Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2006, Том 8, Выпуск 1

УДК **517.9**

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ МАТРИЧНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ[1]

О. Г. Авсянкин

Изучаются условия применимости проекционного метода к многомерным парным интегральным операторам, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений $SO(n)$, в матричном случае.

Введение

Исследования, посвященные применимости проекционных методов к интегральным операторам, играют важную роль в математике и в приложениях (см. [1–4]). В настоящее время для многих классов интегральных операторов теория проекционных методов полностью построена. Для интегральных операторов с однородными ядрами эта теория продолжает развиваться (см. [5–7]).

В данной работе изучается применимость проекционного метода к многомерным парным интегральным операторам с однородными ядрами в матричном случае. Подчеркнем, что матричный случай принципиально отличается от скалярного, рассмотренного в [7]. Это отличие заключается не только в содержании основного результата, но и в методе доказательства. Дело в том, что прием, использованный при доказательстве достаточности в основной теореме статьи [7], в матричном случае не проходит. Поэтому в данной работе используется другой подход, основанный на полной редукции многомерного случая к одномерному.

Работа состоит из двух параграфов. В первом параграфе собраны необходимые предварительные сведения и вспомогательные результаты, относящиеся к одномерному случаю. Второй параграф посвящен доказательству основного результата — критерия применимости проекционного метода к матричным многомерным парным интегральным операторам с однородными ядрами.

В статье используются обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$; $x' = x/|x|$; $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| = 1\}$; $\dot{\mathbb{R}}$ — компактификация $\mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой; $\mathbb{Z}_+$ — множество всех целых неотрицательных чисел; $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ — компактификация множества $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой; $Y_{m\mu}(\sigma)$ — сферические гармоники порядка m; $d_n(m)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка m:

$$d_n(m) = (n + 2m - 2)\frac{(n+m-3)!}{m!(n-2)!};$$

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований № 06-01-00297-а.

$L_p^s(X)$ — пространство s-мерных вектор-функций с компонентами из $L_p(X)$; $P_m(t)$ — многочлены Лежандра, определяемые равенством:

$$P_m(t) = \begin{cases} \cos(m \arccos t), & n = 2, \\ (C_{m+n-3}^m)^{-1} C_m^{(n-2)/2}(t), & n \geqslant 3, \end{cases}$$

где $C_m^{(n-2)/2}(t)$ — многочлены Гегенбауэра.

§ 1. Предварительные сведения и вспомогательные результаты

1.1. Определение проекционного метода. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(X)$, $\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$ $(0 < \tau_1 < 1,\ 1 < \tau_2 < \infty)$ — семейство проекторов, действующих в X. Будем предполагать, что при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to \infty$ проекторы P_{τ_1,τ_2} сходятся в сильной операторной топологии к единичному оператору. Рассмотрим уравнение

$$P_{\tau_1,\tau_2} A P_{\tau_1,\tau_2} x = P_{\tau_1,\tau_2} y. \tag{1}$$

Определение 1. Будем говорить, что к оператору A применим проекционный метод по системе проекторов $\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$ при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to \infty$, если

1) существуют такие числа $\delta_1 \in (0,1)$ и $\delta_2 \in (1,\infty)$, что при всех $\tau_1 < \delta_1$ и $\tau_2 > \delta_2$ для любого $y \in X$ уравнение (1) имеет единственное решение $x_{\tau_1,\tau_2} \in P_{\tau_1,\tau_2} X$;

2) при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to \infty$ решение x_{τ_1,τ_2} стремится по норме пространства X к решению $x \in X$ уравнения $Ax = y$.

Класс операторов, к которым применим проекционный метод по системе проекторов $\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$ обозначим через $\Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$.

Определение 1 эквивалентно тому, что оператор A обратим, при $0 < \tau_1 < \delta_1$ и $\delta_2 < \tau_2 < \infty$ операторы $P_{\tau_1,\tau_2} A P_{\tau_1,\tau_2}$ как операторы, действующие в $P_{\tau_1,\tau_2} X$, обратимы, и операторы $(P_{\tau_1,\tau_2} A P_{\tau_1,\tau_2})^{-1} P_{\tau_1,\tau_2}$ при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to \infty$ сильно сходятся к A^{-1}.

Очевидно, что все основные теоремы о проекционных методах, доказанные в [1] для случая однопараметрического семейства проекторов, сохраняют справедливость и в нашем случае. В дальнейшем мы будем ссылаться на результаты [1], предполагая, что они переформулированы в соответствии с определением 1.

1.2. Матричные парные операторы Винера — Хопфа. В пространстве $L_p^s(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$, рассмотрим интегральный оператор

$$(C\psi)(t) = \lambda \psi(t) - \int_0^\infty c_1(t-u)\psi(u)\,du - \int_{-\infty}^0 c_2(t-u)\psi(u)\,du, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $c_j(t)$ $(j = 1, 2)$ — матрица-функция s-го порядка с элементами из $L_1(\mathbb{R})$. Определим в пространстве $L_p^s(\mathbb{R})$ проектор P'_{τ_1,τ_2} $(\tau_1 < 0,\ \tau_2 > 0)$ формулой

$$(P'_{\tau_1,\tau_2}\psi)(t) = \begin{cases} \psi(t), & \tau_1 < t < \tau_2, \\ 0, & t < \tau_1 \ \text{ или } \ t > \tau_2. \end{cases}$$

Сформулируем критерий применимости к оператору C проекционного метода по системе проекторов $\{P'_{\tau_1,\tau_2}\}$ при $\tau_1 \to -\infty$, $\tau_2 \to \infty$ (при этом мы предполагаем, что определение 1 переформулировано соответствующим образом). Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 4 работы [8].

Предложение 1. *Для того чтобы оператор $C \in \Pi\{P'_{\tau_1,\tau_2}\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\det(\lambda E - \hat{c}_1(\xi)) \neq 0$, $\det(\lambda E - \hat{c}_2(\xi)) \neq 0$, $\forall\, \xi \in \dot{\mathbb{R}}$, *где $\hat{c}_j(\xi)$ — преобразование Фурье матрицы-функции $c_j(t)$;*

2) *все правые индексы матрицы-функции $\lambda E - \hat{c}_2(\xi)$ и все левые индексы матрицы-функции $\lambda E - \hat{c}_1(\xi)$ равны нулю;*

3) *все правые индексы матрицы-функции $(\lambda E - \hat{c}_2(\xi))^{-1}(\lambda E - \hat{c}_1(\xi))$ равны нулю.*

1.3. Матричные одномерные интегральные операторы с однородными степени (-1) ядрами. В пространстве $L_p^s(0,\infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, рассмотрим оператор

$$(Hg)(r) = \lambda g(r) - \int_0^1 h_1(r,\rho) g(\rho)\, d\rho - \int_1^\infty h_2(r,\rho) g(\rho)\, d\rho, \quad r \in (0,\infty). \tag{3}$$

Здесь $h_N(r,\rho) = \big(h_{\ell j}^{(N)}(r,\rho)\big)_{\ell,j=1}^s$, где $N = 1, 2,$ — матрица-функция s-го порядка, элементы которой удовлетворяют условиям:

а) однородности степени (-1), т. е.

$$h_{\ell j}(\alpha r, \alpha\rho) = \alpha^{-1} h_{\ell j}(r,\rho) \quad (\forall\, \alpha > 0);$$

б) суммируемости

$$\int_0^\infty |h_{\ell j}(r,\rho)| \rho^{-1/p}\, d\rho < \infty.$$

Символом оператора H назовем пару матриц-функций $(\mathfrak{S}_1(\xi), \mathfrak{S}_2(\xi))$, заданных равенствами

$$\mathfrak{S}_N(\xi) = \lambda E - \left(\int_0^\infty h_{\ell j}^{(N)}(1,\rho) \rho^{-1/p + i\xi}\, d\rho \right)_{\ell,j=1}^s, \quad \xi \in \mathbb{R},\ N = 1, 2. \tag{4}$$

Далее, определим в пространстве $L_p^s(0,\infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, проектор $\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}$ $(0 < \tau_1 < 1$, $1 < \tau_2 < \infty)$ по формуле

$$(\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2})(r) = \begin{cases} g(r), & \tau_1 < r < \tau_2, \\ 0, & 0 < r < \tau_1 \ \text{ или } \ r > \tau_2. \end{cases}$$

Предложение 2. *Для того чтобы оператор $H \in \Pi\{\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\det \mathfrak{S}_1(\xi) \neq 0$, $\det \mathfrak{S}_2(\xi) \neq 0$ *для любого $\xi \in \dot{\mathbb{R}}$;*

2) *все правые индексы матрицы-функции $\mathfrak{S}_2(\xi)$ равны нулю и все левые индексы матрицы-функции $\mathfrak{S}_1(\xi)$ равны нулю;*

3) *все правые индексы матрицы-функции $\mathfrak{S}_2^{-1}(\xi)\mathfrak{S}_1(\xi)$ равны нулю.*

$\lhd$ Определим оператор W_p: $L_p^s(0,\infty) \to L_p^s(\mathbb{R})$ равенством:

$$(W_p f)(t) = e^{-t/p} f(e^{-t}).$$

Как известно (см. [9]), оператор $C = W_p H W_p^{-1}$ является оператором вида (2) с ядрами $c_N(t) = h_N(1, e^t)e^{t/p'}$, $N = 1, 2$. Кроме того, непосредственно устанавливается, что проектор $P'_{\tau_1,\tau_2} = W_p \widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2} W_p^{-1}$ имеет вид

$$(P'_{\tau_1,\tau_2}\psi)(t) = \begin{cases} \psi(t), & -\ln\tau_2 < t < -\ln\tau_1, \\ 0, & t < -\ln\tau_2 \quad \text{или} \quad t > -\ln\tau_1. \end{cases}$$

Из вышесказанного следует, что $H \in \Pi\{\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}\}$ тогда и только тогда, когда $C \in \Pi\{P'_{\tau_1,\tau_2}\}$. Учитывая, что символом оператора C является пара матриц-функций $(\mathfrak{S}_1(\xi),\ \mathfrak{S}_2(\xi))$, заданных равенствами (4), и применяя предложение 1, получаем требуемый результат. $\rhd$

§ 2. Основные результаты

В пространстве $L_p^s(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, рассмотрим интегральный оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

предполагая, что элементы матрицы функции $k(x,y) = (k_{\ell j}(x,y))_{\ell,j=1}^s$ удовлетворяют условиям:

1° однородности степени $(-n)$, т. е.

$$k_{\ell j}(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k_{\ell j}(x,y) \quad (\forall\, \alpha > 0);$$

2° инвариантности относительно группы $SO(n)$ вращений пространства $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$k_{\ell j}(\omega(x), \omega(y)) = k_{\ell j}(x,y) \quad (\forall\, \omega \in SO(n));$$

3° суммируемости, т. е.

$$k_{\ell j} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k_{\ell j}(e_1, y)||y|^{-n/p}\,dy < \infty.$$

Как известно ([9, с. 70]) оператор K ограничен в пространстве $L_p^s(\mathbb{R}^n)$. Определим проектор

$$(P\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

и положим $Q = I - P$. Рассмотрим оператор

$$A = \lambda I - K_1 P - K_2 Q, \tag{6}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, а K_1 и K_2 — операторы вида (5). Следуя [10], назовем символом оператора A пару матриц-функций $(\mathfrak{S}_1(m,\xi),\ \mathfrak{S}_2(m,\xi))$, заданных на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ равенствами

$$\mathfrak{S}_N(m,\xi) = \lambda E - \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} k_{\ell j}^{(N)}(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y')|y|^{-n/p+i\xi}\,dy \right)_{j,\ell=1}^s, \tag{7}$$

где $N = 1, 2$.

Определим теперь в пространстве $L_p^s(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, проектор P_{τ_1,τ_2} $(0 < \tau_1 < 1$, $1 < \tau_2 < \infty)$ формулой

$$(P_{\tau_1,\tau_2}\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \tau_1 < |x| < \tau_2, \\ 0, & |x| < \tau_1 \quad \text{или} \quad |x| > \tau_2. \end{cases}$$

Для того чтобы получить условия применимости к оператору A проекционного метода по системе проекторов $\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$, рассмотрим в $L_p^s(\mathbb{R}^n)$ интегральное уравнение, порождаемое оператором A:

$$\lambda\varphi(x) = \int\limits_{|y|\leqslant 1} k_1(x,y)\varphi(y)\,dy + \int\limits_{|y|>1} k_2(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x). \tag{8}$$

Известно ([11, с. 36]), что если функция $a(x,y)$ удовлетворяет условию 2°, то найдется такая функция $a_0(r,\rho,t)$, что $a(x,y) = a_0(|x|^2, |y|^2, x'\cdot y')$. Поскольку элементы матриц-функций $k_N(x,y)$, где $N = 1,2$, удовлетворяют условию 2°, то, учитывая вышесказанное, найдутся такие матрицы-функции $b_N(r,\rho,t)$, что $k_N(x,y) = b_N(|x|^2,|y|^2,x'\cdot y')$. Принимая во внимание этот факт и переходя в уравнении (8) к сферическим координатам $x = r\sigma$, $y = \rho\theta$, получим

$$\begin{aligned} \lambda\Phi(r\sigma) = \int\limits_0^1 \int\limits_{S_{n-1}} \frac{1}{r} D_1\left(\frac{\rho}{r}, \sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)\,d\rho\,d\theta \\ + \int\limits_1^\infty \int\limits_{S_{n-1}} \frac{1}{r} D_2\left(\frac{\rho}{r}, \sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)\,d\rho\,d\theta + F(r\sigma), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\Phi(r\sigma) = \varphi(r\sigma)r^{(n-1)/p}, \quad F(r\sigma) = f(r\sigma)r^{(n-1)/p},$$
$$D_N(\rho,t) = b_N(1,\rho^2,t)\rho^{(n-1)/p'}, \quad N = 1,2.$$

Легко проверить, что элементы матриц-функций $D_N(\rho,t)$ удовлетворяют условиям:

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{-1}^1 \left| D_{\ell j}^{(N)}(\rho,t)\right| \rho^{-1/p}(1-t^2)^{(n-3)/2}\,d\rho\,dt < \infty. \tag{10}$$

Умножая уравнение (9) на $Y_{m\mu}(\sigma)$, интегрируя по единичной сфере и применяя формулу Функа — Гекке ([11, с. 43]), получим бесконечную диагональную систему одномерных интегральных уравнений

$$\lambda\Phi_{m\mu}(r) = \int\limits_0^1 \frac{1}{r} D_{1m}\left(\frac{\rho}{r}\right)\Phi_{m\mu}(\rho)\,d\rho + \int\limits_1^\infty \frac{1}{r} D_{2m}\left(\frac{\rho}{r}\right)\Phi_{m\mu}(\rho)\,d\rho + F_{m\mu}(r), \quad r \in (0;\infty), \tag{11}$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = 1,2,\ldots,d_n(m)$,

$$\Phi_{m\mu}(r) = \int\limits_{S_{n-1}} \Phi(r\sigma)Y_{m\mu}(\sigma)\,d\sigma, \quad F_{m\mu}(r) = \int\limits_{S_{n-1}} F(r\sigma)Y_{m\mu}(\sigma)\,d\sigma,$$

$$D_{Nm}(r)=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}D_N(\rho,t)P_m(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}\,dt,\quad N=1,2. \tag{12}$$

Далее, рассмотрим в пространстве $L_p^s(0,\infty)$, $1\leqslant p<\infty$, оператор

$$(A_mg)(r)=\lambda g(r)-\int_0^1\frac{1}{r}D_{1m}\left(\frac{\rho}{r}\right)g(\rho)\,d\rho-\int_1^\infty\frac{1}{r}D_{2m}\left(\frac{\rho}{r}\right)g(\rho)\,d\rho.$$

С помощью условия (10) легко проверить, что элементы матриц-функций $D_{Nm}(\rho)$ удовлетворяют условию б) п. 1.3. Следовательно, оператор A_m есть оператор вида (3). Согласно п. 1.3 символом оператора A_m является пара матриц-функций $(\mathfrak{S}_{1m}(\xi),\mathfrak{S}_{2m}(\xi))$, заданных равенствами

$$\mathfrak{S}_{Nm}(\xi)=\lambda E-\left(\int_0^\infty D_{\ell j}^{(Nm)}(\rho)\rho^{-1/p+i\xi}\,d\rho\right)_{\ell,j=1}^{s},\quad \xi\in\mathbb{R},$$

где $N=1,2$; $m\in\mathbb{Z}_+$. Учитывая формулу (12), получаем

$$\mathfrak{S}_{Nm}(\xi)=\lambda E-\left(\int_{\mathbb{R}^n}k_{\ell j}^{(N)}(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-n/p+i\xi}\,dy\right),\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

Таким образом при фиксированном значении m имеет место равенство

$$\mathfrak{S}_{Nm}(\xi)=\mathfrak{S}_N(m,\xi),\quad \xi\in\mathbb{R},\ N=1,2. \tag{13}$$

Лемма 1. 1) *Если оператор A обратим в $L_p^s(\mathbb{R}^n)$, то оператор A_m обратим в $L_p^s(0,\infty)$ для любого $m\in\mathbb{Z}_+$.*

2) *Если оператор $P_{\tau_1,\tau_2}AP_{\tau_1,\tau_2}$ обратим в $P_{\tau_1,\tau_2}(L_p^s(\mathbb{R}^n))$, то оператор $\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}A_m\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}$ обратим $\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}(L_p^s(0,\infty))$ для любого $m\in\mathbb{Z}_+$.*

$\lhd$ 1) Если оператор A обратим в $L_p^s(\mathbb{R}^n)$, то для любой функции $f(x)\in L_p(\mathbb{R}^n)$ уравнение (8) имеет единственное решение. Тогда, принимая во внимание связь между уравнением (8) и системой одномерных уравнений (11), получаем, что каждое из уравнений системы (11) имеет единственное решение при любом свободном члене. Следовательно, оператор A_m обратим в пространстве $L_p^s(0,\infty)$ при любом $m\in\mathbb{Z}_+$.

2) Вторая часть леммы доказывается аналогично. $\rhd$

Лемма 2. *Если $A\in\Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$, то $A_m\in\Pi\{\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}\}$ для всех $m\in\mathbb{Z}_+$.*

$\lhd$ Если $A\in\Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$, то (см. п. 1.1) оператор A обратим, операторы $P_{\tau_1,\tau_2}AP_{\tau_1,\tau_2}$, действующие в $P_{\tau_1,\tau_2}(L_p^s(\mathbb{R}^n))$, обратимы при $0<\tau_1<\delta_1$ и $\delta_2<\tau_2<\infty$, и

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\tau_1\to0\\ \tau_2\to\infty}}(P_{\tau_1,\tau_2}AP_{\tau_1,\tau_2})^{-1}P_{\tau_1,\tau_2}=A^{-1}. \tag{14}$$

Тогда по лемме 1 для любого фиксированного значения $m\in\mathbb{Z}_+$ оператор A_m обратим в $L_p^s(0,\infty)$, а операторы $\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}A_m\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}$ обратимы в $\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}(L_p^s(0,\infty))$ при указанных выше значениях τ_1 и τ_2. Далее, из условия (14) легко следует, что

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\tau_1\to0\\ \tau_2\to\infty}}(\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}A_m\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2})^{-1}\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}=A_m^{-1}.$$

Следовательно, $A_m\in\Pi\{\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}\}$. $\rhd$

Теорема 1. *Для того чтобы оператор $A \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\det \mathfrak{S}_1(m,\xi) \neq 0$, $\det \mathfrak{S}_2(m,\xi) \neq 0$ *для любой* $(m,\xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$;

2) *для любого фиксированного значения* $m \in \mathbb{Z}_+$ *все правые индексы матрицы-функции* $\mathfrak{S}_2(m,\xi)$ *и все левые индексы матрицы-функции* $\mathfrak{S}_1(m,\xi)$ *равны нулю;*

3) *для любого фиксированного значения* $m \in \mathbb{Z}_+$ *все правые индексы матрицы-функции* $\mathfrak{S}_2^{-1}(m,\xi)\mathfrak{S}_1(m,\xi)$ *равны нулю.*

$\lhd$ Необходимость. Пусть $A \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$. Тогда по лемме 2 оператор $A_m \in \Pi\{\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}\}$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$. Учитывая, что символом оператора A_m является пара матриц-функций $(\mathfrak{S}_1(m,\xi),\ \mathfrak{S}_2(m,\xi))$ (см. равенство (13)), и используя предложение 2, убеждаемся в выполнении условий 1)–3) данной теоремы.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1)–3). В пространстве $L_p^s(\mathbb{R}^n)$ определим проектор $\mathcal{P}_M$ равенством

$$(\mathcal{P}_M\varphi)(x) = \sum_{m=0}^{M}\sum_{\mu=1}^{d_n(m)} \varphi_{m\mu}(|x|)Y_{m\mu}(x'),$$

и положим $\mathcal{R}_M = I - \mathcal{P}_M$. Легко проверить, что проекторы $\mathcal{P}_M$ и P_{τ_1,τ_2} коммутируют и подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{P}_M$ и $\operatorname{Im}\mathcal{R}_M$ инвариантны относительно оператора A. Положим

$$A_{\mathcal{P}} = A\big|_{\operatorname{Im}\mathcal{P}_M}; \quad A_{\mathcal{R}} = A\big|_{\operatorname{Im}\mathcal{R}_M};$$

$$P^{\mathcal{P}}_{\tau_1,\tau_2} = P_{\tau_1,\tau_2}\big|_{\operatorname{Im}\mathcal{P}_M}; \quad P^{\mathcal{R}}_{\tau_1,\tau_2} = P_{\tau_1,\tau_2}\big|_{\operatorname{Im}\mathcal{R}_M}.$$

В силу теоремы о поблочной применимости проекционного метода ([1, с. 93]), для того чтобы оператор $A \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$, необходимо и достаточно, чтобы $A_{\mathcal{P}} \in \Pi\{P^{\mathcal{P}}_{\tau_1,\tau_2}\}$ и $A_{\mathcal{R}} \in \Pi\{P^{\mathcal{R}}_{\tau_1,\tau_2}\}$.

Докажем, что $A_{\mathcal{R}} \in \Pi\{P^{\mathcal{R}}_{\tau_1,\tau_2}\}$. Так как $I_{\mathcal{R}} \in \Pi\{P^{\mathcal{R}}_{\tau_1,\tau_2}\}$, то найдется такое число $\gamma > 0$, что если $B \in \mathcal{L}(\operatorname{Im}\mathcal{R}_M)$ и $\|B\| < \gamma$, то $\lambda I_{\mathcal{R}} - B \in \Pi\{P^{\mathcal{R}}_{\tau_1,\tau_2}\}$ ([1, с. 94]). Как известно ([9, с. 81–82]), число M можно подобрать так, что норма оператора $(K_1P + K_2Q)_{\mathcal{R}}$ будет меньше любого наперед заданного числа. Выберем число M столь большим, чтобы выполнялось условие $\|(K_1P+K_2Q)_{\mathcal{R}}\| < \gamma$, и зафиксируем число M. Тогда $\lambda I_{\mathcal{R}} - (K_1P + K_2Q)_{\mathcal{R}} \in \Pi\{P^{\mathcal{R}}_{\tau_1,\tau_2}\}$, т. е. $A_{\mathcal{R}} \in \Pi\{P^{\mathcal{R}}_{\tau_1,\tau_2}\}$.

Покажем, что $A_{\mathcal{P}} \in \Pi\{P^{\mathcal{P}}_{\tau_1,\tau_2}\}$. Так как выполнены условия 1)–3), то в силу предложения 2 оператор $A_m \in \Pi\{\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}\}$ для любого фиксированного $m \in \mathbb{Z}_+$. Это значит, что для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ найдутся такие числа $\delta_{1m} \in (0,1)$ и $\delta_{2m} \in (1,\infty)$, что при $0 < \tau_1 < \delta_{1m}$ и $\delta_{2m} < \tau_2 < \infty$ операторы $\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}A_m\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}$, действующие в $\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}(L_p^s(0,\infty))$, обратимы и

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to\infty}} (\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}A_m\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2})^{-1}\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2} = A_m^{-1}. \tag{15}$$

Положим $\delta_1 = \min\limits_{0\leqslant m\leqslant M}\{\delta_{1m}\}$ и $\delta_2 = \max\limits_{0\leqslant m\leqslant M}\{\delta_{2m}\}$. Поскольку для всех $0 < \tau_1 < \delta_1$ и $\delta_2 < \tau_2 < \infty$ операторы $\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}A_m\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}$ $(m = 0,1,\ldots,M)$ обратимы, то оператор $P^{\mathcal{P}}_{\tau_1,\tau_2}A_{\mathcal{P}}P^{\mathcal{P}}_{\tau_1,\tau_2}$, действующий в $P^{\mathcal{P}}_{\tau_1,\tau_2}(\operatorname{Im}\mathcal{P}_M)$, обратим для всех $0 < \tau_1 < \delta_1$ и $\delta_2 < \tau_2 < \infty$. Далее, с помощью (15) легко проверяется, что

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to\infty}} (P^{\mathcal{P}}_{\tau_1,\tau_2}A_{\mathcal{P}}P^{\mathcal{P}}_{\tau_1,\tau_2})^{-1}P^{\mathcal{P}}_{\tau_1,\tau_2} = A_{\mathcal{P}}^{-1}.$$

Следовательно, $A_{\mathcal{P}} \in \Pi\{P^{\mathcal{P}}_{\tau_1,\tau_2}\}$. Теорема доказана. $\rhd$

Непосредственным следствием данной теоремы является критерий применимости проекционного метода к оператору $\lambda I - K$, ранее установленный в [6]. Символом оператора $\lambda I - K$ является матрица-функция $\mathfrak{S}(m,\xi) = \mathfrak{S}_1(m,\xi) = \mathfrak{S}_2(m,\xi)$, где $\mathfrak{S}_N(m,\xi)$ определяется равенством (7).

Следствие 1. *Для того чтобы оператор* $\lambda I - K \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\det \mathfrak{S}(m,\xi) \neq 0$, $\forall\,(m,\xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$;

2) *при любом фиксированном значении* $m \in \mathbb{Z}_+$ *все левые и правые индексы матрицы-функции* $\mathfrak{S}(m,\xi)$ *равны нулю.*

Другим следствием теоремы 1 является критерий применимости проекционного метода к оператору A в скалярном случае, ранее полученный в [7]. Пусть $s = 1$. Тогда символ оператора A есть пара функций $(\sigma_1(m,\xi), \sigma_2(m,\xi))$, заданных на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ соответствующими скалярными аналогами формул (7).

Следствие 2. *Для того чтобы оператор* $A \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\sigma_1(m,\xi) \neq 0$, $\sigma_2(m,\xi) \neq 0$, $\forall\,(m,\xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$;

2) *при любом фиксированном значении* $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\operatorname{ind} \sigma_1(m,\xi) = \operatorname{ind} \sigma_2(m,\xi) = 0.$$

Литература

1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
2. *Böttcher A., Silbermann B.* Analysis of Toeplitz Operators.—Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1990.—512 p.
3. *Prössdorf S., Silbermann B.* Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations.—Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1991.—476 p.
4. *Hagen R., Roch S., Silbermann B.* Spectral theory of approximation methods for convolution equations.—Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1995.—427 p.
5. *Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К.* Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами // Докл. РАН.—1999.—Т. 368, № 6.—С. 727–729.
6. *Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К.* Проекционный метод в теории интегральных операторов с однородными ядрами // Мат. заметки.—2004.—Т. 75, вып. 2.—С. 163–179.
7. *Авсянкин О. Г.* О применении проекционного метода к парным интегральным операторам с однородными ядрами // Изв. вузов. Математика.—2002.—№ 8.—С. 3–7.
8. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Докл. АН СССР.—1973.—Т. 212, № 6.—С. 1287–1289.
9. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2001.—427 p.
10. *Авсянкин О. Г.* Об алгебре парных интегральных операторов с однородными ядрами // Мат. заметки.—2003.—Т. 73, вып. 4.—С. 483–493.
11. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984.—208 с.

Статья поступила 15 декабря 2004 г.

Авсянкин Олег Геннадиевич, к. ф.-м. н.
Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет
E-mail: avsyanki@math.rsu.ru