Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2006, Том 8, Выпуск 1

УДК **517.5**

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ В РАЗЛИЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ[1]

Е. В. Введенская

В работе изучается задача оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности в круге для случая радиальной симметрии в момент времени $t = \tau$ по приближенно заданным в метрике L_2 значениям температуры в моменты времени $t = 0$ и $t = T$, $0 < \tau < T$. Получен оптимальный метод восстановления и найдена его погрешность.

Рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения теплопроводности в единичном круге $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ в случае радиальной симметрии начального условия и нулевого граничного значения

$$u_t = \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r, \tag{1}$$

$$u(r, 0) = A(r), \tag{2}$$

$$u(1, t) = 0. \tag{3}$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, и $A(r) \in L_2(D)$, где

$$\|f(x, y)\|_{L_2(D)} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \iint\limits_D |f(x, y)|^2 \, dx \, dy}.$$

Начальное условие (2), а, следовательно, и решение задачи (1)–(3) не зависит от полярного угла φ. Точное решение задачи (1)–(3) в этом случае имеет вид (см., например, [1]):

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\nu_k r) e^{-\nu_k^2 t}, \tag{4}$$

где ν_k, $k \in \mathbb{N}$, — корни функции Бесселя первого рода нулевого порядка $J_0(\cdot)$, расположенные в порядке возрастания, а c_k — коэффициенты Фурье функции $A(\cdot)$ при разложении ее в ряд по системе $\{J_0(\nu_k r)\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$A(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\nu_k r),$$

$$c_k = \frac{1}{d_k} \int_0^1 A(r) J_0(\nu_k r) r \, dr, \quad d_k = \int_0^1 J_0^2(\nu_k r) r \, dr.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (УР.03.01.130).

Пусть известны $y_0(r), y_T(r) \in L_2(D)$ такие, что

$$\|A(r) - y_0(r)\|_{L_2(D)} \leqslant \delta_0, \quad \|u(r,T) - y_T(r)\|_{L_2(D)} \leqslant \delta_T,$$

т. е. решение задачи (1)–(3) в момент времени T известно с погрешностью, не превосходящей δ_T, а начальное условие — с погрешностью, не превосходящей δ_0. Требуется оптимально восстановить решение задачи (1)–(3) в момент времени τ, $0 < \tau < T$, по функциям $y_0(\cdot)$ и $y_T(\cdot)$.

В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $\xi\colon L_2(D) \times L_2(D) \to L_2(D)$. Для данного метода ξ погрешностью восстановления назовем величину

$$e(\tau, \delta_0, \delta_T, \xi) = \sup_{\substack{A(r), y_0(r), y_T(r) \in L_2(D) \\ \|A(r) - y_0(r)\|_{L_2(D)} \leqslant \delta_0 \\ \|u(r,T) - y_T(r)\|_{L_2(D)} \leqslant \delta_T}} \|u(r,\tau) - \xi(y_0, y_T)(x,y)\|_{L_2(D)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления будем называть величину

$$E(\tau, \delta_0, \delta_T) = \inf_{\xi\colon L_2(D) \times L_2(D) \to L_2(D)} e(\tau, \delta_0, \delta_T, \xi). \tag{5}$$

Метод, погрешность которого равна погрешности оптимального восстановления, называется оптимальным.

Введем следующие обозначения:

$$a_m = e^{-2\nu_m^2}, \quad \Delta_m = [a_{m+1}^T, a_m^T), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad \Delta_0 = [a_1^T, +\infty),$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \dfrac{a_m^T a_{m+1}^\tau - a_m^\tau a_{m+1}^T}{a_m^T - a_{m+1}^T}, & \dfrac{\delta_T^2}{\delta_0^2} \in \Delta_m, \ m \in \mathbb{N}, \\ a_1^\tau, & \dfrac{\delta_T^2}{\delta_0^2} \in \Delta_0, \end{cases}$$
$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \dfrac{a_m^\tau - a_{m+1}^\tau}{a_m^T - a_{m+1}^T}, & \dfrac{\delta_T^2}{\delta_0^2} \in \Delta_m, \ m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \dfrac{\delta_T^2}{\delta_0^2} \in \Delta_0. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 1. *При всех $\delta_0, \delta_T > 0$ имеет место равенство*

$$E(\tau, \delta_0, \delta_T) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_T^2}.$$

При этом метод

$$\widehat{\xi}(y_0, y_T)(x,y) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\widehat{\lambda}_1 y_{0k} + \widehat{\lambda}_2 a_k^{T/2} y_{Tk}}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 a_k^T} a_k^{\tau/2} J_0(\nu_k r), \tag{7}$$

где y_{0k} и y_{Tk} — коэффициенты Фурье функций $y_0(\cdot)$ и $y_T(\cdot)$, соответственно,

$$y_{0k} = \frac{1}{d_k} \int_0^1 y_0(r) J_0(\nu_k r) r\, dr, \qquad y_{Tk} = \frac{1}{d_k} \int_0^1 y_T(r) J_0(\nu_k r) r\, dr, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

является оптимальным.

Для доказательства теоремы 1 будем использовать схему построения оптимальных методов восстановления линейных операторов из работ [2] и [3]. Сначала приведем общую постановку задачи восстановления линейного оператора.

Пусть X — линейное пространство, $Y_1, \ldots, Y_k$ — линейные пространства с полускалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_{Y_j}$, $j = 1, \ldots, k$, и соответствующими полунормами $\|\cdot\|_{Y_j}$, $j = 1, \ldots, k$, $I_j \colon X \to Y_j$, $j = 1, \ldots, k$, — линейные операторы, а Z — линейное нормированное пространство. Рассматривается задача оптимального восстановления оператора $\Lambda \colon X \to Z$ на множестве

$$W = \{\, x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \leqslant \delta_j,\ j = 1, \ldots, l,\ 0 \leqslant l < k \,\}$$

(при $l = 0$ считаем, что $W = X$) по значениям операторов $I_{l+1}, \ldots, I_k$, заданным с погрешностью. Предполагается, что для каждого $x \in X$ известен вектор $y = (y_{l+1}, \ldots, y_k) \in Y_{l+1} \times \ldots \times Y_k$ такой, что

$$\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leqslant \delta_j, \quad j = l+1, \ldots, k.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\xi \colon Y_{l+1} \times \ldots \times Y_k \to Z$. Погрешностью восстановления данного метода m называется величина

$$e(\Lambda, W, I, \delta, \xi) = \sup_{\substack{x \in X,\ y = (y_{l+1}, \ldots, y_k) \in Y_{l+1} \times \ldots \times Y_k \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leqslant \delta_j,\ j = l+1, \ldots, k}} \|\Lambda x - \xi(y)\|_Z.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\Lambda, W, I, \delta) = \inf_{\xi \colon Y_{l+1} \times \ldots \times Y_k \to Z} e(\Lambda, W, I, \delta, \xi), \tag{8}$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления.

С поставленной задачей оптимального восстановления оператора Λ тесно связана экстремальная задача

$$\|\Lambda x\|_Z^2 \to \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leqslant \delta_j^2,\ j = 1, \ldots, k, \quad x \in X. \tag{9}$$

Обозначим через $\mathcal{L}(x, \lambda)$ функцию Лагранжа экстремальной задачи (9)

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -\|\Lambda x\|_Z^2 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \|I_j x\|_{Y_j}^2,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Из работы [4] (см. также [3] и [5]) вытекает следующий результат

Теорема 2. *Пусть существуют* $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_k)$, $\widehat{\lambda}_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, k$, *и допустимый в* (9) *элемент* $\widehat{x}$ *такие, что*

(a) $\min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda})$,

(b) $\sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j (\|I_j \widehat{x}\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2) = 0$.

Тогда значение задачи (9) *равно*

$$\sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Если при этом для всех $y = (y_{l+1}, \ldots, y_k) \in Y_{l+1} \times \ldots \times Y_k$ существует x_y — решение экстремальной задачи

$$\sum_{j=1}^{l} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|^2_{Y_j} + \sum_{j=l+1}^{k} \widehat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|^2_{Y_j} \to \min, \quad x \in X,$$

то $\widehat{\xi}(y) = \Lambda x_y$ *— оптимальный метод восстановления и*

$$E(\Lambda, W, I, \delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2}.$$

Задача (5) есть частный случай задачи (8). В ней $X = Y_1 = Y_2 = Z = L_2(D)$, $k = 2$, $l = 0$ (т. е. $W = X$), I_1 — тождественный оператор, а Λ и I_2 — операторы, ставящие в соответствие начальному условию $A(r) \in L_2(D)$ решение задачи (1)–(3) в моменты времени τ и T соответственно.

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Экстремальная задача (9) в нашем случае имеет вид

$$\begin{aligned} &\|u(r,\tau)\|^2_{L_2(D)} \to \max, \\ &\|u(r,0)\|^2_{L_2(D)} \leqslant \delta_0^2,\ \|u(r,T)\|^2_{L_2(D)} \leqslant \delta_T^2,\ u(r,0) \in L_2(D). \end{aligned} \tag{10}$$

Согласно теореме Планшереля

$$\|u(r,t)\|^2_{L_2(D)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|J_0(\nu_k r)\|^2_{L_2(D)} e^{-2\nu_k^2 t}.$$

Положим $u_k = c_k^2 \|J_0(\nu_k r)\|^2_{L_2(D)}$. Тогда задача (10) примет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} u_k e^{-2\nu_k^2 \tau} \to \max, \\ &\sum_{k=1}^{\infty} u_k \leqslant \delta_0^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k e^{-2\nu_k^2 T} \leqslant \delta_T^2, \quad u_k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим функцию Лагранжа задачи (11)

$$\begin{aligned} L(\bar{u}, \lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(-e^{-2\nu_k^2 \tau} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\nu_k^2 T}\right) u_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\nu_k^2 \tau} \left(-1 + \lambda_1 e^{2\nu_k^2 \tau} + \lambda_2 e^{-2\nu_k^2 (T-\tau)}\right) u_k, \end{aligned}$$

где $\bar{u} = \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Пусть $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ определены равенствами (6). Предъявим такую допустимую в (11) последовательность $\widehat{u} = \{\widehat{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (см. теорему 2), что выполнены условия

(c) $\min_{u_k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{N}} L(\bar{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$,

(d) $\widehat{\lambda}_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k - \delta_0^2\right) + \widehat{\lambda}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k e^{-2\nu_k^2 T} - \delta_T^2\right) = 0$.

Пусть

$$\frac{\delta_T^2}{\delta_0^2} \in \Delta_m, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Тогда из равенств (6) вытекает, что

$$\widehat{\lambda}_1 e^{2\nu_m^2 \tau} + \widehat{\lambda}_2 e^{-2\nu_m^2 (T-\tau)} = 1,$$
$$\widehat{\lambda}_1 e^{2\nu_{m+1}^2 \tau} + \widehat{\lambda}_2 e^{-2\nu_{m+1}^2 (T-\tau)} = 1.$$

Эти равенства означают, что у функции

$$g(z) = -1 + \lambda_1 e^{2zT} + \lambda_2 e^{-2z(T-\tau)}$$

имеется два нуля ν_m^2 и ν_{m+1}^2. Поскольку эта функция выпукла при $z \in \mathbb{R}_+$, то других нулей у нее нет. Следовательно, $g(\nu_k^2) \geqslant 0$ при всех $k \geqslant 1$. Тем самым для любой допустимой в (11) последовательности $\bar{u} = \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

$$L(\bar{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geqslant 0.$$

Положим $\widehat{u}_k = 0$ при $k \neq m, m+1$, а $\widehat{u}_m$ и $\widehat{u}_{m+1}$ выберем из условий

$$\widehat{u}_m + \widehat{u}_{m+1} = \delta_0^2,$$
$$\widehat{u}_m e^{-2\nu_m^2 T} + \widehat{u}_{m+1} e^{-2\nu_{m+1}^2 T} = \delta_T^2.$$

Имеем

$$\widehat{u}_m = \frac{\delta_T^2 - \delta_0^2 a_{m+1}^T}{a_m^T - a_{m+1}^T}, \quad \widehat{u}_{m+1} = \frac{\delta_0^2 a_m^T - \delta_T^2}{a_m^T - a_{m+1}^T}.$$

Из (12) вытекает, что $\widehat{u}_m \geqslant 0$ и $\widehat{u}_{m+1} \geqslant 0$. Следовательно, последовательность $\widehat{u} = \{\widehat{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — допустимая в (11). Кроме того, для нее выполнено условие (d). Условие (c) также выполнено, так как $L(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$. Если $\delta_T^2/\delta_0^2 \in \Delta_0$, то, положив $\widehat{u}_1 = \delta_0^2$ и $\widehat{u}_2 = 0$, нетрудно убедиться, что условия (c) и (d) снова выполнены.

Построим теперь оптимальный метод восстановления $u(\cdot, \tau)$. Для этого, согласно теореме 2, надо сначала решить экстремальную задачу

$$\widehat{\lambda}_1 \|A(r) - y_0(r)\|_{L_2(D)}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|u(r, T) - y_T(r)\|_{L_2(D)}^2 \to \min. \tag{13}$$

Пусть

$$\widehat{A}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{c}_k J_0(\nu_k r). \tag{14}$$

Представляя по теореме Планшереля квадраты норм в (13), учитывая (14) и (4), приведем эту экстремальную задачу к виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\widehat{\lambda}_1 (\widehat{c}_k - y_{0k})^2 + \widehat{\lambda}_2 (\widehat{c}_k e^{-\nu_k^2 T} - y_{Tk})^2\right) \|J_0(\nu_k r)\|^2 \to \min. \tag{15}$$

Коэффициент при $\|J_0(\nu_k r)\|^2$ в (15) представляет собой квадратичную параболу относительно $\widehat{c}_k$, минимум которой достигается при

$$\widehat{c}_k = \frac{\widehat{\lambda}_1 y_{0k} + \widehat{\lambda}_2 a_k^{T/2} y_{Tk}}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 a_k^T}.$$

По теореме 2 метод (7) является оптимальным. ⊳

Литература

1. *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Задачи по математической физике.—М.: МГУ, 1998.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Мат. сб.—2002.—Т. 193.—С. 79–100.
3. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
4. *Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди — Литтлвуда — Полиа для аналитических функций из пространств Харди — Соболева // Мат. сб.—2006.—Т. 197.—С. 15–34.
5. *Осипенко К. Ю.* Optimal recovery of linear operators // Abstracts of International Conference «Extremal Problems and Approximation».—М.: MSU, 2004.—P. 11–12.

Статья поступила 10 октября 2005 г.

Введенская Елена Викторовна
Москва, «МАТИ» — Российский государственный технологический
университет им. К. Э. Циолковского