x$ изометрия из $L^\infty(\Omega, X)$ на $L^\infty(\Omega)$.

Для $x, y \in L^\infty(\Omega, X)$ имеем $xy = \lambda_x e \lambda_y e = \lambda_x \lambda_y e$ и $x^* = (\lambda_x e)^* = \overline{\lambda_x} e$. Поэтому соответствие $x \mapsto \lambda_x$ есть $*$-изоморфизм из $L^\infty(\Omega, X)$ на $L^\infty(\Omega)$.

Так как $L^\infty(\Omega, X)$ (bo)-плотно в $L^0(\Omega, X)$, то соответствие $x \mapsto \lambda_x$ имеет продолжение на $L^0(\Omega, X)$, которое будет изометрическим $*$-изоморфизмом из $L^0(\Omega, X)$ на L^0. $\rhd$

Следствие 2. *Пусть $L^\infty(\Omega, X)$ есть C^*-алгебра над $L^\infty(\Omega)$. Если всякий элемент из $L^\infty(\Omega, X)$ с единичным носителем обратим в $L^0(\Omega, X)$, то $L^\infty(\Omega, X)$ изометрически $*$-изоморфно $L^\infty(\Omega)$.*

Приведем еще один векторный аналог характеризации поля $\mathbb{C}$ в классе банаховых алгебр (ср. с [6, теорема 10.19]).

Теорема 3. *Пусть $L^0(\Omega, X)$ есть C^*-алгебра над L^0 и существует $M \in L^0$ такое, что для всех $x, y \in L^0(\Omega, X)$ имеет место неравенство $\|x\|\|y\| \leqslant M\|xy\|$. Тогда $L^0(\Omega, X)$ изометрически $*$-изоморфно L^0.*

$\lhd$ *Случай 1.* $M \in L^\infty(\Omega)$. Тогда существует $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ такое, что $M \leqslant c\mathbf{1}$. Отсюда для всех $x, y \in L^\infty(\Omega, X)$ имеет место неравенство

$$\|x\|\|y\| \leqslant c\|xy\|. \tag{2}$$

Пусть $\omega \in \Omega$. Применяя числовой лифтинг p на $L^\infty(\Omega)$ к (2), имеем

$$p(\|(x)\|)(\omega)p(\|y\|)(\omega) \leqslant cp(\|xy\|)(\omega). \tag{3}$$

Используя свойства 2) и 6) векторнозначного лифтинга l_X на $L^\infty(\Omega, X)$, из (3) получим

$$\|l_X(x)(\omega)\|_\omega \|l_X(y)(\omega)\|_\omega \leqslant c\|l_X(x)(\omega) l_X(y)(\omega)\|_\omega. \tag{4}$$

Из свойства 7) лифтинга l_X множество $F_\omega = \{l_X(x)(\omega) : x \in L^\infty(\Omega, X)\}$ плотно в $\mathcal{U}(\omega)$. Так как $s_\omega(x_\omega, y_\omega) = \|x_\omega\|_\omega \|y_\omega\|_\omega - c\|x_\omega y_\omega\|_\omega$ непрерывная функция на $\mathcal{U}(\omega) \times \mathcal{U}(\omega)$, а из (4) следует, что $s_\omega \leqslant 0$ на $F_\omega \times F_\omega$, то $s_\omega \leqslant 0$ на $\mathcal{U}(\omega) \times \mathcal{U}(\omega)$. Это показывает, что для всех $x_\omega, y_\omega \in \mathcal{U}(\omega)$ верно

$$\|x_\omega\|_\omega \|y_\omega\|_\omega \leqslant c\|x_\omega y_\omega\|_\omega.$$

Поэтому из [6, теорема 10.19] следует, что $\mathcal{U}(\omega)$ изоморфно $\mathbb{C}$. Теперь из [7, теорема 1] вытекает, что $L^0(\Omega, X)$ изоморфно L^0. Отсюда для каждого $x \in L^0(\Omega, X)$ найдется такое $\lambda_x \in L^0$, что $x = \lambda_x e$. Как и в теореме 1 показывается, что соответствие $x \mapsto \lambda_x$ является изометрическим $*$-изоморфизмом из $L^0(\Omega, X)$ на L^0.

Случай 2. $M \in L^0 \setminus L^\infty(\Omega)$. При $x = y = e$ из неравенства $\|x\|\|y\| \leqslant M\|xy\|$ вытекает $M \geqslant \mathbf{1}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\Omega_n = \{\omega \in \Omega : n \leqslant M(\omega) < n + 1\}, \quad \pi_n = \chi_{\Omega_n}.$$

Тогда $\bigvee_{n=1}^\infty \pi_n = \mathbf{1}$ и $\pi_n M \leqslant \pi_n(n + 1)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда для всех $x, y \in L^0(\Omega, X), n \in \mathbb{N}$ имеет место

$$\pi_n\|x\|\|y\| \leqslant \pi_n(n + 1)\|xy\|.$$

Из случая 1 вытекает, что $\pi_n L^0(\Omega, X)$ изометрически $*$-изоморфно $\pi_n L^0$, а так как по построению $\bigvee_{n=1}^\infty \pi_n = \mathbf{1}$ и $\pi_i \pi_j = 0$ при $i \neq j$, то $L^0(\Omega, X)$ изометрически $*$-изоморфна L^0. $\rhd$

Следствие 4. *Пусть $L^\infty(\Omega, X)$ — C^*-алгебра над $L^\infty(\Omega)$ и существует $M \in L^0$ такое, что для всех $x, y \in L^\infty(\Omega, X)$ имеет место неравенство $\|x\|\|y\| \leqslant M\|xy\|$. Тогда $L^\infty(\Omega, X)$ изометрически $*$-изоморфно $L^\infty(\Omega)$.*

Автор благодарен профессору В. И. Чилину за полезное обсуждение результатов.

Литература

1. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно-нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН.—1995.—Т. 29.—С. 63–211.
2. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
3. *Кусраев А. Г.* Булевозначный анализ инволютивных банаховых алгебр.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 1996.—96 с.
4. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
5. *Ганиев И. Г., Чилин В. И.* Измеримые расслоения C^*-алгебр // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 1.—С. 35–38.
6. *Рудин У.* Функциональный анализ.—М.: Мир, 1977.—442 с.
7. *Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К.* Конечномерные модули над кольцом измеримых функций // Узб. мат. журн.—2004.—№ 4.—С. 3–9.

Статья поступила 18 мая 2005 г.

Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович, к. ф.-м. н.
Узбекистан, Ташкент, Институт математики АН Республики Узбекистан
E-mail: karim2006@mail.ru