Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2006, Том 8, Выпуск 2

УДК **517.92 + 519.217**

КВАДРАТИЧНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ СИМПЛЕКСА И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИХ ТРАЕКТОРИЙ

Р. Н. Ганиходжаев, Д. Б. Эшмаматова

В работе изучается асимптотическое поведение траекторий квадратичных автоморфизмов. Доказано, что произвольный квадратичный автоморфизм представим в виде композиции вольтерровского оператора и некоторого пермутатора. Выделен класс автоморфизмов общего положения, которые образуют открытое и всюду плотное подмножество. Изучаются свойства карт неподвижных точек автоморфизмов общего положения.

Введение

Ряд задач прикладного характера приводят к необходимости изучения асимптотического поведения траекторий квадратичных отображений симплекса

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) : \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geqslant 0 \right\}$$

в себя вида

$$V: \quad x'_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j, \qquad k = 1, \dots, m,$$

где

$$P_{i,j,k} = P_{ji,k} \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1. \tag{0.1}$$

В популяционной генетике эта задача представляет особый интерес в случае, когда $V: S^{m-1} \to S^{m-1}$ — топологический автоморфизм, изучению которого посвящена данная статья. В §§ 2–3 изучается строение неподвижных точек операторов вольтерровского типа и их связь с функциями Ляпунова. В § 4 для операторов вольтерровского типа общего положения вводится понятие карты неподвижных точек и рассматривается вопрос о существовании инвариантных многообразий. Основная цель статьи состоит в установлении регулярного поведения отрицательных траекторий и, как правило, нерегулярного поведения положительных траекторий квадратичных автоморфизмов. Полученные результаты представляют собой обобщение и дальнейшее развитие работ [1–5].

1. Общий вид квадратичных автоморфизмов симплекса S^{m-1}

Если коэффициенты $\{P_{ij,k}\}$ отображения (0.1) удовлетворяют условию $P_{ij,k}=0$ при $k\neq i,j$, то V будем называть оператором вольтерровского типа. Согласно [5] $a_{kk}=0$ и $a_{ki}=2P_{ik,k}-1$ при $i\neq k$ операторы вольтерровского типа можно привести к виду:

$$V: \qquad x'_k = x_k\left(1+\sum_{i=1}^m a_{ki}x_i\right), \quad k=1,\dots,m, \tag{1.1}$$

причем

$$a_{ki}=-a_{ik}, \quad |a_{ki}|\leqslant 1. \tag{1.2}$$

Далее $I=\{1,2,\dots,m\}$, точки $e_i=(\sigma_{1i},\dots,\sigma_{mi})$, где $\sigma_{i,j}$ — символ Кронекера, вершины симплекса S^{m-1}. Для $\alpha\subset I$ через Γ_α обозначим выпуклую оболочку вершин $\{e_i\}_{i\in\alpha}$. Внутренность Γ_α в топологии индуцированной из $\mathbb{R}^m$ на аффинную оболочку Γ_α называется относительной внутренностью и обозначается через $\operatorname{ri}\Gamma_\alpha$. Аналогично определяется относительная граница $\partial\Gamma_\alpha$ грани Γ_α, $|\alpha|$ — число элементов множества $\alpha\subset I$. Следующие предложения легко следуют из определения оператора вольтерровского типа.

(1) *$V(\Gamma_\alpha)\subset\Gamma_\alpha$, в частности, все вершины симплекса S^{m-1} являются неподвижными точками.*

(2) *$V(\operatorname{ri}\Gamma_\alpha)\subset\operatorname{ri}\Gamma_\alpha$, $V(\partial\Gamma_\alpha)\subset\partial\Gamma_\alpha$ для любого $\alpha\subset I$.*

Пусть $A=(a_{ki})$, где a_{ki} удовлетворяют (1.2). Через A_α обозначим матрицу, которая получается из A заменой нулями всех элементов a_{ki}, где $(k,i)\notin\alpha\times\alpha$. Пусть V_α — сужение V на Γ_α.

(3) *$V_\alpha:\Gamma_\alpha\to\Gamma_\alpha$ также оператор вольтерровского типа.*

(4) *Множество всех операторов вольтерровского типа геометрически представляет собой ($\frac{m(m-1)}{2}$)-мерный куб, центром симметрии которого является тождественный оператор ($a_{ki}\equiv 0$).*

Теорема 1. *Оператор вольтерровского типа есть автоморфизм симплекса S^{m-1}.*

$\lhd$ Доказательство проведем индукцией по m. При $m=1$ утверждение верно. Допустим, что оно верно при $1,\dots,m-1$. Докажем переход к m.

а) Покажем инъективность $V:S^{m-1}\to S^{m-1}$. Согласно предложениям (1) и (2) имеем

$$V:\partial S^{m-1}\to\partial S^{m-1}, \qquad V:\operatorname{ri}S^{m-1}\to\operatorname{ri}S^{m-1},$$

учитывая (3) и предположение индукции находим, что $V:\partial S^{m-1}\to\partial S^{m-1}$ гомеоморфизм. Поэтому остается проверить инъективность, $V:\operatorname{ri}S^{m-1}\to\operatorname{ri}S^{m-1}$. Пусть $x,y\in\operatorname{ri}S^{m-1}$ и $Vx=Vy$. Тогда

$$x_k\left(1+\sum_{i=1}^m a_{ki}x_i\right)=y_k\left(1+\sum_{i=1}^m a_{ki}y_i\right)$$

или

$$(x_k-y_k)\left(1+\sum_{i=1}^m a_{ki}y_i\right)=-x_k\sum_{i=1}^m a_{ki}(x_i-y_i). \tag{1.3}$$

Так как $x,y\in\operatorname{ri}S^{m-1}$, то $x_k>0$ и

$$1+\sum_{i=1}^m a_{ki}y_i\geqslant 1-y_1-\ldots-y_{k-1}-y_{k+1}-\ldots-y_m=y_k>0.$$

Поэтому из (1.3) получаем

$$\operatorname{sgn}(x_k - y_k) = -\operatorname{sgn}\sum_{i=1}^{m} a_{ki}(x_i - y_i). \tag{1.4}$$

Следовательно,

$$(x_k - y_k)\sum_{i=1}^{m} a_{ki}(x_i - y_i) \leqslant 0, \quad k = 1, \ldots, m,$$

или

$$\sum_{k=1}^{m}(x_k - y_k)\sum_{i=1}^{m} a_{ki}(x_i - y_i) \leqslant 0.$$

Так как $a_{ki} = -a_{ik}$, то

$$\sum_{k=1}^{m}(x_k - y_k)\sum_{i=1}^{m} a_{ki}(x_i - y_i) = 0.$$

Следовательно,

$$(x_k - y_k)\sum_{i=1}^{m} a_{ki}(x_i - y_i) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Учитывая (1.4), из последнего равенства находим $x = y$. Таким образом, $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ инъективно.

б) Сюръективность. Допустим, $V(S^{m-1}) \neq S^{m-1}$. По индуктивному предположению $V(\partial S^{m-1}) = \partial S^{m-1}$. Можно выбрать $x, y \in \operatorname{ri} S^{m-1}$ так, что $x \in V(S^{m-1})$, $y \notin V(S^{m-1})$ и отрезок $[x, y]$ содержит хотя бы одну граничную точку z множества $V(S^{m-1})$. Поскольку $V : S^{m-1} \to V(S^{m-1})$ гомеоморфизм, то граничная точка переходит в граничную. Поэтому $z \in \operatorname{ri} S^{m-1}$, $V^{-1}z \in \partial S^{m-1}$, что противоречит равенству $V(\partial S^{m-1}) = \partial S^{m-1}$.

Следовательно, $V(S^{m-1}) = S^{m-1}$. Так как непрерывная биекция компакта является гомеоморфизмом, то из а) и б) следует утверждение теоремы. $\rhd$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} a_{i_1,\ldots,i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ — однородная симметрическая форма k-той степени переменных $x_1, \ldots x_m$. Далее мы воспользуемся следующими простыми утверждениями.

(5) *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, Γ некоторая грань S^{m-1}, причем $U_\Gamma = U \cap \Gamma \neq \varnothing$. Если $f|_{U_\Gamma} = 0$, то $f|_\Gamma = 0$.*

Следствие. *Если квадратичные операторы V_1 и V_2 совпадают на U_Γ, то они совпадают и на Γ.*

(6) *Если $m > k$, то из $f|_{\partial S^{m-1}} = 0$ следует $f|_{S^{m-1}} = 0$.*

Замечание. При $m \leqslant k$ утверждение (6) не верно.

Следствие. *Если $m > 2$, то квадратичные операторы совпадающие на границе симплекса S^{m-1} совпадают и на всем симплексе.*

Теорема 2. *Произвольный квадратичный автоморфизм представим в виде $V = T \cdot V_0$, где T — матрица перестановок (пермутатор), а V_0 оператор вольтерровского типа.*

$\lhd$ Пусть $\Gamma^k = \{x \in S^{m-1} : x_k = 0\}$. Поскольку V автоморфизм, то для любого k существуют i и x такие, что $x \in \operatorname{ri}\Gamma^i, Vx \in \operatorname{ri}\Gamma^k$. Выберем окрестность U точки x в грани Γ^i так, чтобы $V(U) \subset \operatorname{ri}\Gamma^k$. Следовательно, для любого $y \in U$ имеем $(Vy)_k = 0$, где $(Vy)_k$ — k-тая координата V_y. Тогда согласно следствию из утверждения (5) находим

$V(\Gamma^i) \subset \Gamma^k$. Поэтому $0 = (Vx)_k = x_i \cdot f_i(x)$, $x \in \Gamma^i$, где $f_i(x)$ — линейные функционалы. Пусть $f_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ij}x_j$. Положив $a_{ij} = b_{ij} - 1$ и учитывая $\sum\limits_{j=1}^{m} x_j = 1$, находим

$$(Vx)_k = x_i\left(1 + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right), \quad x \in \Gamma^i. \tag{1.5}$$

Так как V автоморфизм, то различным k соответствуют различные i. Поэтому в (1.5) ограничение $x \in \Gamma^i$ можно заменить на $x \in \partial S^{m-1}$. Тогда при $m > 2$, пользуясь следствием из утверждения (6), находим

$$(Vx)_k = x_i\left(1 + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right), \quad x \in S^{m-1}. \tag{1.6}$$

Суммируя (1.6) по k, получаем $\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j = 0$ для любого $x \in S^{m-1}$. Следовательно, $a_{ij} = -a_{ji}$. Легко заметить, что при $|a_{ij}| > 1$ можно подобрать $0 < \varepsilon < 1$ так, что $V(\varepsilon e_i + (1-\varepsilon)e_j) \notin S^{m-1}$. Поэтому $a_{ij} = -a_{ji}$ и $|a_{ij}| \leqslant 1$. Таким образом квадратичный автоморфизм при $m > 2$ представим в виде $V = T \cdot V_0$. При $m \leqslant 2$ утверждение теоремы проверяется непосредственным вычислением. $\triangleright$

Следствие. *Множество всех квадратичных автоморфизмов симплекса S^{m-1} геометрически представляется в виде объединения $m!$ попарно непересекающихся кубов размерности $\frac{m(m-1)}{2}$.*

2. Неподвижные точки операторов вольтерровского типа

В этом параграфе даны необходимые сведения о неподвижных точках операторов вольтерровского типа, которые используются для построения функций Ляпунова и карты неподвижных точек в §§ 3–4. Пусть $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ — оператор вольтерровского типа,

$$V(x)_k = x_k\left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i\right), \quad k = 1, \ldots, m, \quad a_{ki} = -a_{ik}, \quad |a_{ij}| \leqslant 1, \tag{2.1}$$

и X — множество его неподвижных точек. Из (2.1) ясно, что $x \in X$ равносильно равенству $x_k \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki}x_i = 0$, $k = 1, \ldots, m$, т. е.

$$\operatorname{supp} x \cap \operatorname{supp} Ax = \varnothing, \tag{2.2}$$

где $\operatorname{supp} x = \{i : x_i \neq 0\}$.

Лемма 1. *Пусть $x, y \in X$ и l — прямая, проходящая через точки x и y. Если* $\operatorname{supp} x = \operatorname{supp} y$, *то*

$$l \cap S^{m-1} \subset X.$$

$\triangleleft$ Согласно (2.2) и условию $\operatorname{supp} x = \operatorname{supp} y$ находим

$$\operatorname{supp} x \cap (\operatorname{supp} Ax \cup \operatorname{supp} Ay) = \varnothing.$$

Поскольку $\operatorname{supp}(\lambda u + (1-\lambda)v) \subset \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} v$, то

$$\operatorname{supp}(\lambda x + (1-\lambda)y) \cap \operatorname{supp}(\lambda Ax + (1-\lambda)Ay) \subset \operatorname{supp} x \cap (\operatorname{supp} Ax \cup \operatorname{supp} Ay) = \varnothing.$$

Следовательно, $\lambda x + (1-\lambda)y \in X$ или $l \cap S^{m-1} \subset X$. $\triangleright$

Теорема 3. *Изолированная неподвижная точка имеет нечетное число ненулевых координат.*

$\lhd$ Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$ неподвижная точка с четным числом ненулевых координат. Поскольку любая грань Γ_α инвариантна, причем V_α также оператор вольтерровского типа, то без ограничения общности будем считать, что m — четное и $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$. Согласно (2.2) имеем $Ax = 0$. Поскольку $x \neq 0$, то $\mathrm{rg} A \leqslant m-1$. Как известно ([8, с. 261]), ранг кососимметрической матрицы четное число. Поэтому $\mathrm{rg} A \leqslant m-2$. Пусть $L = \mathrm{Ker}\, A$ и $H_0 = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \sum\limits_{i=1}^{m} y_i = 0 \right\}$. Так как $\dim L \geqslant 2$ и $\dim H_0 = m-1$, то $L \cap H_0 \neq \{0\}$. Выберем $z \in L \cap H_0$, $z \neq 0$. Поскольку $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} z_i = 0$, то можно указать $\delta > 0$ такое, что $x + \varepsilon z \in S^{m-1}$ при $|\varepsilon| \leqslant \delta$. По построению $x + \varepsilon z \in \mathrm{Ker}\, A$ или учитывая (2.2) имеем $x + \varepsilon z \in X$. Следовательно, неподвижная точка с четным числом ненулевых координат не может быть изолированной. $\rhd$

Лемма 2. *Если $A = (a_{ki})$ — кососимметрическая матрица, то*

$$P = \left\{ x \in S^{m-1} : \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \geqslant 0, \; k = 1, \ldots, m \right\} \neq \varnothing.$$

$\lhd$ Положив $F_k = \left\{ x \in S^{m-1} : \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \geqslant 0 \right\}$, докажем, что для любого $\alpha \subset I$ имеем

$$\Gamma_\alpha \subset \bigcup_{k \in \alpha} F_k. \tag{2.3}$$

Пусть $x \in \Gamma_\alpha$. Так как $a_{ki} = -a_{ik}$, то $\sum\limits_{i,k \in \alpha} a_{ki} x_k x_i = 0$. Поскольку $x_k \geqslant 0$, причем $x_k > 0$ хотя бы для одного $k \in \alpha$, то

$$\sum_{i \in \alpha} a_{ki} x_i \geqslant 0 \tag{2.4}$$

для некоторого $k \in \alpha$, иначе мы имеем

$$\sum_{i,k \in \alpha} a_{ki} x_k x_i = \sum_{k \in \alpha} x_k \sum_{i \in \alpha} a_{ki} x_i < 0.$$

Поскольку $x \in \Gamma_\alpha$, то согласно (2.4) находим $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} x_i = \sum\limits_{i \in \alpha} a_{ki} x_i \geqslant 0$. Следовательно, $x \in \bigcup\limits_{k \in \alpha} F_k$. Согласно комбинаторной лемме Шпернера ([6, с. 612]) из (2.3) следует $P = \bigcap\limits_{k=1}^{m} F_k \neq \varnothing$. $\rhd$

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$Q = \left\{ x \in S^{m-1} : \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \leqslant 0, \, k = 1, \ldots, m \right\} \neq \varnothing.$$

$\lhd$ Доказательство следует из того, что матрица A также кососимметрична. Итак, $P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geqslant 0\}$ и $Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leqslant 0\}$, где «$\leqslant$» — покоординатный порядок, непустые выпуклые многогранники. $\rhd$

Следствие 2. *Справедливы включения* $P \subset X$ *и* $Q \subset X$.

$\lhd$ Пусть, например, $x \in P$. Тогда

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i\right) \geqslant x_k, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{2.5}$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{m} x'_k = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k = 1$, то из (2.5) находим $x'_k = x_k$, т. е. $x \in X$. $\rhd$

Пример 1. Рассмотрим три квадратичных оператора действующих на S^2:

$$\text{a)} \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + x_2 - x_3), \\ x'_2 = x_2(1 - x_1 + x_3), \\ x'_3 = x_3(1 + x_1 - x_2), \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + x_2 + x_3), \\ x'_2 = x_2(1 - x_1 + x_3), \\ x'_3 = x_3(1 - x_1 - x_2), \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + x_2 - x_3), \\ x'_2 = x_2(1 - x_1), \\ x'_3 = x_3(1 + x_1). \end{cases}$$

Для каждого из этих операторов легко находим неподвижные точки:
a) $X = \bigl\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\bigr\}$,
b) $X = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$,
c) $X = \{(0, \lambda, 1-\lambda) : 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\} \cup \{(1,0,0)\}$.
Далее решив неравенства $Ax \geqslant 0$, $x \in S^2$, и $Ax \leqslant 0$, $x \in S^2$, получаем:
a) $P = Q = \bigl(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\bigr)$,
b) $P = (0,0,1), \quad Q = (1,0,0)$,
c) $P = \bigl\{(0, \lambda, 1-\lambda) : \frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1\bigr\}$, $Q = \bigl\{(0, \lambda, 1-\lambda) : 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}\bigr\}$.
Для $\alpha \subset I$ положим $P_\alpha = \{x \in \Gamma_\alpha : A_\alpha x \geqslant 0\}$, $Q_\alpha = \{x \in \Gamma_\alpha : A_\alpha x \leqslant 0\}$. Ясно, что P_α и Q_α также непустые выпуклые многогранники, причем

$$P_\alpha \subset X_\alpha, \quad Q_\alpha \subset X_\alpha,$$

где $X_\alpha = X \cap \Gamma_\alpha$.

Заметим, если $M \subset S^{m-1}$ выпукло и $x, y \in \operatorname{ri} M$, то $\operatorname{supp} x = \operatorname{supp} y$. Действительно, для минимальной грани Γ_α содержащей M имеем $\operatorname{ri} M \subset \operatorname{ri} \Gamma_\alpha$. $\rhd$

Лемма 3. *Если* $x \in \operatorname{ri} P$, *то* $\operatorname{supp} x \cup \operatorname{supp} Ax = I$.

$\lhd$ Поскольку $P \subset X$, то из $x \in \operatorname{ri} P$ согласно (2.2) имеем $\operatorname{supp} x \cap \operatorname{supp} Ax = \varnothing$. Поэтому допустив, что лемма не верна, без ограничения общности будем считать, что

$$x = (x_1, \ldots, x_{m-1}, 0), \quad Ax = (0, \ldots, 0), \tag{2.6}$$

где $x_1 > 0, \ldots, x_{m-1} > 0$. Общий случай можно свести к виду (2.6) переходом к рассмотрению подходящей грани Γ_α и соответствующего сужения, поскольку $x \in \operatorname{ri} P$ и $x \in \Gamma_\alpha$ влекут $x \in \operatorname{ri} P_\alpha$.

Учитывая кососимметричность матрицы A, а также (2.6) находим:

$$\operatorname{Ker} A \perp \operatorname{Im} A, \quad \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A = \mathbb{R}^m, \quad \operatorname{Ker} A \neq \{0\}. \tag{2.7}$$

a) Пусть существует $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \operatorname{Ker} A$ такой, что $z \neq 0$. Пусть $z_m > 0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $x_i + \varepsilon z_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$ и

$$y = \frac{x + \varepsilon z}{|x + \varepsilon z|} \in S^{m-1} \cap \operatorname{Ker} A,$$

где $|x+\varepsilon z| = \sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+\varepsilon z_i)$. Поскольку $Ay=0$, то $y\in P$. Из $x\in \operatorname{ri}P$, $y\in P$ следует $\frac{x+y}{2}\in \operatorname{ri}P$. По построению $\operatorname{supp}y = I$, $\operatorname{supp}x\neq I$. Тогда неравенство $\operatorname{supp}\frac{x+y}{2}\neq \operatorname{supp}x$ противоречит включениям $x, \frac{x+y}{2}\in \operatorname{ri}P$.

б) Пусть $\operatorname{Ker}A\subset \{z : z_m = 0\}$. Тогда $(0,\dots,0,1)\in \operatorname{Im}A$ согласно (2.7). Пусть $Au = (0,\dots,0,1)$, где $u=(u_1,\dots,u_m)$. Так как $A'=-A$, то $(u,Au)=0$, т. е. $u_m=0$. Далее при достаточно малых $|\varepsilon|$ имеем $x_i+\varepsilon u_i>0$, $i=1,\dots,m-1$ и $\frac{x+\varepsilon u}{|x+\varepsilon u|}\in S^{m-1}$, причем $A\left(\frac{x+\varepsilon u}{|x+\varepsilon u|}\right)\neq 0$ при $\varepsilon\neq 0$. Следовательно, $\frac{x+\varepsilon u}{|x+\varepsilon u|}\in P$ и $\frac{x-\varepsilon u}{|x-\varepsilon u|}\notin P$, где $\varepsilon>0$. Точка x лежит на отрезке с концами $\frac{x+\varepsilon u}{|x+\varepsilon u|}$ и $\frac{x-\varepsilon u}{|x-\varepsilon u|}$, поскольку

$$x=\frac{|x+\varepsilon u|}{2}\cdot\frac{x+\varepsilon u}{|x+\varepsilon u|}+\frac{|x-\varepsilon u|}{2}\cdot\frac{x-\varepsilon u}{|x-\varepsilon u|}$$

и

$$|x+\varepsilon u|+|x-\varepsilon u| = \sum_{i=1}^{m}(x_i+\varepsilon u_i)+\sum_{i=1}^{m}(x_i-\varepsilon u_i) = 2\sum_{i=1}^{m}x_i = 2.$$

Таким образом, $(\frac{x+\varepsilon u}{|x+\varepsilon u|}, x)\subset \operatorname{ri}P$, но

$$\left(x, \frac{x-\varepsilon u}{|x-\varepsilon u|}\right)\cap P=\varnothing,$$

что противоречит условию $x\in\operatorname{ri}P$. $\rhd$

3. Функции Ляпунова

Пусть $V : S^{m-1}\to S^{m-1}$ оператор вольтерровского типа и $x^0\in S^{m-1}$. Последовательность $\{x^{(n)}\}$, где $x^{(n)} = V^n x^0$, называется траекторией при $n\in\mathbb{Z}$, положительной (отрицательной) траекторией при $n\in\mathbb{N}$ $(-n\in\mathbb{N})$. Через $\omega^+(x^0)$ и $\omega^-(x^0)$ обозначаются множества предельных точек, соответственно, положительной и отрицательной траекторий. Непрерывный функционал $\varphi : S^{m-1}\to\mathbb{R}$ называется функцией Ляпунова для дискретной динамической системы

$$x_k^{(n+1)} = x_k^{(n)}\left(1+\sum_{i=1}^{m}a_{ki}x_i^{(n)}\right),\quad k=1,\dots,m,\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

если для любой начальной точки $x^0\in S^{m-1}$ существуют пределы

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi(x^{(n)}),\qquad \lim_{n\to-\infty}\varphi(x^{(n)}).$$

Теорема 4. *Если $p=(p_1,\dots,p_m)\in P$, то $\varphi(x) = x_1^{p_1}\dots x_m^{p_m}$ — функция Ляпунова для* (3.1).

$\lhd$ Вычислив $\varphi(Vx)$, находим

$$\varphi(Vx) = \prod_{k=1}^{m}\left(x_k\left(1+\sum_{i=1}^{m}a_{ki}x_i\right)\right)^{p_k} = \varphi(x)\prod_{k=1}^{m}\left(1+\sum_{i=1}^{m}a_{ki}x_i\right)^{p_k}. \tag{3.2}$$

Поскольку $P_k \geqslant 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{m} P_k = 1$, то используя неравенство Юнга [7], получаем

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{m}\left(1+\sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i\right)^{p_k} &\leqslant \sum_{k=1}^{m} p_k\left(1+\sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i\right) = 1+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_ip_k \\ &= 1-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ik}x_ip_k = 1-\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}p_k\right)x_i \leqslant 1, \end{aligned} \tag{3.3}$$

так как $1+\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki}x_i \geqslant 0$, $a_{ki} = -a_{ik}$, $\sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik}p_k \geqslant 0$ и $x_i \geqslant 0$.

Учитывая (3.3) из (3.2), имеем $\varphi(Vx) \leqslant \varphi(x)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x^{(n)})$ и $\lim\limits_{n\to-\infty} \varphi(x^{(n)})$ существуют. $\rhd$

Замечание. При определении функции $\varphi(x) = x_1^{p_1}\dots x_m^{p_m}$ на границе S^{m-1} считаем, что $0^0 = 1$.

Для $r = (r_1, \dots, r_m) \in S^{m-1}$ положим

$$\varphi_r(x) = x_1^{r_1}\dots x_m^{r_m};\quad \psi_r(x) = \prod_{k=1}^{m}\left(1+\sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i\right)^{r_k},\quad x \in S^{m-1}.$$

Ясно, что φ_r — вогнутая функция и $\max\limits_{x\in S^{m-1}} = \varphi_r(x) = \varphi_r(r)$, причем максимум достигается только лишь в точке $r = (r_1, \dots, r_m)$. Заметим, что ψ_r также вогнута, так как является композицией аффинного отображения $x_k \to 1+\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki}x_i$ и вогнутой функции φ_r. Очевидно, $0 \leqslant \psi_r(x) \leqslant 2$, причем, из $r \in P$ следует $\psi_r(x) \leqslant 1$ для всех $x \in S^{m-1}$.

Лемма 4. *Если $\psi_r(x) \leqslant 1$ для всех $x \in S^{m-1}$, то $r \in P$.*

$\lhd$ а) Сначала докажем, что $r \in X$. Пусть $u = V^{-1}r$. Тогда из $\varphi_r(r) = \varphi_r(Vu) = \varphi_r(u)\cdot\psi_r(u) \leqslant \varphi_r(u)$ следует $u = r$, поскольку функция φ_r своего максимума на S^{m-1} достигает только лишь в единственной точке r. Следовательно, $r = V^{-1}r$, т. е. $r \in X$.

б) Докажем, что $r \in P$. Допустив обратное, для некоторого k' имеем $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{k'i}r_i < 0$. Так как $r \in X$, то из (2.2) следует $r_{k'} = 0$. Выберем k'' так, что $r_{k''} > 0$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{k''i}r_i = 0$ также вытекает из (2.2). Положим $x = (x_1, \dots, x_m)$, где

$$x_i = \begin{cases} \varepsilon & \text{при } i = k', \\ r_{k''}-\varepsilon & \text{при } i = k'', \\ r_i & \text{при остальных } i. \end{cases} \tag{3.4}$$

Если $0 \leqslant \varepsilon \leqslant r_{k''}$, то $x \in S^{m-1}$. Напомним, что $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki}r_i = 0$ при $r_k > 0$. Тогда, учитывая (3.4), находим $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki}x_i = \varepsilon\cdot(a_{kk'} - a_{kk''})$.

Поэтому для всех $k = 1, \dots, m$ имеем

$$\left(1+\sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i\right)^{r_k} = 1+\varepsilon\cdot r_k\cdot(a_{kk'} - a_{kk''}) + 0(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\psi_r(x)=\prod_{k=1}^{m}\left(1+\sum_{i=1}^{m}a_{ki}x_i\right)^{r_k}=1+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}r_k(a_{kk'}-a_{kk''})+0(\varepsilon).$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{m}r_k a_{kk''}=-\sum_{i=1}^{m}a_{k''i}r_i=0,$$

то

$$\psi_r(x)=1+\varepsilon\cdot\sum_{k=1}^{m}a_{kk'}r_k+0(\varepsilon)=1-\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{m}a_{k'i}r_i+0(\varepsilon)>1$$

при достаточно малом $\varepsilon>0$. Итак, допущение $r\notin P$ приводит к противоречию с условием леммы. $\triangleright$

Следствие. *$\psi_r(x)\leqslant 1$ на симплексе S^{m-1} тогда и только тогда, когда $r\in P$.*

Пусть

$$\operatorname{Arg\,max} f(x)=\{y\in S^{m-1}:f(y)=\max_{x\in S^{m-1}}f(x)\}$$

— множество точек достижения максимума функции $f:S^{m-1}\to\mathbb{R}$.

Лемма 5. *Если $r\in\operatorname{ri}P$, то $\operatorname{Arg\,max}\psi_r(x)=[M]$ — замыкание множества $M=\{x\in X:\operatorname{supp}x=\operatorname{supp}r\}$.*

$\triangleleft$ (*a*) Согласно лемме 4 имеем $\psi_r(x)\leqslant 1$. При $x\in M$ из $r_k>0$ следует $x_k>0$. Поскольку $x\in X$, то $x_k>0$ влечет $\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ki}x_i=0$. Следовательно,

$$\psi_r(x)=\prod_{k=1}^{m}\left(1+\sum_{i=1}^{m}a_{ki}x_i\right)^{r_k}=1,$$

т. е. $M\subset\operatorname{Arg\,max}\psi_r(x)$. Таким образом, $[M]\subset\operatorname{Arg\,max}\psi_r(x)$.

б) Пусть $y\in\operatorname{Arg\,max}\psi_r(x)$. Так как $\psi_r(x)$ непрерывная вогнутая функция, то множество $\operatorname{Arg\,max}\psi_r(x)$ замкнуто и выпукло. Поскольку $r\in M$, то $\psi_r(r)=1$. Поэтому из $\psi_r(y)=\psi_r(r)=1$ следует, что

$$\psi_r(\lambda y+(1-\lambda)r)=1,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

Дифференцируя это равенство по λ находим

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{r_k\cdot\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ki}(y_i-r_i)}{1+\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ki}r_i+\lambda\cdot\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ki}(y_i-r_i)}=0,\quad 0<\lambda<1.\tag{3.5}$$

Так как $r\in\operatorname{ri}P\subset X$, то согласно (2.2) имеем $r_k\cdot\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ki}r_i=0$, $k=1,\ldots,m$. Следовательно, (3.5) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{r_k\cdot\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ki}y_i}{1+\lambda\cdot\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ki}y_i}=0,\quad 0<\lambda<1.\tag{3.6}$$

Нетрудно заметить, что из (3.6) имеем $r_k \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} y_i = 0$, т. е.

$$\operatorname{supp} r \cap \operatorname{supp} Ay = \varnothing.$$

Далее, учитывая $a_{ki} = -a_{ik}$ и $r_k \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} y_i = 0$, находим

$$\sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{i=1}^{m} a_{ki} y_i = -\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik} r_k = 0.$$

Поскольку $y_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik} r_k \geqslant 0$, то из последнего равенства получаем $y_i \cdot \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik} r_k = 0$ или $\operatorname{supp} y \cap \operatorname{supp} Ar = \varnothing$.

Согласно лемме 3 $\operatorname{supp} r \cup \operatorname{supp} Ar = I$, т. е. r_k и $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} r_i$ не могут одновременно быть нулями. Поэтому из $\operatorname{supp} r \cap \operatorname{supp} Ay = \varnothing$ и $\operatorname{supp} y \cap \operatorname{supp} Ar = \varnothing$ следует $\operatorname{supp} y \cap \operatorname{supp} Ay = \varnothing$.

Следовательно, $y \in X$ и вообще, $\operatorname{Arg}\max \psi_r(x) \subset X$. Далее

$$\operatorname{supp} y \subset \operatorname{supp} r, \tag{3.7}$$

что вытекает из равенств $\operatorname{supp} y \cap \operatorname{supp} Ar = \varnothing$, $\operatorname{supp} r \cup \operatorname{supp} Ar = I$. Учитывая (3.7) и $r \in M$, получаем $(y, r] \subset M$. Следовательно, $y \in [M]$. Таким образом, $\operatorname{Arg}\max \psi_r(x) \subset [M]$.

Итак, $\operatorname{Arg}\max \psi_r(x) = [M]$ при $r \in \operatorname{ri} P$. $\triangleright$

Теорема 5. *Если $x^0 \notin X$, то $\omega^+(x^0) \subset \partial S^{m-1}$.*

$\triangleleft$ Допустив обратное, выберем $r \in \omega^+(x^0) \cap \operatorname{ri} S^{m-1}$. Если $p \in \operatorname{ri} P$, то согласно теореме 4 существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_p(x^{(n)}) = c \geqslant 0$. Очевидно, $\varphi_p(r) = c$. Поскольку $r \in \operatorname{ri} S^{m-1}$, то $\varphi_p(r) = c > 0$. Следовательно, $\psi_p(r) = \frac{\varphi_p(Vr)}{\varphi_p(r)} = 1$. Пользуясь леммой 5 получаем $r \in [M]$, в частности, $r \in X$. Для внутренней неподвижной точки согласно (2.2) находим $Ar = 0$. Поэтому $r \in P$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_r(x^{(n)}) = \varphi_r(r)$. С другой стороны, $x^0 \neq r$, поэтому $\varphi_r(x^0) < \varphi_r(r)$. Далее, $\{\varphi_r(x^{(n)})\}$ — невозрастающая последовательность (теорема 4). Следовательно, $\varphi_r(r) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_r(x^{(n)}) \leqslant \varphi_r(x^0) < \varphi_r(r)$. Последнее противоречие завершает доказательство теоремы. $\triangleright$

Теорема 6. *Если положительная траектория не сходится, то $\omega^+(x^0)$ бесконечно.*

$\triangleleft$ Пусть $\omega^+(x^0) = \{y^1, \ldots, y^t\}, 1 < t < \infty$. Тогда с точностью до нумерации имеем $Vy^i = y^{i+1}$ при $i = 1, \ldots, t-1$ и $Vy^t = y^1$. Пусть Γ минимальная грань содержащая y^1. Тогда $y^1 \in \operatorname{ri}\Gamma$ и в силу инвариантности $\operatorname{ri}\Gamma$ имеем $\omega^+(x^0) \subset \operatorname{ri}\Gamma$. С другой стороны $y^1 \notin X$ и согласно теореме 5 имеем $\omega^+(y^1) = \omega^+(x^0) \subset \partial\Gamma$. Поскольку $\operatorname{ri}\Gamma \cap \partial\Gamma = \varnothing$, то получаем противоречие. Итак, допущение $1 < t < \infty$ приводит к противоречию. $\triangleright$

Лемма 6. $\dim[M] = \dim \operatorname{ri} P$.

$\triangleleft$ Пусть Γ_α — минимальная грань содержащая P. Тогда $\operatorname{ri} P \subset \operatorname{ri}\Gamma_\alpha$. По определению M также имеем $\operatorname{ri} P \subset M \subset \operatorname{ri}\Gamma_\alpha$. Пусть $L_k = \Big\{z \in \mathbb{R}^m : \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} z_i > 0\Big\}$. Если $x \in M$, то $x_k > 0$ для всех $k \in \alpha$. Поскольку $M \subset X$, то $x_k > 0$ влечет $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} x_i = 0$. Для $y \in \operatorname{ri} P$

согласно лемме 3 при $k \notin \alpha$ имеем $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} y_i > 0$. Следовательно,

$$\operatorname{ri} P = \bigcap_{k \notin \alpha} (M \cap L_k). \tag{3.8}$$

Поскольку M выпукло, L_k открыто и $M \cap L_k \neq \varnothing$, то $\dim M = \dim(M \cap L_k)$.

Поэтому из (3.8) получаем $\dim M = \dim \operatorname{ri} P$. $\triangleright$

Следствие. *Семейство функций $\{\varphi_r\}, r \in \operatorname{ri} P$ разделяет точки M, т. е. если $x, y \in M$ и $x \neq y$, то существует $r \in \operatorname{ri} P$ такое, что $\varphi_r(x) \neq \varphi_r(y)$.*

$\triangleleft$ Пусть $x, y \in M$ и $\varphi_r(x) = \varphi_r(y)$ для всех $r \in \operatorname{ri} P$. Поскольку $\operatorname{supp} x = \operatorname{supp} y = \operatorname{supp} r = \alpha$, то $\varphi_r(x) = \varphi_r(y) > 0$. Поэтому логарифмируя равенство $\varphi_r(x) = \varphi_r(y)$ находим

$$\sum_{i \in \alpha} \operatorname{ri} \ln \frac{x_i}{y_i} = 0. \tag{3.9}$$

Так как $\dim M = \dim \operatorname{ri} P$, то из (3.9) следует $x = y$. $\triangleright$

Теорема 7. *Отрицательные траектории сходятся, причем $\omega^-(x^0) \in P$, если $x^0 \in \operatorname{ri} S^{m-1}$.*

$\triangleleft$ а) Для любого $p \in \operatorname{ri} P$ имеем $\varphi_p(x^0) > 0$, поскольку $x^0 \in \operatorname{ri} S^{m-1}$. Далее, $\{\varphi_p(x^{(-n)})\}$ — неубывающая последовательность (теорема 4). Следовательно,

$$\psi_p(x^{(-n)}) = \frac{\varphi_p(x^{(-n)})}{\varphi_p(x^{(-n-1)})} \to 1 \quad \text{при } n \to +\infty,$$

т. е. $\omega^-(x^0) \subset [M]$. Так как $\varphi_p(x^0) > 0$, то $\operatorname{supp} y > \operatorname{supp} p$ для любого $y \in \omega^-(x^0)$. Следовательно, $\omega^-(x^0) \subset M$. Поскольку $\{\varphi_p\}$, $p \in \operatorname{ri} P$ разделяет точки M, то $\omega^-(x^0)$ состоит из единственной точки. Действительно, из сходимости $\{\varphi_p(x^{(-n)})\}$ следует сходимость любой ее подпоследовательности к тому же пределу. Поэтому, если $y, z \in \omega^-(x^0)$, то $\varphi_p(y) = \varphi_p(z)$ для всех $p \in \operatorname{ri} P$, т. е. $y = z$. Итак, отрицательные траектории сходятся.

б) Докажем, что $\omega^-(x^0) \in P$. Пусть $\omega^-(x^0) = \{y\}$ и $y \notin P$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} y_i < 0$ для некоторого k, причем в достаточно малой окрестности y последнее неравенство сохраняется. Поскольку $y \in X$, то из $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} y_i < 0$ следует $y_k = 0$. Так как

$$x_k^{(-n)} = x_k^{(-n-1)} \left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i^{(-n-1)}\right) < x_k^{(-n-1)}$$

в достаточно малой окрестности y, то $x_k^{(-n)}$ возрастает. Поэтому $x_k^{(-n)} \not\to y_k = 0$. Следовательно, $\omega^-(x^0) \in P$. $\triangleright$

Замечание. Если положительная траектория сходится и $x^0 \in \operatorname{ri} S^{m-1}$, то $\omega^+(x^0) \in Q$.

Пример 2. Пусть $V : S^3 \to S^3$ имеет вид:

$$V : \begin{cases} x_1' = x_1(1 + x_2 - x_3 + x_4), \\ x_2' = x_2(1 - x_1 + x_3 + x_4), \\ x_3' = x_3(1 + x_1 - x_2), \\ x_4' = x_4(1 - x_1 - x_2). \end{cases}$$

Решив необходимые неравенства находим $P = \{x \in S^3 : Ax \geqslant 0\} = \{(0, 0, \lambda, 1-\lambda) : 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}\}$, $Q = \{x \in S^3 : Ax \leqslant 0\} = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)\}$, $M = \{(0, 0, \lambda, 1-\lambda) : 0 < \lambda < 1\}$. Любая отрицательная траектория сходится к некоторой точке из P. Положительные траектории не сходятся.

4. Карта неподвижных точек операторов вольтерровского типа

Итак, в § 3 установлена сходимость всех отрицательных траекторий. В этом параграфе изучается асимптотическое поведение положительных траекторий.

Теорема 8. *Если все главные миноры четного порядка кососимметрической матрицы A положительны, то X конечно.*

$\lhd$ Допустим, что X бесконечно. Тогда существуют $x, y \in X$, $x \neq y$, такие, что $\operatorname{supp} x = \operatorname{supp} y$. Положив $\alpha = \operatorname{supp} x = \operatorname{supp} y$, рассмотрим Γ_α, V_α и A_α. Поскольку $x \in \operatorname{ri}\Gamma_\alpha$, $\operatorname{supp} x \cap \operatorname{supp} A_\alpha x = \varnothing$ и $\operatorname{supp} A_\alpha x \subset \alpha$, то $A_\alpha x = 0$. Аналогично $A_\alpha y = 0$. Так как x и y линейно независимы, то $\dim\ker A_\alpha \geqslant m - |\alpha| + 2$. Следовательно, все главные миноры порядков $|\alpha|$ и $|\alpha| - 1$ кососимметрической матрицы A_α равны нулю. Тогда матрица A имеет хотя бы по одному главному минору порядков $|\alpha|$ и $|\alpha| - 1$ равному нулю. Поскольку $x \neq y$, то $|\alpha| \geqslant 2$, и следовательно, A имеет нулевой минор четного порядка. $\rhd$

Оператор вольтерровского типа $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ будем называть *типичным*, если все главные миноры четного порядка кососимметрической матрицы положительны. Поскольку определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка всегда равен нулю, а четного порядка неотрицателен, причем произвольно малым возмущением элементов его можно сделать положительным, то множество всех типичных операторов открыто и всюду плотно в множестве всех операторов вольтерровского типа. Далее будем рассматривать только лишь операторы являющиеся типичными. Поскольку X конечно, то согласно теореме 3 для любого $x \in X$ число $|\operatorname{supp} x|$ нечетно. Напомним также, если x конечно, то из $x, y \in X$ и $\operatorname{supp} x = \operatorname{supp} y$ следует $x = y$ (лемма 1). Поэтому обозначение неподвижной точки с носителем α через z_α является корректным.

Лемма 7. *Если $x \in X$, то $\operatorname{supp} x \cup \operatorname{supp} Ax = I$.*

$\lhd$ Допустим, что существует $k \in I$, для которого $x_k = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} x_i = 0$. Пусть $\operatorname{supp} x = \alpha$ и $\beta = \alpha \cup \{k\}$. Поскольку $|\alpha|$ нечетно, то $|\beta| = |\alpha| + 1$ четно. Рассмотрим Γ_β и соответствующие сужения V_β, A_β. Поскольку $x \in X \cap \Gamma_\beta$, то согласно (2.2) находим $A_\beta x = 0$, т. е. $\det A_\beta = 0$. Следовательно, A имеет нулевой главный минор четного порядка. $\rhd$

Теорема 9. *Пусть $V'(z_\alpha)$ производная оператора V в неподвижной точке $z_\alpha \in X$ и $\sigma(V'(z_\alpha))$ ее спектр. Тогда*

i) $1 \in \sigma(V'(z_\alpha))$;

ii) $\sigma(V'(z_\alpha))$ *имеет $|\alpha| - 1$ комплексных чисел по модулю больших чем 1 и $m - |\alpha|$ действительных чисел отличных от 1.*

$\lhd$ Вычислив якобиан, находим

$$V'(x) = \begin{pmatrix} 1 + \sum a_{1i} x_1 & a_{12} x_1 & \dots & a_{1m} x_1 \\ a_{21} x_2 & 1 + \sum a_{2i} x_2 & \dots & a_{2m} x_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots \\ a_{m1} x_m & a_{m2} x_m & \dots & 1 + \sum a_{mm} x_m \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

После необходимой перенумерации можно считать $z_\alpha = (z_1, \dots, z_{|\alpha|}, 0, \dots, 0)$. Учитывая (2.2) и лемму 7, находим $Az_\alpha = (0, \dots, 0, \mu_{|\alpha|+1}, \dots, \mu_m)$, где $\mu_i \neq 0$ при $i \geqslant |\alpha| + 1$. Следовательно, из (4.1) получаем

$$V'(z_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}z_1 & \dots & a_{1t}z_1 & * & \dots & \dots & * \\ a_{21}z_2 & 1 & a_{23}z_2 \dots & a_{2t}z_2 & * & \dots & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t1}z_t & a_{t2}z_t & \dots a_{tt-1}z_t & 1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1+\mu_{t+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1+\mu_m \end{pmatrix},$$

где $t = |\alpha|$. Из правого нижнего блока получаем, что $\sigma(V'(z_\alpha))$ имеет $m - |\alpha|$ действительных чисел отличных от 1. Левый верхний блок представим в виде:

$$E + \mathrm{diag}(z_1, \dots, z_t)A_t, \tag{4.2}$$

где E — единичная матрица порядка t, $A_t = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \dots, t)$ — кососимметрическая матрица. Поскольку t нечетно, то $\det A_t = 0$. Поэтому $1 \in \sigma(V'(z_\alpha))$. То, что 1 собственное число кратности один следует из того, что все главные миноры A_t порядка $t-1$ положительны. Все собственные числа кососимметрической матрицы либо 0, либо чисто мнимые, поэтому $t-1$ собственных чисел $V'(z_\alpha)$ имеют вид $1 + ic_k$. $\triangleright$

Замечание. Так как на S^{m-1} переменные $x_1, \dots, x_m$ связаны условием $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$ и $1 \in \sigma(V'(z_\alpha))$ отражает этот факт, то 1 следует исключить из относительного спектра.

Следствие. *Все неподвижные точки оператора V являются гиперболическими.*

Элементы X представим в виде точек на плоскости, затем точки $z_\alpha, z_\beta \in X$ соединим дугой, направленной от z_α к $z_\beta \in X$, если $A_\gamma z_\alpha \geqslant 0$, $A_\gamma z_\beta \leqslant 0$, где $\gamma = \alpha \cup \beta$. Полученный ориентированный граф назовем *картой неподвижных точек* оператора V и обозначим через G_V.

Пример 3. Рассмотрим $V : S^3 \to S^3$, где

$$V : \begin{cases} x_1' = x_1(1 - x_2 + x_3 - x_4), \\ x_2' = x_2(1 + x_1 - x_3 + x_4), \\ x_3' = x_3(1 - x_1 + x_2 - x_4), \\ x_4' = x_4(1 + x_1 - x_2 + x_3). \end{cases}$$

Легко заметить, что V имеет 6 неподвижных точек:

$$X = \left\{(1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0), (0,0,0,1); \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right); \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Далее неподвижные точки $z_\alpha \in X$ будут называться также вершинами карты G_V. *Висячая вершина карты* — вершина в которую не входит ни одной дуги.

Теорема 10. *Карта неподвижных точек имеет единственную висячую вершину.*

$\triangleleft$ 1) Поскольку X конечно, то $P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geqslant 0\}$ состоит из одной неподвижной точки. Далее для $\alpha \supset \mathrm{supp}\, x$ имеем

$$(A_\alpha x)_i = \begin{cases} (Ax)_i, & i \in \alpha, \\ 0, & i \notin \alpha. \end{cases}$$

Поэтому для любого $\alpha \supset \mathrm{supp}\, P$ имеем $A_\alpha P \geqslant 0$, т. е. P — висячая вершина.

2) Обратно, пусть z_α — висячая вершина. Допустим, что $(Az_\alpha)_i < 0$ для некоторого $i \in I$. Согласно (2.2) имеем $i \notin \alpha$. Пусть $\beta = \alpha \cup \{i\}$. Тогда $A_\beta z_\alpha \leqslant 0$. Решение неравенства $A_\beta x \geqslant 0$, $x \in \Gamma_\beta$ обозначим через z_γ. Следовательно, $A_\beta z_\alpha \leqslant 0$, $A_\beta z_\gamma \geqslant 0$, причем $z_\alpha \neq z_\gamma$. Поэтому z_α и z_γ соединены дугой направленной из z_γ в z_α, т. е. z_α не может быть висячей вершиной. Таким образом, $Az_\alpha \geqslant 0$ или $z_\alpha = P$. $\rhd$

Вершины z_α и z_β кары G_V назовем *соседними*, если $|\alpha| = |\beta| = |\alpha \cup \beta| - 1$.

Лемма 8. *Соседние вершины всегда соединены дугой.*

$\lhd$ Пусть z_α и z_β соседние вершины. Полагая $\gamma = \alpha \cup \beta$, находим, что одна из этих вершин является решением неравенства. $A_\gamma x \geqslant 0$, $x \in \Gamma_\gamma$, а другая решением неравенства $A_\gamma x \leqslant 0$, $x \in \Gamma_\gamma$. Действительно, $A_\gamma z_\alpha$ и $A_\gamma z_\beta$ имеют только лишь по одной ненулевой координате согласно лемме 7. $\rhd$

Утверждение обратное лемме 8 неверно.

Пример 4. Для $V : S^3 \to S^3$, где

$$V : \begin{cases} x_1' = x_1(1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ x_2' = x_2(1 - x_1 + x_3 - x_4), \\ x_3' = x_3(1 - x_1 - x_2 + x_4), \\ x_4' = x_4(1 - x_1 + x_2 - x_3), \end{cases}$$

легко находим $X = \big\{(1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0), (0,0,0,1); (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\big\}$, Ясно, что z_1 и z_{234} не являясь соседними вершинами соединены дугой. Карту неподвижных точек назовем однородной, если из того, что две вершины z_α и z_β соединены дугой следует, что $|\alpha| = |\beta|$.

Лемма 9. *Пусть G_V однородная карта. Тогда число дуг инцидентных вершине z_α не меньше чем $m - |\alpha|$.*

$\lhd$ Согласно (2.2) и лемме 7 имеем $(Az_\alpha) \neq 0$ при $i \notin \alpha$ и $(Az_\alpha)_i = 0$ при $i \in \alpha$. Выбрав $i \notin \alpha$, положим $\gamma = \alpha \cup \{i\}$. Тогда z_α является решением одного из неравенств

$$A_\gamma x \geqslant 0, \quad x \in \Gamma_\gamma, \quad \text{или} \quad A_\gamma x \leqslant 0, \quad x \in \Gamma_\gamma. \tag{4.3}$$

Пусть z_β решение другого из неравенств (4.3). Поскольку $(A_\gamma z_\alpha)_i = (A_\gamma z_\beta)_i \neq 0$, то $z_\alpha \neq z_\beta$, причем они соединены дугой. Ясно, что различным i соответствуют различные β. Следовательно, каждой нулевой координате точки z_α соответствует дуга инцидентная вершине z_α. Поэтому число дуг, инцидентных z_α, не меньше чем $m - |\alpha|$. $\rhd$

Следствие. *Если G_V — однородная карта, то из $z_\alpha \in X$ следует существование не менее $m - |\alpha| + 1$ неподвижных точек с $|\alpha|$ ненулевыми координатами.*

Нетрудно заметить, что однородная карта состоит из следующих связных компонент: неподвижные точки (вершины) с одной ненулевой координатой, затем неподвижные точки с тремя ненулевыми координатами и т. д. Для определенности связные компоненты будем располагать слева направо в порядке возрастания количества ненулевых координат вершин. Положим $G_V = G_V^{(1)} \cup G_V^{(3)} \cup G_V^{(5)} \cup \ldots$, где $G_V^{(2k+1)}$ — связная компонента, состоящая из неподвижных точек с $2k+1$ ненулевыми координатами. Если $G_V = G_V^{(1)}$, то карту назовем *транзитивной.* Заметим, если G_V — транзитивная карта, то все положительные траектории сходятся.

Теорема 11. *Пусть G_V однородная и нетранзитивная карта и z_α решение неравенства $Ax \leqslant 0$, $x \in S^{m-1}$, т. е. $z_\alpha = Q$. Тогда существует $(m - |\alpha|)$-мерная инвариантная поверхность, содержащая решение неравенства $Ax \geqslant 0$, $x \in S^{m-1}$.*

$\lhd$ Пусть $z_\alpha = (z_1, \dots z_m)$ и $i \notin \alpha$. Тогда $(Az_\alpha)_i < 0$. Далее, $1 + \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} z_j > 0$, поскольку a_{ij} не могут быть отрицательными при всех $j \in \alpha$, что вытекает из однородности и нетранзитивности карты G_V. Поэтому согласно теореме 9 все $m - |\alpha|$ вещественных собственных чисел $V'(z_\alpha)$ заключены в интервале $(0, 1)$. Следовательно, V — локальный диффеоморфизм в некоторой окрестности z_α. Пусть

$$\operatorname{aff} S^{m-1} = L^s \bigoplus L^u$$

— разложение аффинной оболочки S^{m-1} в точке z_α на «сжимающуюся» и «растягивающуюся» части ([9, с. 80]). По построению «растягивающаяся» часть L^u совпадает с $\operatorname{aff} \Gamma_\alpha$, причем она является инвариантной не только для $V'(z_\alpha)$, но и для V. Заметим, что $\dim L^u = |\alpha| - 1$ и $\dim L^s = m - |\alpha|$. Согласно теореме Гробмана — Хартмана [9] в достаточно малой окрестности z_α существует инвариантная $(m - |\alpha|)$-мерная поверхность, которую обозначим через M_0. Пусть $M_n = V^{(-n)}(M_0)$ и $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [M_n]$. Ясно, что $M_0 \subset M_1 \subset \dots$ Далее, любая отрицательная траектория $\{x^{(-n)}\}$ сходится. Поскольку $M_0 \bigcap \mathrm{ri}\ S^{m-1} \neq \varnothing$, то $P = \{x \in S^{m-1} : \ Ax \geqslant 0\} \in M$. $\rhd$

Следствие. *Если z_α и z_β — соседние вершины, то существует инвариантная кривая, соединяющая неподвижные точки z_α и z_β.*

$\lhd$ Доказательство непосредственно следует из теоремы 11, если положить $\gamma = \alpha \cup \beta$ и рассмотреть V_γ. $\rhd$

Пример 5. Пусть $V : S^4 \to S^4$, где

$$V := \begin{cases} x_1' = x_1(1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5), \\ x_2' = x_2(1 - x_1 - x_3 + x_4 + x_5), \\ x_3' = x_3(1 + x_1 + x_2 + x_4 - x_5), \\ x_4' = x_4(1 - x_1 - x_2 - x_3 + x_5), \\ x_5' = x_5(1 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4). \end{cases}$$

Заметим, что V кроме вершин симплекса S^4 имеет еще 4 неподвижные точки:

$$z_{145} = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad z_{125} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}\right),$$
$$z_{345} = \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad z_{235} = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right).$$

В данном случае $m = 5$, $P = z_{145}$, $Q = z_{235}$, $\alpha = \{2, 3, 5\}$, $m - |\alpha| = 2$. Легко проверить, что z_{145}, z_{125}, z_{345}, z_{235} лежат на одной плоскости, пересечение которой с S^4 является инвариантным относительно оператора V.

Теорема 12. *Пусть G_V — однородная и нетранзитивная карта, а M — инвариантная поверхность упомянутая в теореме 11. Если $x^0 \in \mathrm{ri}\, S^{m-1} \setminus M$, то положительная траектория $\{x^{(n)}\}$ не сходится.*

$\lhd$ Действительно, если $\{x^{(n)}\}$ сходится, то согласно замечанию к теореме 7 имеем $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{(n)} = Q$. Поскольку V — автоморфизм и Q — гиперболическая точка, то последнее не возможно только лишь при $x^0 \in M$.

Итак, отрицательные траектории всегда сходятся, а положительные траектории, как правило, не сходятся, причем $\omega^+(x^0)$ — бесконечное множество. $\rhd$

5. Построение функций Ляпунова для динамической системы (3.1)

Оценка $\omega(x^0) \subset \partial S^{m-1}$, полученная в теореме 5, в ряде случаев допускает улучшения. В этом параграфе предложен метод построения немонотонных функций Ляпунова для динамической системы (3.1). Пусть $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ — квадратичный оператор вольтерровского типа и G_V — однородная карта. Следующие предложения дают представление о строении однородных карт:

(1) *Пусть $z_\alpha, z_\lambda \in G_V$, причем $|\alpha| = |\lambda|$. Тогда существует цепочка вершин $z_\alpha, z_\beta, z_\gamma, \dots, z_\lambda$ такая, что любые две рядом стоящие в ней вершины являются соседними.*

(2) *Если G_V содержит орцикл (гамильтонов контур)* [5]*, например $z_\alpha \to z_\beta \to \dots \to z_\lambda \to z_\alpha$, то существует вершина z_μ такая, что $\mu \subset \alpha \cup \beta \cup \dots \cup \lambda$ и $|\mu| \geqslant |\alpha| + 2$.*

(3) *Если z_α — висячая вершина, то для любой другой вершины z_β карты G_V имеем $|\beta| \leqslant |\alpha|$.*

Доказательства этих утверждений можно провести комбинаторными методами с использованием фактов из теории орграфов.

Пусть $z_\alpha = (r_1, \dots, r_m) \in X$. Положим $\varphi_\alpha(x) = x_1^{r_1} \dots x_m^{r_m}$, $x \in \operatorname{ri} S^{m-1}$.

Теорема 13. *Пусть z_α висячая вершина однородной карты G_V. Если $z_\beta \in X$, причем $|\beta| = |\alpha|$, то φ_β — функция Ляпунова для динамической системы* (3.1).

Доказательству теоремы предпошлем несколько простых замечаний:

(1) Если $x^0 \notin X$, то $\omega^+(x^0) \cap \omega^-(x^0) = \varnothing$.

(2) Если $y \in \omega^+(x^0)$, то $\omega^+(y) \subset \omega^+(x^0)$ и $\omega^-(y) \subset \omega^+(x^0)$.

(3) $V(\omega^+(x^0)) = \omega^+(x^0), \quad V(\omega^-(x^0)) = \omega^-(x^0)$.

(4) Пусть $z_\alpha, z_\beta \in X$, $|\alpha| = |\beta|$, $\alpha \neq \beta$. Тогда $\varphi_\alpha(z_\beta) = \varphi_\beta(z_\alpha) = 0$.

$\triangleleft$ Доказательство теоремы 13. Без ограничения общности будем считать, что $x^0 \in \operatorname{ri} S^{m-1} \setminus M$. Тогда согласно теореме 12 $\omega^+(x^0)$ бесконечное множество. Покажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_\beta(x^{(n)}) = 0$. Допустив противное, имеем $\varphi_\beta(y) > 0$ для некоторого $y \in \omega^+(x^0)$. Ясно, что из $\varphi_\beta(y) > 0$ следует $\operatorname{supp} y \supset \beta$. Далее отрицательная траектория начинающаяся в точке y сходится, причем $\omega^-(y) \subset \omega^+(x^0)$. Пусть $\omega^-(y) = \{z_\gamma\}$. Так как $\operatorname{supp} y \supset \beta$, то, учитывая теорему 7 и однородность карты G_V, получим $|\gamma| = |\beta|$. Рассмотрим разложение $\operatorname{aff} S^{m-1}$ в точке z_γ на «сжимающуюся» L^s и «растягивающуюся» L^u части. Пусть M_γ инвариантная поверхность соответствующая L^s. Поскольку $z_\gamma \in \omega^+(x^0)$ и $\{x^{(n)}\}$ не сходится, то M_γ обязана содержать хотя бы одну предельную точку положительной траектории $\{x^{(n)}\}$. Пусть $u \in M_\gamma \cap \omega^+(x^0)$. Тогда $\omega^-(u) \subset \omega^+(x^0)$. Так как отрицательные траектории сходятся, то $\omega^-(u) = \{z_\delta\}$. Нетрудно заметить, что $|\delta| = |\beta|$. По построению вершины z_δ и z_γ на карте G_V соединены дугой направленной от z_δ к z_γ. Так как последняя связная компонента (компонента содержащая вершины P и Q) однородной карты не может иметь орциклов, то продолжая приведенное выше рассуждение в конце концов получаем $P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geqslant 0\} \subset \omega^+(x^0)$, что противоречит теореме 4. $\triangleright$

Следствие. *Если $x^0 \in \operatorname{ri} S^{m-1} \setminus M$, то $\omega^+(x^0) \subset \bigcap_\beta \varphi_\beta^{-1}(0)$, где пересечение берется по всем β таким, что $|\beta| = |\alpha|$ и z_β некоторая вершина карты G_V, а z_α — висячая вершина.*

Для примера 5 теорема 13 позволяет получить следующие функции Ляпунова:

$$\varphi_{145}(x) = (x_1x_4x_5)^{\frac{1}{3}}, \quad \varphi_{125}(x) = (x_1x_2x_5)^{\frac{1}{3}},$$
$$\varphi_{345}(x) = (x_3x_4x_5)^{\frac{1}{3}}, \quad \varphi_{235}(x) = (x_2x_3x_5)^{\frac{1}{3}}.$$

Литература

1. *Kesten H.* Quadratic Transformations: a model for population qrownth. I // Adv. Appl. Probab.—1970.—V. 2, № 1.—P. 1–82.
2. *Валландер С. С.* О предельном поведении последовательности итераций некоторых квадратичных преобразований // Докл. АН СССР.—1972.—Т. 202, № 3.—С. 515–517.
3. *Menzel M. T., Stein P. R., Ulam S. M.* Quadratic Transformations. 1.—Los Alamos, 1959.—P. 158 (Rep. T.A2305).
4. *Jenas R. D.* Quadratic Differetial Sistems for Interactive Population Models // J. Diff. Eq.—1969.—V. 5.—P. 497–514.
5. *Ганиходжаев Р. Н.* Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры // Мат. сб.—1992.—Т. 183, № 8.—С. 121–140.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.
7. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства.—М., 1948.
8. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ.—М.: Мир, 1989.
9. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику.—М.: Мир, 1975.

Статья поступила 11 января 2005 г.

Эшмаматова Дилфуза Бахрамовна, к. ф-м. н.
Ташкент, Ташкентский Институт инженеров железнодорожного транспорта
E-mail: `24dil@mail.ru`

Ганиходжаев Расул Набиевич, д. ф.-м. н.
Ташкент, Узбекский Национальный Университет