Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2006, Том 8, Выпуск 1

УДК **517.98**

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ТЕОРЕМЫ ХАНА — БАНАХА[1]

Е. К. Басаева

Показано, что концепция S-выпуклости, введенная С. Саймонсом, покрывается понятием выпуклого оператора со значениями в предупорядоченном векторном пространстве, а теорема Хана — Банаха — Лагранжа из [5] является частным случаем известных правил замены переменной в преобразовании Юнга — Фенхеля.

В настоящей заметке показано, что концепция S-выпуклости, введенная в работе С. Саймонса [5], покрывается хорошо известным (см., например, [1, 2]) понятием выпуклого оператора со значением в предупорядоченном векторном пространстве. Показано также, что теорема Хана — Банаха — Лагранжа из [5, Theorem 2.9] (или что тоже самое «новая теорема Хана — Банаха», приведенная в [3]) на самом деле новой не является, а является весьма частным случаем известных правил замены переменной в преобразовании Юнга — Фенхеля [2, 4.1.8].

1. Выпуклость и S-выпуклость

Пусть E — действительное векторное пространство, F — K-пространство. Напомним, что пространством Канторовича или K-пространством называют порядково полную векторную решетку. Придерживаемся терминологии и обозначений из [1, 2].

1.1. *Пусть $S : E \to F$ — произвольный (всюду определенный) сублинейный оператор. Тогда для любых $e_1, e_2 \in E$ равносильны следующие условия:*

(1) $S(e_1 - e_2) \leqslant 0$;

(2) $S(u + e_1) \leqslant S(u + e_2)$ *для всех* $u \in E$;

(3) $Te_1 \leqslant Te_2$ *для любого* $T \in \partial S$.

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Для любого $u \in E$ из (1) следует

$$S(u + e_1) = S(u + e_1 + e_2 - e_2) \leqslant S(u + e_2) + S(e_1 - e_2) \leqslant S(u + e_2).$$

(2) $\to$ (1): Положим в (2) $u = -e_2$. Тогда $S(e_1 - e_2) \leqslant S(0) = 0$.

(1) $\to$ (3): Для произвольного линейного оператора $T \in \partial S$ применяя (1), выводим $T(e_1) - T(e_2) = T(e_1 - e_2) \leqslant S(e_1 - e_2) \leqslant 0$, т. е. $T(e_1) \leqslant T(e_2)$.

(3) $\to$ (1): Пусть выполнено (3), тогда $T(e_1 - e_2) \leqslant 0$ для любого $T \in \partial S$. Отсюда следует, что

$$\sup_{T \in \partial S} T(e_1 - e_2) = S(e_1 - e_2) \leqslant 0. \quad \rhd$$

[1] Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00622.

1.2. Рассмотрим теперь понятие S-выпуклости введенное в работе С. Саймонса [5, Definition 2.7]. Возьмем произвольный сублинейный оператор $S : E \to F$. Определим в E порядок $\leqslant_S$, положив $e_1 \leqslant_S e_2$, если $e_1, e_2 \in E$ удовлетворяют одному (а тогда и любому) их условий 1.1 (1–3). Назовем оператор $f : X \to E^{\bullet}$ *S-выпуклым*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha_1, \alpha_1 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ выполняется

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant_S \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Из предложения 1.1 следует, что S и T возрастающие операторы относительно введенного порядка $\leqslant_S$. Легко проверить, что $\leqslant_S$ — предпорядок, согласованный со структурой векторного пространства E (= *векторный предпорядок*).

1.3. Заметим, что задание произвольного векторного предпорядка $\leqslant$ в векторном пространстве E равносильно заданию положительного конуса E_+:

$$e_1 \leqslant e_2 \iff e_2 - e_1 \in E_+.$$

Во множестве всех векторных предпорядков (упорядоченном по включению), при которых S возрастает, предпорядок $\leqslant_S$ является наибольшим.

$\lhd$ Действительно, S возрастает тогда и только тогда, когда его субдифференциал ∂S состоит из возрастающих (= положительных) линейных операторов. Для линейного положительного оператора $T \in \partial S$ справедливо включение $T(E_+) \subset F_+$. Таким образом

$$(\forall\, T \in \partial S)\ \ E_+ \subset T^{-1}(F_+) \quad \iff \quad E_+ \subset \bigcap_{T \in \partial S} T^{-1}(F_+).$$

Из последнего включения видно, что конус $K := \bigcap_{T \in \partial S} T^{-1}(F_+)$, соответствующий введенному в [5] предпорядку $\leqslant_S$ (см. 1.1 (3)) является наибольшим. $\rhd$

Таким образом, мы показали, что понятие S-выпуклого оператора — есть частный случай выпуклого оператора и эти понятия совпадают, если в качестве предпорядка взять S-предпорядок $\leqslant_S$, определенный в 1.2.

2. Свертка Рокафеллара

Пусть X, X_1 и X_2 — векторные пространства, а E — предупорядоченное векторное пространство. Обозначим $E^{\bullet} := E \cup \{+\infty\}$ и $\overline{E} := E \cup \{-\infty, +\infty\}$; $\mathrm{Orth}(E)$ — ортоморфизмы (операторы умножения) действующие из E в E, а $I_E \in \mathrm{Orth}(E)$ — тождественный оператор из E в E.

2.1. Будем говорить, что конусы K_1 и K_2 в векторном пространстве X находятся *в алгебраическом общем положении*, если K_1 и K_2 воспроизводят (алгебраически) некоторое подпространство $X_0 \subset X$, т. е. $X_0 = K_1 - K_2 = K_2 - K_1$. Непустые выпуклые множества $C_1, \dots, C_n$ находятся *в алгебраическом общем положении*, если в алгебраическом общем положении находятся их преобразования Хёрмандера $H(C_1), \dots, H(C_n)$. (Для выпуклого множества C по определению $H(C) := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}^+ : x \in tC\}$, подробнее см., например, [1, 1.2.6].)

Принято говорить, что выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\bullet}$ *находятся в алгебраическом общем положении*, если в общем положении находятся их преобразования Хёрмандера $H(f_1), \dots, H(f_n)$. Напомним, что преобразование Хёрмандера $H(f) : X \times \mathbb{R} \to E^{\bullet}$ выпуклого оператора $f : X \to E^{\bullet}$ вводится формулой

$$H(f) : (x,t) \mapsto \begin{cases} tf(x/t), & \text{если } t > 0, \\ +\infty, & \text{если } t \leqslant 0. \end{cases}$$

2.2. Рассмотрим выпуклые операторы $f_1 : X_1 \times X \to E^{\bullet}$ и $f_2 : X \times X_2 \to E^{\bullet}$. *Сверткой Рокафеллара* операторов f_2 и f_1 называют оператор $f_2 \vartriangle f_1 : X_1 \times X_2 \to E$, вычисляемый по формуле

$$f_2 \vartriangle f_1(x_1, x_2) := \inf_{x \in X} \{f_1(x_1, x) + f_2(x, x_2)\}.$$

2.3. *Преобразование Юнга — Фенхеля* $f^* : L(X, E) \to \overline{E}$ отображения $f : X \to E^{\bullet}$ определяем равенством (см. [2, 4.1.1]:

$$f^*(T) = \sup \{Tx - f(x) : \ x \in X\} \quad (T \in L\,(X, E)).$$

Заметим, что супремум вычисляется в $\overline{E}$.

2.4. (1) *Если выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\bullet}$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива точная формула*

$$(f_1 + \ \dots + f_n)^* = f_1^* \oplus \dots \oplus f_n^*.$$

Точность этой формулы означает, что для любого $T \in \mathrm{dom}((f_1 + \ \dots + f_n)^*)$ существуют линейные операторы $T_i \in L(X, E)$ $(i := 1, \dots, n)$ такие, что

$$T = T_1 + \ \dots + T_n,$$
$$(f_1 + \ \dots + f_n)^*(T) = f_1^*(T_1) + \ \dots + f_n^*(T_n).$$

(2) *Если выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\bullet}$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива точная формула*

$$(f_1 \vee \dots \vee f_n)^* = \inf \left\{ \bigoplus_{l=1}^{n} (\alpha_l \circ f_l)^* : \ \alpha_l \in \mathrm{Orth}(E)^{\,+}, \ \sum_{l=1}^{n} \alpha_l = I_E \right\}.$$

Точность формулы означает, что для любого $T \in \mathrm{dom}((f_1 \vee \dots \vee f_n)^*)$ существуют линейные операторы $T_l \in L(X, E)$ и положительные ортоморфизмы $\alpha_l \in \mathrm{Orth}(E)^+$ $(l := 1, \dots, n)$ такие, что

$$\alpha_1 + \ \dots + \alpha_n = I_E, \quad T = T_1 + \ \dots + T_n,$$
$$(f_1 \vee \dots \vee f_n)^*(T) = (\alpha_1 f_1)^*(T_1) + \ \dots + (\alpha_n f_n)^*(T_n).$$

2.5. Теорема (см. [2, 4.1.8]). *Пусть X, X_1 и X_2 — векторные пространства, F — K-пространство. Пусть, далее, $f_1 : X_1 \times X \to F^{\bullet}$ и $f_2 : X \times X_2 \to F^{\bullet}$ — выпуклые операторы, не равные тождественно $+\infty$. Если множества $\mathrm{epi}(f_1, X_2)$ и $\mathrm{epi}(X_1, f_2)$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива точная формула*

$$(f_2 \vartriangle f_1)^* \ = f_2^* \vartriangle f_1^*,$$

т. е. для любой пары $(T_1, T_2) \in \mathrm{dom}((f_1 \vartriangle f_2)^{\,*})$, существует линейный оператор $T : X \to F$ такой, что

$$(f_2 \vartriangle f_1)^*\,(T_1, T_2) = f_1^*\,(T_1, T) + f_2^*\,(T, T_2).$$

3. Некоторые следствия

В этом параграфе приведены некоторые следствия теоремы 2.5 для вычисления преобразования Юнга — Фенхеля композиции отображений (см. [2, 4.1.9]).

3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.5 и* $(0,0) \in \operatorname{dom}((f_1 \triangle f_2)^*))$. *Тогда существует линейный оператор* $T : X \to F$ *такой, что*

$$\inf_{(x_1,x,x_2)\in X_1\times X\times X_2} \big\{f_1(x_1,x) + f_2(x,x_2)\big\}$$
$$= \inf_{(x_1,x)\in X_1\times X}\{f_1(x_1,x) - Tx\} + \inf_{(x,x_2)\in X\times X_2}\{f_2(x,x_2) - Tx\}.$$

3.2. Теорема. *Пусть* E *— предупорядоченное векторное пространство,* F *—* K*-пространство,* $f : X \to E^{\bullet}$ *— выпуклый оператор и* $g : E \to F^{\bullet}$ *— возрастающий выпуклый оператор. Если множества* $\operatorname{epi}(f) \times F$ *и* $X \times \operatorname{epi}(g)$ *находятся в алгебраическом общем положении, то для любого* $T \in \mathcal{L}\,(X,F)$ *имеет место точная формула*

$$(g\circ f)^*\,(T) = \inf\{\,(A\circ f)^*\,(T) + g^*\,(A):\ A\in \mathcal{L}^+(E,F)\,\}.$$

Положив в теореме 3.2 $T = 0$, получим, что существует линейный положительный оператор $A_0 \in \mathcal{L}^+(E,F)$ такой, что

$$\inf_{x\in X}\{(g\circ f)x\} = \inf_{x\in X}\{(A_0\circ f)x\} - \inf_{x\in X}\{g(x) - A_0x\}.$$

3.3. *Если выполнены все условия теоремы 3.2 и, кроме того,* $g := S$ *— сублинейный оператор, то для каждого* $T \in \mathcal{L}(X,F)$ *верна точная формула*

$$(S\circ f)^*(T)\ = \inf\{\,(A\circ f)^*(T):\ A\in\partial S\}.$$

3.4. *Пусть* $f : X \to E^{\bullet}$ *— выпуклый оператор,* $S : E \to F^{\bullet}$ *— возрастающий сублинейный оператор и множества* $\operatorname{epi}(f) \times F$, $X \times \operatorname{epi}(S)$ *находятся в алгебраическом общем положении. Тогда существует линейный положительный оператор* $A_0 \in \partial S$ *такой, что*

$$\inf_{x\in\operatorname{dom}(f)}(S\circ f)x = \inf_{x\in\operatorname{dom}(f)}(A_0\circ f)x.$$

$\lhd$ По определению преобразования Юнга — Фенхеля для собственного выпуклого оператора $g : X \to F^{\bullet}$ имеем

$$g^*(T) := \sup\{Tx - g(x) : x\in X\}\quad (T\in\mathcal{L}(X,F)).$$

Тогда

$$g^*(0) := \sup\{-g(x) : x\in X\} = -\inf\{g(x) : x\in X\} = -\inf\{g(x) : x\in\operatorname{dom}(g)\},$$

т. е.

$$\inf\{g(x) : x\in\operatorname{dom}(g)\} = -g^*(0).$$

Далее, положим $g := S\circ f$. Согласно теореме 2.9 существует $A_0 \in \partial S$ такой, что $(S\circ f)^*(T) = (A_0\circ f)^*(T)$ для каждого $T \in \mathcal{L}(X,F)$. Тем самым

$$\inf_{x\in\operatorname{dom}(f)}(S\circ f)x = -(S\circ f)^*(0) = -(A_0\circ f)^*(0) = \inf_{x\in\operatorname{dom}(f)}(A_0\circ f)x.\quad \rhd$$

3.5. Покажем теперь, что теорема С. Саймонса [3, Theorem 1.5] (см. также [5, Theorem 2.9]) есть простое следствие теоремы 2.5.

Теорема. *Пусть* $j : X \to E^{\bullet}$ *и* $k : X \to F^{\bullet}$ *— выпуклые операторы,* $C := \mathrm{dom}(j) \cap \mathrm{dom}(k)$ *и* $S : E \to F$ *всюду определенный возрастающий сублинейный оператор. Тогда существует линейный положительный оператор* $L \in \partial S$ *такой, что*

$$\inf_{x\in C} (S \circ j + k)x = \inf_{x\in C} (L \circ j + k)x.$$

$\lhd$ Пусть $F = \mathbb{R}$ и $C := \mathrm{dom}(j) \cap \mathrm{dom}(k)$. Применив предложение 3.4 к

$$f : X \to E \times F, \quad f : x \mapsto (j(x), k(x));$$

$$S' : E \times F \to F, \quad (u, v) \mapsto Su + v,$$

получаем требуемое. $\rhd$

Литература

1. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. 1.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2002.—viii+372 с.
2. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. 2.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2003.—viii+413 с.
3. *Simons S.* A new version of the Hahn–Banach theorem // Arch. Math.—2003.—V. 80.—P. 630–646.
4. *Simons S.* Hahn–Banach theorems and maximal monotonicity // In Variational analysis and applications / F. Giannessi and A. Maugeri, eds.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2004.
5. *Simons S.* The Hahn–Banach–Lagrange theorem. Preprint.

Статья поступила 27 февраля 2006 г.

Басаева Елена Казбековна, к. ф.-м. н.
Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
E-mail: helen@alanianet.ru