*Владикавказский математический журнал*
*Январь–март, 2006, Том 8, Выпуск 1*

*УДК* **517.2+519.21**

# НАРУШЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ ТИПА КОШИ — РИМАНА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**А. Л. Гончаров**

В работе излагается метод построения обобщенных систем типа Коши — Римана с сингулярными коэффициентами, для которых не имеет места аналог теоремы Лиувилля, а также метод построения нетривиальных решений на всей плоскости для таких систем.

## Введение

Многие свойства эллиптических систем типа Коши — Римана на плоскости $E$ комплексной пареметнной $z = x + iy$, $i^2 = -1$, определяются тем, имеет ли место для рассматриваемой системы аналог теоремы Лиувилля, т. е. следует ли из существования непрерывного на всей плоскости и обращающегося в нуль на бесконечности решения системы, что это решение тождественно равно нулю. Такая информация весьма важна при рассмотрении вопроса о разрешимости краевых задач и сопутствующих двумерных интегральных уравнений.

Аналог теоремы Лиувилля имеет место для широкого класса эллиптических систем вида
$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} + A(z)w(z) + B(z)\overline{w} = 0, \quad z \in E, \tag{1}$$
где $\partial/\partial\bar z = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$, коэффициенты $A(z)$ и $B(z)$ могут допускать в изолированных точках плоскости полярные особенности порядка строго меньше единицы и «достаточно быстро» убывают при $z \to \infty$ [1, с. 128]. Однако для сингулярных систем вида (1) с теоремой Лиувилля дело обстоит сложнее. На возможность ее нарушения для систем вида
$$|z| \cdot \frac{\partial w}{\partial \bar z} + A(z)w(z) + B(z)\overline{w} = 0, \quad z \in E, \tag{2}$$
указывал Л. Г. Михайлов. В [2, с. 112] им получена оценка сверху для числа линейно независимых решений системы (2), обращающихся в нуль при $z = \infty$, в предположении, что коэффициенты $A(z)$ и $B(z)$ равны нулю вне некоторой ограниченной области плоскости $E$, содержащей точку $z = 0$.

З. Д. Усмановым в монографии [3] на с. 39 и с. 84 установлено, что для систем
$$2\bar z \cdot \frac{\partial w}{\partial \bar z} - B(z)\overline{w} = 0, \quad z \in E, \quad B(0) \neq 0, \tag{3}$$
такой аналог имеет место, если выполнено одно из условий:

$(*)$ $B(z) \equiv B(0)$, $z \in E$;

$(**)$ функция $B(z)$ тождественно равна нулю вне ограниченной области, содержащей точку $z = 0$, непрерывна в замыкании этой области и удовлетворяет в точке $z = 0$ условию Гёльдера.

Новый класс систем вида (3), для которых теорема Лиувилля справедлива, выделен в [4]. В [4] доказано, что если функция $B(z)$ принадлежит классу $C^1_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, (обозначения книги [3]) внутри любой конечной области плоскости $E$ и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Im}\left(z \cdot \frac{\partial B}{\partial z}\right) = 0, \quad 2\left|z \cdot \frac{\partial B}{\partial z}\right| \leqslant |B(z)|^2, \quad z \in E, \tag{4}$$

где $\partial/\partial z = 1/2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$, то для системы (3) имеет место теорема Лиувилля. Приведенные далее в [4] примеры показывают, что при невыполнении условий (4) теорема Лиувилля для системы (3) может нарушаться и при выборе таких систем имеется определенный произвол. В связи с этим естественно возникает вопрос об описании случаев подобных нарушений условий (4).

В настоящей работе предлагается метод построения систем вида (3), для которых теорема Лиувилля не имеет места, позволяющий требовать от коэффициента $B(z)$ и соответствующего ему нетривиального решения $w(z)$ выполнения некоторых дополнительных условий.

## 1. Случай гладкого вне нуля, ограниченного коэффициента $B(z)$

Пусть функция $B(z)$ непрерывна в окрестности $G \subset E$ точки $z = 0$ и

$$|B(z) - B(0)| \leqslant c|z|^\delta,$$

где $c$ и $\delta$ — положительные постоянные, $\lambda = B(0) \neq 0$, и пусть для любого целого $k \geqslant 0$ $\mu_k = \sqrt{|\lambda|^2 + k^2}$, $p_{-k} = \mu_k - k$. Тогда всякое непрерывное в $G$ решение $w(z)$ уравнения

$$2\bar{z}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - B(z)\overline{w} = 0 \tag{5}$$

обращается в нуль при $z = 0$ и поведение $w(z)$ характеризуется одним из соотношений [3, с. 74–79]:

$$w(z) = \left(\lambda A_k e^{ik\varphi} + p_k \overline{A}_k e^{-ik\varphi}\right) r^{\mu_k} + O\left(r^{\mu_k + \alpha_k}\right), \quad r \to 0, \ k \geqslant 0, \tag{6}$$

здесь $z = re^{i\varphi} \in G$, $A_k$ — комплексная постоянная, определяемая функциями $B(z)$ и $w(z)$, $\alpha_k > 0$.

Согласно [3, с. 38], первое слагаемое в правой части равенства (6) является решением уравнения

$$2\bar{z}\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} - \lambda\overline{\Phi} = 0, \quad \lambda = B(0). \tag{7}$$

поэтому всякое непрерывное в достаточно малой окрестности точки $z = 0$ решение уравнения (5) допускает представление $w(z) = \Phi(z)P(z)$, где $\Phi(z)$ — некоторое решение уравнения (7), $P(z)$ — непрерывная и не обращающаяся в нуль в этой окрестности функция, такая, что $P(0) = 1$.

Пусть теперь $\lambda \neq 0$ и $A \neq 0$ — произвольные комплексные числа, $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$,

$$\Phi(z) = \left(\lambda A e^{ik\varphi} + p_k \overline{A} e^{-ik\varphi}\right) r^{\mu_k}, \quad z \in E \tag{8}$$

— решение уравнения (7). Очевидно, $\Phi(z) \neq 0$ для $z \neq 0$.

Выберем произвольную функцию $P(z)$, обладающую свойствами:

$$\begin{aligned}
&P(z) \in C_\alpha^m(E), \;\; m \geqslant 1, \;\; 0 \leqslant \alpha \leqslant 1;\\
&P(z) \neq 0 \;\text{ для любого }\; z \in E;\\
&P(0) = 1;\\
&\lim_{z\to\infty} |z|^{\mu_k} \cdot P(z) = 0;
\end{aligned}$$

и положим для $z \in E \setminus \{0\}$

$$B(z) = \frac{\lambda P(z) + 2\bar z \frac{\partial P}{\partial \bar z} \Phi(z) \overline{\Phi}^{-1}(z)}{\overline{P}(z)}, \quad B(0) = \lambda. \tag{10}$$

Легко видеть, что функция $B(z)$ непрерывна в $E$, принадлежит классу $C_\alpha^{m-1}$ внутри $E \setminus \{0\}$ и удовлетворяет вблизи точки $z = 0$ неравенству

$$|B(z) - B(0)| \leqslant c|z|, \quad z \in G,$$

где $G = \{z : \, |z| \leqslant 1, \, |P(z)| \geqslant 1/2\}$, $c = 4(1 + |\lambda|) \left( \max\limits_G \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| + \max\limits_G \left| \frac{\partial P}{\partial \bar z} \right| \right)$.

Рассмотрим функцию

$$w(z) = \Phi(z) P(z), \quad z \in E. \tag{11}$$

В силу (9) $w(z)$ непрерывна в $E$, дифференцируема в $E \setminus \{0\}$ и $\lim\limits_{z\to\infty} w(z) = 0$. При этом из (7) находим

$$\begin{aligned}
2\bar z \frac{\partial w}{\partial \bar z} &= 2\bar z \frac{\partial \Phi}{\partial \bar z} P(z) + 2\bar z \Phi(z) \frac{\partial P}{\partial \bar z}\\
&= \lambda \frac{P(z)}{\overline{P}(z)} \overline{\Phi}(z) \overline{P}(z) + \frac{2\bar z \frac{\partial P}{\partial \bar z}}{\overline{P}(z)} \frac{\Phi(z)}{\overline{\Phi}(z)} \overline{\Phi}(z) \overline{P}(z) = B(z) \overline{w}(z), \quad z \neq 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, $w(z)$ является нетривиальным и обращающимся в нуль на бесконечности решением уравнения вида (3), коэффициент $B(z)$ которого обладает перечисленными выше свойствами.

## 2. Сглаживание в нуле

Выбирая всевозможные функции $P(z)$, подчиненные условиям (9), и варьируя в (8) комплексный параметр $\lambda \neq 0$ и целочисленный параметр $k > 0$, с помощью равенств (10) и (11) можно строить коэффициенты и соответствующие им нетривиальные решения систем вида (3), удовлетворяющие некоторым дополнительным требованиям. Так, полагая $P = Q^{-1}$, где $Q(x, y)$ — многочлен вещественных переменных $x, y$ с комплексными коэффициентами степени $N > \mu_k$, такой, что $Q(x, y) \neq 0$ для любых $x, y$ и $Q(0, 0) = 1$, будем иметь

$$\sup_E \frac{|\bar z \cdot \partial P / \partial \bar z|}{|\overline{P}(z)|} = \sup_E \frac{|\bar z \cdot \partial Q / \partial z|}{|Q(z)|} < \infty$$

откуда, как видно из (10), следует оценка $\sup\limits_E |B(z)| < \infty$.

В частности, для $P(z) = \left(1+|z|^N\right)^{-1}$, $z \in E$, $N > \mu_k$, из (10) и (11) получаем

$$B(z) = \lambda - N\frac{|z|^N}{1+|z|^N}\frac{\Phi(z)}{\overline{\Phi}(z)} = \lambda - N|z|^N\frac{\lambda A z^k + p_{-k}\overline{A}\bar{z}^k}{(1+|z|^N)\left(p_{-k}Az^k + \bar{\lambda}\overline{A}\bar{z}^k\right)},$$

$z \neq 0$, $B(0) = \lambda$, $k > 0$. Поэтому для любой функции $\Phi(z)$ вида (8) и любого наперед заданного целого $n \geqslant 1$ от функции $B(z)$ можно потребовать, чтобы она принадлежала классу $C^n_\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, в любой конечной области плоскости $E$.

Таким образом, в любом наперед заданном классе функций конечной гладкости можно выбрать ограниченную на всей плоскости функцию $B(z)$ такую, чтобы для уравнения (3) нарушалась теорема Лиувилля, при этом для нетривиального и обращающегося в нуль на бесконечности решения $w(z)$ этого уравнения нельзя исключать никакое из возможных асимптотических поведений вблизи особой точки $z = 0$.

Выражение $B(z)$ становится особенно простым, если положить в (10) $\lambda = 2$, $\Phi(z) = |z|^2$, $P(z) = f\left(|z|^2\right)$, $z \in E$, где $f(x)$ — достаточно гладкая комплексная функция вещественной переменной $x \geqslant 0$ такая, что $f(x) \neq 0$, $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x)) = 0$.

Тогда $\partial P/\partial\bar{z} = zf'\left(|z|^2\right)$ и равенства (10) и (11) принимают вид

$$B(z) = \left(2\frac{f(x) + xf'(x)}{\bar{f}(x)}\right)_{x=|z|^2}, \quad z \in E, \tag{12}$$

$$w(z) = (xf(x))_{x=|z|^2}, \quad z \in E, \tag{13}$$

откуда следует, что при нарушении теоремы Лиувилля для уравнения вида (3) коэффициент и соответствующее ему нетривиальное решение могут быть вещественно-аналитическими функциями на всей плоскости $E$.

## 3. Множества постоянных значений $B(z)$

Как показано в [4], функцию $f(x)$ в (12), (13) можно подобрать так, чтобы коэффициент $B(z)$ был непрерывен на всей плоскости и обладал свойством: $B(z) \equiv B(0) = 2$, $|z| \geqslant 1$. В то же время, если $w(z)$ является решением уравнения (3), то, как легко видеть, для любого $\varepsilon > 0$ функция $w_\varepsilon(z) \equiv w(z/\varepsilon)$, $z \in E$, удовлетворяет соотношению

$$2\bar{z}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\bar{z}} - B_\varepsilon(z)\overline{w}_\varepsilon(z) = 0,$$

где $B_\varepsilon(z) \equiv B(z/\varepsilon)$, $z \in E$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $B(z)$, непрерывная на всей плоскости, такая, что выполнены условия:

1) $B(0) \neq 0$; $B(z) \equiv B(0)$, $|z| \geqslant \varepsilon$;

2) для уравнения (3) нарушается теорема Лиувилля (ср. с условием $(*)$).

Сейчас мы покажем, как с помощью равенств (10) и (11) можно получить ограниченный на всей плоскости коэффициент $B(z)$, множество нулей которого имеет непустую внутренность в $E$, а также соответствующее ему нетривиальное решение уравнения (3).

Рассмотрим в круге $|\xi| \leqslant 1$ функцию $p(\xi) = 1 - |\xi|^2 - (3/2)\bar{\xi}$. Так как $p(0) = 1$, $p(1/2) = 0$, $p(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 1/2$ и $p(e^{i\gamma}) = -3/2 \cdot e^{-i\gamma}$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$, то функция

$$\widetilde{w}(\xi) = \begin{cases} |\xi|^2 p(\xi), & \text{если } |\xi| \leqslant 1, \\ -\dfrac{3}{2\xi}, & \text{если } |\xi| > 1, \end{cases}$$

непрерывна на всей плоскости, голоморфна вне круга $|\xi| \leqslant 1$,

$$\lim_{\xi\to\infty} \widetilde{w}(\xi) = 0, \quad \widetilde{w}(1/2) = 0. \tag{14}$$

Кроме того, внутри области $\{\xi : |\xi| < 1, \xi \neq 1/2\}$ имеет место равенство

$$2\bar{\xi}\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \bar{\xi}} - \widetilde{b}(\xi)\overline{\widetilde{w}}(\xi) = 0,$$

где

$$\widetilde{b}(\xi) = 2\frac{p(\xi) + \bar{\xi}\partial p/\partial\bar{\xi}}{\overline{p}(\xi)} = 2\frac{1 - 2|\xi|^2 - 3\bar{\xi}}{1 - |\xi|^2 - (3/2)\xi}, \quad |\xi| \leqslant 1,\ \xi \neq 1/2.$$

Поскольку дробно-линейное преобразование $\xi \to (3\xi/(2\xi - 1)) = z$ отображает область $|\xi| > 1$ на внутренность круга $|z - 2| < 1$, то в силу (14) функция $w(z) \equiv (\widetilde{\xi}(z))$, $z \in E$, $\xi = z/(2z - 3)$, гомеоморфна внутри круга $|z - 2| < 1$, непрерывна в $E$ и $\lim\limits_{z\to\infty} w(z) = \lim\limits_{\xi\to 1/2} \widetilde{w}(z) = 0$. При этом вне круга $|z - 2| \leqslant 1$, выполнено равенство

$$2\bar{z}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - b(z)\overline{w}(z) = 0,$$

где

$$b(z) = \frac{\bar{z}}{\bar{\xi}(z)}\bar{\xi}'(z)\widetilde{b}(\xi(z)) = 4\frac{9 - 6z + 3\bar{z} - 4|z|^2}{(3 - 2\bar{z})(6 - z - 4\bar{z})}, \quad |z - 2| \geqslant 1.$$

Следовательно, функция $w(z)$ удовлетворяет почти всюду в $E$ уравнению

$$2\bar{z}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - B(z)\overline{w}(z) = 0, \qquad \text{где} \quad B(z) = \begin{cases} b(z), & \text{если } |z - 2| \geqslant 1, \\ 0, & \text{если } |z - 2| < 1. \end{cases}$$

Замечая, что функция $B(z)$ ограничена на всей плоскости, и рассуждая как и в начале данного параграфа, заключаем (ср. с условием $(**)$): *для любого $\varepsilon > 0$ существует ограниченная на всей плоскости $E$ функция $B(z)$ такая, что:*

1) *$B(z)$ равна нулю внутри открытого круга $K$ радиуса $R$, замыкание $\overline{K}$ которого не содержит точку $z = 0$;*

2) $B(0) \neq 0$;

3) *$B(z)$ дифференцируема внутри области $E \setminus \overline{K}$ и непрерывна в $E \setminus K$;*

4) *для уравнения* (3) *нарушается теорема Лиувилля.*

## Литература


1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.— М.: Физматгиз, 1988.—509 с.
2. *Михайлов Л. Г.* Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.—Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1963.—183 с.
3. *Усманов З. Д.* Обобщенные системы Коши — Римана с сингулярной точкой.—Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1993.—244 с.
4. *Гончаров А. Л., Климентов С. Б., Усманов З. Д.* Аналог теоремы Лиувилля для одного класса систем типа Коши — Римана с сингулярными коэффициентами // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 4.—С. 7–16.


*Статья поступила 17 февраля 2006 г.*

Гончаров Алексей Леонидович, к. ф.-м. н.
Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет,
E-mail: lucy@jeo.ru