Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2005, Том 7, Выпуск 3

УДК **517.5**

НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ[1]

В. В. Напалков, С. Г. Мерзляков

75-летию Юрия Федоровича Коробейника посвящается

В данной работе изучаются системы операторов свертки, к которым могут быть сведены некоторые важные задачи из физики и других областей.

1. Пусть U — вертикальная полоса $\{|\operatorname{Re} z| < 1\}$, $H(U)$ — пространство голоморфных в этой полосе функций с топологией равномерной сходимости на компактах, $H^*(U)$ — сильное сопряженное к нему. Пусть, далее, даны функционалы $S_1, \dots, S_k \in H^*(U)$, причем целые функции экспоненциального типа $\varphi_j(\lambda) = \left\langle S_j, e^{\lambda z} \right\rangle$, $j = 1, \dots, k$, таковы, что

$$\varlimsup_{r \to \pm\infty} \frac{\ln|\varphi_j(r)|}{|r|} = d_j, \quad d_j \geqslant 0, \ d_j + d_i < 1, \ i, j = 1, \dots, k, \ i \neq j. \tag{1}$$

Обозначим через U_j вертикальную полосу $\{|\operatorname{Re} z| < 1 - d_j\}$, $j = 1, \dots, k$.

Будем предполагать, что функция φ_1 имеет вполне регулярный рост, ее нули $\{\lambda_n\}$ вещественные, простые и разделенные, т. е. для некоторого числа $c > 0$ выполнено неравенство $|\lambda_n - \lambda_m| \geqslant c$, $n \neq m$. Заметим, что в этом случае $d_1 = 0$. Пусть $\{\mu_n\}$ — нули функции φ_1, не являющиеся нулями функции $|\varphi_2(\lambda)| + \dots + |\varphi_k(\lambda)|$, а $\{\nu_n\}$ — все остальные нули.

Эти предположения влекут, что функция $h \in H(\{|\operatorname{Re} z| < d\})$, $d > 0$, удовлетворяющая уравнению свертки $(S_1 * h)(z) = \langle S_1, h(z+t) \rangle = 0$, раскладывается в области $\{|\operatorname{Re} z| < d\}$ в равномерно сходящийся на компактах ряд

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}. \tag{2}$$

Отметим, что ряд вида (2) сходится в области $\{|\operatorname{Re} z| < d\}$ тогда и только тогда, когда

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln|a_n|}{|\lambda_n|} \leqslant -d$$

(см. [1], с. 115).

[1]Работа подготовлена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02-01-01100 и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-1528.2003.1.

Рассмотрим систему уравнений свертки

$$(S_j * f)(z) = g_j(z), \quad j = 1, \ldots, k, \tag{3}$$

где функцию $f \in H(U)$ требуется найти, а функции g_j, в силу условий (1) принадлежащие пространству $H(U_j)$, $j = 1, \ldots, k$, заданы.

Подобные системы в более общей постановке рассматривались в статье [2] (там же приведены ссылки на другие работы). Но случай $d_1 + \cdots + d_k \geqslant 1$ указанной статьей не охватывается.

В статье [2] приведены необходимые для разрешимости условия на правые части уравнения (3), из них мы выберем следующие:

$$S_i * g_j = S_j * g_i, \quad i, j = 1, \ldots, k, \quad i \neq j \tag{4}$$

и

$$T_1^m * g_j = T_j^m * g_1, \tag{5}$$

где T_1^m, T_j^m — линейные непрерывные функционалы, преобразования Лапласа которых соответственно равны

$$\frac{\varphi_1(\lambda)}{\lambda - \nu_m} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi_j(\lambda)}{\lambda - \nu_m}, \quad j = 2, \ldots, k,\ m \in \mathbb{N}.$$

Правые части системы (3), удовлетворяющие указанным условиям, будем называть допустимыми.

Покажем теперь, что этих необходимых условий хватает для разрешимости системы (3).

Теорема 1. *Для того, чтобы система* (3) *была разрешима для любой допустимой правой части пространства* $\prod_{j=1}^{k} H(U_j)$, *необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{j=2,\ldots,k} \left(\frac{\ln|\varphi_j(\mu_n)|}{|\mu_n|} - d_j \right) = 0. \tag{6}$$

$\lhd$ Необходимость. Предположим, что для любой допустимой правой части существует решение системы (3). Обозначим

$$m_n = \max_{j=2,\ldots,k} \left(\frac{\ln|\varphi_j(\mu_n)|}{|\mu_n|} - d_j \right),$$

и предположим, что для последовательности $\{a_n\}$ выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln|a_n|}{|\mu_n|} + m_n + 1 \right) = 0. \tag{7}$$

Как легко видеть,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n \varphi_j(\mu_n)|}{|\mu_n|} \leqslant d_j - 1, \quad j = 2, \ldots, k,$$

поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_j(\mu_n) e^{\mu_n z} = g_j(z)$$

будет сходиться в топологии пространства $H(U_j)$, $j = 2, \ldots, k$.

Несложно показать, что система $(0,\, g_2, \ldots,\, g_k)$ будет допустимой и, по условию, найдется решение $f \in H(U)$ системы (3).

В таком случае $S_1 * f = 0$ и, следовательно,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n z} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^1 e^{\mu_n z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 e^{\nu_n z}. \tag{8}$$

Подействовав на функцию f оператором свертки $S_j *$, получим

$$(S_j * f)\,(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^1 \varphi_j(\mu_n) e^{\mu_n z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_j(\mu_n) e^{\mu_n z}, \quad j = 2, \ldots, k.$$

Для рядов экспонент с показателями $\{\lambda_n\}$ имеет место теорема единственности, поэтому $b_n^1 \varphi_j(\mu_n) = a_n \varphi_j(\mu_n)$, $j = 2, \ldots, k$, $n \in \mathbb{N}$, и из определения множества $\{\mu_n\}$ заключаем, что $b_n^1 = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Так как ряды (8) сходятся в полосе U, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |a_n}{|\mu_n|} \leqslant -1,$$

и, учитывая соотношение (7), получим $\underline{\lim}_{n\to\infty} m_n \geqslant 0$. С другой стороны из условий (1) следует $\overline{\lim}_{n\to\infty} m_n \leqslant 0$, что вместе с предыдущим соотношением и дает искомое.

Достаточность. Пусть выполнено условие (6) и система $\{g_1, \ldots, g_k\}$ допустима. Из вполне регулярности роста функции φ_1 следует существование функции $f_1 \in H(U)$, удовлетворяющей уравнению $S_1 * f_1 = g_1$.

Положим $F = f - f_1,\ G_j = g_j - S_j * f_1,\ j = 1, \ldots, k$. Тогда система (3) примет вид:

$$S_j * F = G_j, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{9}$$

причем $G_1 = 0$.

Пользуясь хорошо известными свойствами операторов свертки, из условий (4) получаем, что $S_i * G_j = S_j * G_i,\ 1 \leqslant i, j \leqslant k$ и, в частности, $S_1 * G_j = 0,\ j = 2, \ldots, k$. В таком случае функции G_j представляются в областях U_j в виде ряда

$$G_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{nj} e^{\lambda_n z},\ j = 2, \ldots, k. \tag{10}$$

Предположим, что $\lambda_n = \nu_m,\ n, m \in \mathbb{N}$. Из равенств (10) и (5) имеем:

$$\varphi_1'(\lambda_n) b_{nj} = T_1^m * G_j = T_j^m * g_1 - T_1 * S_j * f_1,$$

$j = 2, \ldots, k$. Как несложно показать, $T_1^m * S_j = T_j^m * S_1$, так что $b_{nj} = 0$ в силу простоты нулей функции $\varphi_1,\ j = 2, \ldots, k$.

Итак, функции G_j можно записать в виде

$$G_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nj} e^{\mu_n z}, \quad j = 2, \ldots, k. \tag{11}$$

Ряды сходятся в полосах U_j, поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |c_{nj}|}{|\mu_n|} \leqslant -1 + d_j, \quad j = 2, \ldots, k. \tag{12}$$

Соотношения (11) и (15) влекут $c_{nj}\varphi_i(\mu_n) = c_{ni}\varphi_j(\mu_n)$, $i,j = 2,\dots,k$, $n \in \mathbb{N}$. Из определения семейства $\{\mu_n\}$ и последних равенств заключаем, что найдется последовательность $\{a_n\}$, для которой $c_{nj} = a_n\varphi_j(\mu_n)$, $j = 2,\dots,k$, $n \in \mathbb{N}$. Из соотношений (12) получим:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{\ln|a_n|}{|\mu_n|} + \left(\frac{\ln|\varphi_j(\mu_n|)}{|\mu_n|} - d_j\right)\right] \leqslant -1, \quad j = 2,\dots,k.$$

Ясно, что в таком случае

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\ln|a_n|}{|\mu_n|} + m_n\right) \leqslant -1,$$

и из условия (6) заключаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{|\mu_n|} \leqslant -1.$$

Последнее неравенство обеспечивает голоморфность функции

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\mu_n z}$$

в полосе U. Легко видеть, что эта функция удовлетворяет системе (9), следовательно функция $f = f_1 + F$ будет решением системы (3). $\triangleright$

Заметим, что разрешимость системы (3) для любой допустимой правой части вытекает из разрешимости одной конкретной части.

Приведем теперь критерии разрешимости системы (3) для полуплоскости и плоскости.

Пусть G, $G_1,\dots,G_k$, соответственно, полуплоскости

$$\{\operatorname{Re} z < 1\}\,,\ \{\operatorname{Re} z < 1 - d_1\}\,,\dots,\{\operatorname{Re} z < 1 - d_k\}\,.$$

Как и выше, можно доказать следующие результаты.

Теорема 2. *Для того, чтобы для любой допустимой правой части пространства $\prod_{j=1}^{k} H(G_j)$ нашлось решение системы* (3) *в пространстве $H(G)$, необходимо и достаточно выполнение соотношений*

$$\lim_{n\to\infty,\,\mu_n\geqslant 0}\ \max_{j=2,\dots,k}\left(\frac{\ln|\varphi_j(\mu_n)|}{|\mu_n|} - d_j\right) = 0$$

и

$$\underline{\lim}_{n\to\infty,\,\mu_n<0}\ \max_{j=2,\dots,k}\frac{\ln|\varphi_j(\mu_n)|}{|\mu_n|} > -\infty.$$

Теорема 3. *Для того, чтобы для любой допустимой правой части пространства $\prod_{j=1}^{k} H(\mathbb{C})$ нашлось решение системы* (3) *в пространстве $H(\mathbb{C})$, необходимо и достаточно выполнение соотношения*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\ \max_{j=2,\dots,k}\frac{\ln|\varphi_j(\mu_n)|}{|\mu_n|} > -\infty.$$

2. В качестве примера рассмотрим следующую систему

$$\left\{\begin{array}{l} f(z+2\pi i) - f(z) = g_1(z), \\ f(z+2\pi i\theta) - f(z) = g_2(z), \end{array}\right. \tag{13}$$

где θ — иррациональное число, $0 < \theta < 1$.

Разрешимость этой системы для любой допустимой правой части в полосе, как показано в теореме 1, эквивалентна соотношению

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln|\sin\pi n\theta|}{n}=0$$

или, как несложно показать,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\rho(n\theta)}{n}=0, \tag{14}$$

где $\rho(x)$ — расстояние от точки x до ближайшего целого.

Из [3, теорема 32] следует, что для почти всех чисел θ выполнено предыдущее равенство. Из теоремы Литлвуда оно имеет место для алгебраических чисел.

С другой стороны, пользуясь теоремой 3 из [3], легко построить число $\tau\in\mathbb{R}$, для которого

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{\ln\rho(n\tau)}{n}=-\infty.$$

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Заданы числа $\sigma\in\mathbb{C}$ и $\theta\in\mathbb{R}$, причем $\sigma\neq0$, а число θ иррационально. Надо найти условия существования ненулевой функции $h\in H(\{|z|<r\}),\ r=|\sigma(q-1)|^{-1}$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{h(qz)-h(z)}{qz-z}=\sigma h(z), \tag{15}$$

где $q=e^{2\pi i\theta}$.

Покажем, что функция h не может принимать значение нуль в круге $\{|z|<r\}$.

Действительно, предположим, что $h(0)=0$. В таком случае для некоторого числа $m\in\mathbb{N}$ будет выполнено соотношение $h(z)=z^mh_1(z)$, где $h_1\in H(\{|z|<r\}),\ h_1(0)\neq0$.

Из равенства (15) получим:

$$\frac{q^mz^mh_1(qz)-z^mh_1(z)}{qz-z}=\sigma z^mh_1(z)$$

или

$$\frac{q^mh_1(qz)-z^mh_1(z)}{qz-z}=\sigma h_1(z).$$

Так как $q^m\neq1$, то функция слева имеет полюс в нуле, а справа нет.

Если же $h(z_0)=0,\ 0<|z_0|<r$, то легко видеть, что $h(q^lz_0)=0,\ l\in\mathbb{N}$. Множество $\left\{q^lz_0\right\}$ будет всюду плотно на окружности $\{|z|=|z_0|\}$ и функция h тождественно равна нулю, что противоречит предположению.

Итак, $h(z)=e^{F(z)}$, где $F\in H(\{|z|<r\}$, и

$$e^{F(qz)}-e^{F(z)}=\sigma(q-1)ze^{F(z)}$$

или

$$F(qz)-F(z)=\ln[\sigma(q-1)z+1]+2\pi il,\quad l\in\mathbb{Z}.$$

Сделав замену $z=e^{w+t}$, где $t=\ln r-1$, получим систему

$$\begin{cases}\widetilde{F}(w+2\pi i)-\widetilde{F}(w)=0,\\ \widetilde{F}(w+2\pi i\theta)-\widetilde{F}(w)=g_2(w),\end{cases}$$

где $\widetilde{F}(w)=F(e^{w+t}),\ g_2(w)=\ln\left[\sigma(q-1)e^{w+t}+1\right]+2\pi il,\ \operatorname{Re}w<1.$

Как показано в теореме 1, разрешимость этой системы эквивалентна соотношению (14), а функция $\widetilde{F}$ будет разлагаться в ряд экспонент с показателями $\{n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Обратная замена определяет функцию, удовлетворяющую уравнению (15).

Эти рассуждения дают другое решение одной из задач, рассматриваемых в статье [4].

Литература

1. *Леонтьев А Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
2. *Кривошеев А. С.* Регулярность роста системы функций и системы неоднородных уравнений свертки в выпуклых областях комплексной плоскости // Изв. РАН. Сер. мат.—2000.—Т. 64, № 5.—С. 69–132.
3. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби.—М.: Физматлит, 1961.—113 с.
4. *Oskolkov V. A.* On properties of certain special function // В сб.: Актуальные проблемы математического анализа.—Ростов–на–Дону, 2000.—С. 132–140.

Статья поступила 4 мая 2005 г.

Напалков Валентин Васильевич, член-корр. РАН, д. ф.-м. н.
г. Уфа, Институт математики с Вычислительным центром УНЦ УрО РАН

Мерзляков Сергей Георгиевич, д. ф.-м. н.
г. Уфа, Институт математики с Вычислительным центром УНЦ УрО РАН
E-mail: msg2000@mail.ru