Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2005, Том 7, Выпуск 4

УДК **517.98**

ПРОЕКЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА УРЫСОНА

М. А. Плиев

Семену Самсоновичу Кутателадзе
в связи с его шестидесятилетием

Для положительного оператора Урысона доказывается критерий латеральной непрерывности. Устанавливаются формулы проектирования положительного оператора Урысона на полосы латерально непрерывных и σ-латерально непрерывных операторов.

В работе [2] введен класс нелинейных ортогонально аддитивных порядково ограниченных операторов, названных абстрактными операторами Урысона. Этот класс при обычном поточечном упорядочении оказывается пространством Канторовича, при условии, что таковым является пространство образов. Частными случаями таких операторов являются нелинейные интегральные операторы типа Урысона и Гаммерштейна. Важную роль в пространствах абстрактных операторов Урысона играют полосы латерально непрерывных и σ-латерально непрерывных операторов. Возникает задача: для произвольного положительного оператора Урысона найти формулы проектирования на полосы латерально непрерывных и σ-латерально непрерывных операторов. Кроме того, полезно было бы иметь критерий латеральной непрерывности в виде условий, налагаемых на ядро. Решение аналогичных задач для линейных операторов см. в [3]. Настоящая заметка посвящена решению этих вопросов.

Необходимые сведения из теории векторных решеток можно найти в [1, 3]. Напомним некоторые факты об ортогонально аддитивных порядково ограниченных операторах из [2].

Рассмотрим векторную решетку F и векторное пространство W. Говорят, что оператор $T : F \to W$ *ортогонально аддитивен*, если $T(f_1 + f_2) = Tf_1 + Tf_2$ для дизъюнктных f_1 и f_2. Ортогонально аддитивный оператор T называется *порядково ограниченным*, если он переводит порядково ограниченные множества в порядково ограниченные множества. Оператор $T : E \to F$, действующий между векторными решетками E и F, называется *абстрактным оператором Урысона*, если он порядково ограничен и ортогонально аддитивен. Множество всех абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается символом $\mathcal{U}(E, F)$. Частичный порядок в векторном пространстве $\mathcal{U}(E, F)$ вводится с помощью конуса $\mathcal{U}_+(E, F)$, определяемого следующим образом:

$$T \in \mathcal{U}_+(E, F) \Leftrightarrow (\forall \in E)\, Te \geqslant 0.$$

При этом по определению $S \leqslant T$ означает, что $S - T \in \mathcal{U}_+(E, F)$.

В случае, когда векторная решетка F порядково полна, для абстрактных операторов Урысона из $\mathcal{U}(E,F)$ можно построить порядковое исчисление Рисса — Канторовича, аналогично линейному случаю.

Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полна. Тогда $\mathcal{U}(E,F)$ — порядково полная векторная решетка, и для любых двух операторов T, $S \in \mathcal{U}(E,F)$ и $f \in E$ справедливы формулы:

$$\begin{aligned}
(T \vee S)(f) &:= \sup\{Tg + Sh : \, g + h = f, \, g \perp h\};\\
(T \wedge S)(f) &:= \inf\{Tg + Sh : \, g + h = f, \, g \perp h\};\\
T^{+}(f) &:= \sup\{Tg : \, g \leqslant f, \, (f-g) \perp g\};\\
T^{-}(f) &:= -\inf\{Tg : \, g \leqslant f, \, (f-g) \perp g\};\\
|Tf| &\leqslant |T|(f).
\end{aligned}$$

Говорят, что сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\Xi} \subset E$ латерально сходится к элементу v, если $v = o\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$ и $(v_\alpha - v_\beta) \perp v_\beta$ для любых $\alpha, \beta \in \Xi, \beta \leqslant \alpha$. При этом пишут $v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$. Пусть E — векторная решетка. Ортогонально аддитивный оператор T называется *латерально непрерывным* (*латерально σ-непрерывным*), если для любой сети $(e_\alpha) \subset E$ из $e = l\text{-}\lim_\alpha e_\alpha$ следует $o\text{-}\lim_\alpha Te_\alpha = Te$ (соответственно, для любой последовательности $(e_n) \subset E$ из $l\text{-}\lim_n e_n = e$ следует $o\text{-}\lim_n Te_n = Te$). Множество всех латерально непрерывных (латерально σ-непрерывных) операторов обозначается через $\mathcal{U}_c(E,F)$ ($\mathcal{U}_{\sigma c}(E,F)$).

Оператор $T \in U(E,F)$ называется вполне аддитивным (σ-аддитивным), если $T(\sum_\alpha u_\alpha) = \sum_\alpha Tu_\alpha$ для любого семейства (любого счетного семейства) попарно дизъюнктных элементов $(u_\alpha)_{(\alpha\in A)}$. Множество всех вполне аддитивных (σ-аддитивных) операторов, действующих из E в F обозначается $U_a(E,F)$ соответственно $U_{\sigma a}(E,F)$. Можно показать, что множества $U_a(E,F)$ и $U_{\sigma a}(E,F)$ являются полосами в $U(E,F)$.

Если T ортогонально аддитивный порядково ограниченный оператор, то следующие условия эквивалентны: 1) T есть латерально (σ)-непрерывный оператор; 2) T σ-аддитивен. Тем самым, $U_{\sigma c}(E,F) = U_{\sigma a}(E,F)$.

Если E и F — векторные решетки, причем решетка F порядково полна, то пространства $\mathcal{U}_c(E,F)$ и $\mathcal{U}_{\sigma c}(E,F)$ являются полосами в $\mathcal{U}(E,F)$. Для оператора $T \in \mathcal{U}(E,F)$ *ядром* называется множество $\{e \in E : Te = 0\}$. Множество $M \subset E$ называется *латерально замкнутым* (*латерально σ-замкнутым*), если оно содержит пределы всех своих латерально сходящихся сетей (последовательностей).

Сформулируем теперь основные результаты настоящей заметки.

Теорема 1. *Пусть $T : E \to F$ — положительный оператор Урысона, где E — решетка с проекциями на главные полосы, а F — K-пространство. Оператор T латерально непрерывен (латерально σ-непрерывен) тогда и только тогда, когда ядро любого оператора $S \in \mathcal{U}(E,F)$, $0 \leqslant S \leqslant T$, латерально замкнуто (латерально σ-замкнуто).*

Следующая теорема указывает формулу проекции положительного оператора на полосу латерально непрерывных операторов. С каждым положительным оператором T свяжем операторы T_c и $T_{\sigma c}$, определяемые формулами

$$T_c u = \inf\{\sup_\alpha Tu_\alpha : \, u = l\text{-}\lim_\alpha u_\alpha\}; \tag{1}$$

$$T_{\sigma c} u = \inf\{\sup_n Tu_n : \, u = l\text{-}\lim_n u_n\}. \tag{2}$$

Инфимум в первой формуле берется по всем сетям (u_α) латерально сходящимся к u. Аналогично и в отношении последовательностей во второй формуле.

Теорема 2. *Пусть T положительный оператор Урысона из решетки с проекциями E в K-пространство F. Тогда T_c ($T_{\sigma c}$) является проекцией на полосу латерально непрерывных (σ-латерально непрерывных) операторов.*

Теорема 3. *Для произвольного положительного оператора $T \in U_+(E,F)$ проекция T_a на полосу $U_a(E,F)$ может быть вычислена по формуле:*

$$T_a u = \inf\Big\{\sum T u_\alpha\Big\},$$

где инфимум берется по всем попарно дизъюнктным семействам (u_α) таким, что $u = \sum_\alpha u_\alpha$.

Доказательство сформулированных результатов содержится в леммах 1–5. Всюду ниже $T \in \mathcal{U}(E,F)$ — положительный оператор Урысона, где E — решетка с проекциями на главные полосы, а F — это K-пространство.

Лемма 1. *Пусть положительный оператор Урысона T латерально непрерывен (латерально σ-непрерывен). Тогда для всех операторов Урысона $S \in \mathcal{U}(E,F)$, $0 \leqslant S \leqslant T$, ядро является латерально замкнутым (латерально σ-замкнутым) множеством.*

$\lhd$ Рассуждение проведем для сетей. В случае последовательностей используется аналогичная схема. Пусть T латерально непрерывен и $S \in \mathcal{U}(E,F)$, $0 \leqslant S \leqslant T$. Так как $\mathcal{U}_{\rm c}(E,F)$ — полоса, то S также латерально непрерывный оператор. Пусть M — ядро S. Возьмем сеть $(u_\alpha) \in M$, латерально сходящуюся к нулю. Тогда справедлива формула

$$Su = o\text{-}\lim_\alpha S u_\alpha = 0 \Rightarrow u \in M,$$

из которой следует латеральная замкнутость ядра S. $\rhd$

Следующее предложение заканчивает доказательство теоремы 1.

Лемма 2. *Пусть T — положительный оператор Урысона и ядро произвольного оператора Урысона S, $0 \leqslant S \leqslant T$, латерально замкнуто (латерально σ-замкнуто). Тогда оператор T латерально непрерывен (латерально σ-непрерывен).*

$\lhd$ Рассуждение, как и в предыдущем случае, проведем для сетей. Пусть T произвольный положительный оператор Урысона такой, что ядро произвольного оператора $S \in \mathcal{U}(E,F)$, $0 \leqslant S \leqslant T$, латерально замкнуто. Рассмотрим сеть (u_α), латерально сходящуюся к u. С каждым элементом u_α свяжем π_α проектор на полосу $u_\alpha^\perp$. Тогда можем написать:

$$Tu = Tu_\alpha + T(u-u_\alpha), \quad Tu = Tu_\alpha + T\pi_\alpha u,$$
$$Tu \leqslant \sup_\alpha Tu_\alpha + T\pi_\alpha u.$$

В последнем неравенстве в правой части перейдем к инфимуму по всем α:

$$Tu \leqslant \sup_\alpha Tu_\alpha + \inf_\alpha T\pi_\alpha u.$$

Оператор $\inf_\alpha T\pi_\alpha$ обозначим через S. Ясно, что S — положительный оператор Урысона. Так как $S \leqslant T$, то по условию ядро S латерально замкнуто. Кроме того, легко видеть, что $Su = \inf_\alpha T\pi_\alpha u$. Действительно, по определению $S_u \leqslant \inf_\alpha T\pi_\alpha u$. Докажем обратное неравенство. Заметим, что

$$Su = \inf\left\{\sum_{i=1}^n T\pi_{\alpha_i} u_i : \ \sum_{i=1}^n u_i = u,\ u_i \perp u_j,\ j \neq i\right\},$$

где инфимум берется по всем конечным наборам $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Так как сеть проекторов π_α убывает, то для любого конечного набора проекторов $\pi_{\alpha_1}, \dots, \pi_{\alpha_n}$ найдется проектор π_{α_l} такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} T\pi_{\alpha_i} u \geqslant T\pi_{\alpha_l} u.$$

Переходя к инфимуму по всем конечным наборам можем написать $Su \geqslant \inf_a T\pi_\alpha$.

Так как $Su_\alpha = 0$ для всех α, то $Su = 0$ в силу латеральной замкнутости ядра S. $\triangleright$

Лемма 3. *Пусть T — положительный оператор Урысона. Тогда формулы* (1) *и* (2) *определяют ортогонально аддитивные порядково ограниченные операторы.*

$\triangleleft$ Проведем рассуждения для сетей, для последовательностей получается аналогично. С оператором T свяжем оператор $T^\natural$ следующей формулой:

$$T^\natural e := \inf\{\sup_\alpha Te_\alpha :\ e = l\text{-}\lim_\alpha e_\alpha\}.$$

Требуется установить, что $T^\natural(e+f) = T^\natural e + T^\natural f$, где $f \perp e$. Пусть $e,\ f \in E_+$ и сеть $(v_\alpha)_{(\alpha\in\Lambda)}$ латерально сходится к $f+e$. Ясно, что $v_\alpha \in E_+$ для всех $\alpha \in \Lambda$. С сетью (v_α) свяжем две сети $(v_{1,\alpha})$ и $(v_{2,\alpha})$, определяемые следующими формулами.

$$v_{1,\alpha} := v_\alpha \wedge e; \quad v_{2,\alpha} := v_\alpha \wedge f.$$

Ясно, что $f = l\text{-}\lim_\alpha v_{2,\alpha}$ и $e = l\text{-}\lim_\alpha v_{1,\alpha}$. Действительно, убедимся в этом для $(v_{2,\alpha})$. Справедливы следующие формулы.

$$\begin{aligned}(v_{2,\alpha} - v_{2,\beta}) \wedge v_{2,\beta} &= (v_\alpha \wedge f - v_\beta \wedge f) \wedge (v_\beta \wedge f) = [v_\alpha \wedge f + (-v_\beta) \vee (-f)] \wedge v_\beta \wedge f \\ &= [(v_\alpha \wedge f - v_\beta) \vee (v_\alpha \wedge f - f)] \wedge v_\beta \wedge f \leqslant (v_\alpha - v_\beta) \wedge v_\beta = 0;\end{aligned}$$

$$o\text{-}\lim_\alpha v_{2,\alpha} = o\text{-}\lim_\alpha (v_\alpha \wedge f) = (o\text{-}\lim_\alpha v_\alpha) \wedge f = (f+e) \wedge f = f.$$

Отсюда следует формула

$$T^\natural(e+f) \geqslant T^\natural e + T^\natural f. \tag{3}$$

Докажем обратное неравенство. Пусть $e = l\text{-}\lim_{\alpha\in\Lambda} v_\alpha$ и $f = l\text{-}\lim_{\gamma\in\Gamma} w_\gamma$. Произведение $\Lambda \times \Gamma$ будет направленным множеством, где порядок вводится следующим образом:

$$(\alpha, \gamma) \leqslant (\alpha', \gamma') \ \Leftrightarrow\ \alpha \leqslant \alpha' \wedge \gamma \leqslant \gamma'.$$

Построим сеть $u_{\alpha,\gamma} := v_\alpha + w_\gamma$. Покажем, что $f + e = l\text{-}\lim_{(\alpha,\gamma)} u_{\alpha,\gamma}$. Действительно,

$$\begin{gathered}(u_{(\alpha',\gamma')} - u_{(\alpha,\gamma)}) \wedge u_{(\alpha,\gamma)} = (v_{\alpha'} + w_{\gamma'} - v_\alpha - w_\gamma) \wedge (v_\alpha + w_\gamma) \\ = (v_{\alpha'} - v_\alpha + w_{\gamma'} - w_\gamma) \wedge (v_\alpha + w_\gamma) \leqslant (v_{\alpha'} - v_\alpha) \wedge v_\alpha + (w_{\gamma'} - w_\gamma) \wedge w_\gamma = 0.\end{gathered}$$

Отсюда выводим неравенство

$$T^\natural(e+f) \leqslant T^\natural e + T^\natural f. \tag{4}$$

Пусть теперь $e,\ f \in (-E_+)$ и $e \perp f$. Сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ латерально сходится к $f+e$. Ясно, что $v_\alpha \in (-E_+)$, $\alpha \in \Lambda$. Теперь можем написать

$$v_{1,\alpha} := e \vee v_\alpha; \quad v_{2,\alpha} := f \vee v_\alpha;$$

$$(v_{1,\alpha}-v_{1,\beta})\wedge v_{1,\beta}=|(v_\alpha\vee e-v_\beta\vee e)|\wedge|v_\beta\vee e|$$
$$=((-v_\alpha)\wedge(-e)-(-v_\beta)\wedge(-e))\wedge(-v_\beta\wedge(-e))=0;$$

$$o\text{-}\lim_\alpha v_{1,\alpha}=o\text{-}\lim_\alpha(v_\alpha\vee e)=(o\text{-}\lim_\alpha v_\alpha)\vee e=(f+e)\vee e=e.$$

Таким образом, доказано неравенство (3). Доказательство неравенства (4) не вызывает затруднений. Пусть теперь $e\geqslant 0$, а $f\leqslant 0$ и сеть (v_α) латерально сходится к $e+f$ и $f\bot e$. Тогда можем написать

$$v_{1,\alpha}:=v_\alpha^+\wedge e;\quad v_{2,\alpha}=:(-v_\alpha^-)\vee f.$$

Рассмотрим общий случай, когда e и f произвольны. Тогда $e=e^++(-e^-)$ и $f=f^++(-f^-)$ и доказательство сводится к разобранным выше случаям.

$$T^\natural(e+f)=T^\natural(e^++(-e^-)+f^++(-f^-))=T^\natural(e)+T^\natural f.$$

Таким образом ортогональная аддитивность оператора $T^\natural$ доказана, порядковая ограниченность этого оператора очевидна. $\rhd$

Следующая лемма завершает доказательство теоремы 2.

Лемма 4. *Оператор $T^\natural$ латерально непрерывен* (*латерально σ-непрерывен*).

$\lhd$ Докажем формулу для сетей, в случае последовательностей доказательство аналогично. Достаточно доказать, что оператор $T^\natural$, определенный в лемме 3, латерально непрерывен. Действительно, пусть S — латерально непрерывный оператор, $v\in E, v=l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$ и $S\leqslant T$. Тогда можем написать

$$Sv_\alpha\leqslant Tv_\alpha,\quad \alpha\in\Lambda;\quad Sv=\sup_\alpha Sv_\alpha\leqslant\sup_\alpha Tv_\alpha.$$

Переходя к инфимуму по всем сетям, латерально сходящимся к v, можем написать $Sv\leqslant T^\natural v$. Итак, возьмем произвольный элемент $u\in E$ и сеть $(u_\lambda)_{(\lambda\in\Lambda)}$, латерально сходящуюся к u. Ясно, что $h=\sup_\lambda\{T^\natural u_\lambda\}\leqslant T^\natural u$. Требуется установить обратное неравенство $T^\natural\leqslant h$. С каждым элементом u_λ свяжем порядковый проектор π_λ на полосу $\{u-u_\lambda\}^\perp$ и ортогонально аддитивный положительный оператор $T_\lambda:=T\pi_\lambda$. Аналогично определяется и $T_\lambda^\natural$. Сеть T_λ убывает в пространстве $\mathcal{U}(E,F)$ и ограничена снизу. Обозначим через S инфимум сети $(T_\lambda)_{(\lambda\in\Lambda)}$. Теперь можем написать:

$$T^\natural u=T^\natural u_\lambda+T^\natural(u-u_\lambda)=T^\natural u_\lambda+T_\lambda^\natural u;$$

$$T^\natural u-h\leqslant T^\natural u-T^\natural u_\lambda=T^\natural(u-u_\lambda)=T_\lambda^\natural u;$$

$$0\leqslant(T_\lambda^\natural-S^\natural)=(T_\lambda-S)^\natural\leqslant T_\lambda-S.$$

Отсюда следует, что сеть $T_\lambda^\natural$, убывая сходится к $S^\natural$. В частности, $T_\lambda^\natural u=S^\natural u$. Во втором неравенстве перейдем к инфимуму по всем $\lambda\in\Lambda$. Теперь можем написать $T^\natural u-h\leqslant S^\natural u$. По определению $Su_\lambda=0$ для всех $\lambda\in\Lambda$. Но тогда и вектор $S^\natural u$ равен нулю, так в качестве сети, латерально сходящейся к u, можно взять сеть $(u_\lambda)_{(\lambda\in\Lambda)}$. $\rhd$

Лемма 5. *Оператор T_a вполне аддитивен.*

$\lhd$ Аналогично лемме 3 устанавливается ортогональная аддитивность T_a. Возьмем семейство попарно дизъюнктных элементов $(u_\alpha)_{(\alpha\in A)}$ и пусть $u=\sum_\alpha u_\alpha$. Положим $\Theta=P_{fin}(A)$, $\theta\in\Theta$, $y_\theta=\sum_{\alpha\in\theta}u_\alpha$, $z_\theta=\sum_{(\alpha\in\Theta\setminus\theta)}u_\alpha$ и $h=\sup_\theta T_a\ y_\theta\leqslant T_a u$. Установим обратное неравенство. С каждым элементом y_θ свяжем порядковый проектор π_θ на полосу $\{y_\theta\}^\perp$ и положительный оператор $T_\theta = T\pi_\theta$. Аналогично определяется и оператор $T_{\theta,a} = T_a\pi_\theta$. Обозначим инфимум сети T_θ через S. Тогда справедливы формулы:

$$T_a(u) = T_a y_\theta + T_a z_\theta = T_a y_\theta + T_{\theta,a} z_\theta,$$
$$T_a(u) - h \leqslant T_a(z_\theta + y_\theta) - T_a y_\theta = T_a z_\theta = T_a \pi_\theta u = T_{\theta,a} u;$$
$$0 \leqslant (T_{\theta,a} - S_a) = (T_\theta - S) \leqslant T_\theta - S.$$

Сеть $T_{\theta,a}$ убывая сходится к S_a. Далее можем написать $T_a(u) - h \leqslant S_a(u)$. Но $S_a(u) = 0$ в силу определения S_a. $\rhd$

Автору неизвестно, при каких условиях $U_a(E,F) = U_c(E,F)$. Так как $U_{\sigma c}(E,F) = U_{\sigma a}(E,F)$, то для $T_{\sigma c}$ имеет место формула

$$T_{\sigma c} u = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} T(u_k) : \ \sum_{k=1}^{\infty} u_k = u, \ u_k \perp u_e \ (k \neq l), \ u_k \in E \right\} \quad (u \in E).$$

Литература

1. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
2. *Mazon J. M., Segura de Leon S.* Order bounded ortogonally additive operators // Rev. Roumane Math. Pures Appl.—1990.—V. 35, № 4.—P. 329–353.
3. *Aliprantis S. D., Burkinshaw O.* The components of the positive operator // Math. Z.—1983.—Bd. 184, № 2—P. 245–257.

Статья поступила 31 марта 2004 г.

Плиев Марат Амурханович, к. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН и РСО-А
E-mail: `plimarat@yandex.ru`