*Владикавказский математический журнал*
*Июль–сентябрь, 2005, Том 7, Выпуск 3*

*УДК* **517.53**

# ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА С РЕГУЛЯРНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ[1]

**А. М. Гайсин, Д. И. Сергеева**

*Юрию Федоровичу Коробейнику посвящается*

Изучается поведение целых функций экспоненциального типа на вещественной оси, последовательности нулей которых имеют специальную плотность распределения.

## Введение

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ — семейство полуинтервалов вида $\omega = [a, b)$. Через $|\omega|$ будем обозначать длину $\omega$.

Всякая последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ порождает целочисленную считающую меру $\mu_\Lambda$:

$$\mu_\Lambda(\omega) = \sum_{\lambda_n \in \omega} 1, \ \omega \in \Omega.$$

Пусть $\mu_\Gamma$ — считающая мера, порожденная последовательностью $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$. Тогда включение $\Lambda \subset \Gamma$ означает, что $\mu_\Lambda(\omega) \leqslant \mu_\Gamma(\omega)$ для любого полуинтервала $\omega \in \Omega$. В этом случае говорят, что мера $\mu_\Gamma$ мажорирует меру $\mu_\Lambda$.

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty.$$

Тогда бесконечное произведение (произведение Вейерштрасса)

$$Q(z) = \prod_{\lambda_n \in \Lambda} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \tag{1}$$

равномерно сходится на каждом компакте комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и определяет целую функцию порядка $\rho \leqslant 2$ [1]. $Q$ — целая функция экспоненциального типа тогда и только тогда, когда последовательность $\Lambda$ имеет конечную верхнюю плотность

$$D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n}\,.$$



[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-1528.2003.1.

При этом тип функции $Q$ не превосходит $\pi D^*$, где $D^*$ — усредненная верхняя плотность последовательности $\Lambda$ [2]:

$$D^* = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{N(t)}{t}, \qquad N(t) = \int\limits_0^t \frac{n(x)}{x}dx, \qquad n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1.$$

Имеет место

**Теорема A** [1, гл. I, § 2, п. 7]. *Пусть последовательность $\Lambda$ имеет конечную плотность*

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}.$$

*Тогда для функции $Q$, заданной формулой* (1), *верны утверждения:*

**1)** *для $z = re^{i\theta}$ $(\theta \neq 0, \pi)$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|Q(re^{i\theta})|}{r} = \pi\sigma|\sin\theta|;$$

**2)** *имеются число $p > 0$ и последовательность $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $\frac{r_{n+1}}{r_n} \to 1$ при $n \to \infty$, такие, что при любом $\epsilon > 0$*

$$\ln|Q(re^{i\theta})| > [\pi\sigma|\sin\theta| - \epsilon]r$$

*для $r_n - p \leqslant r \leqslant r_n + p$, $n \geqslant N(\epsilon)$;*

**3)** *если дополнительно известно, что*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h > 0 \;\; (n \geqslant 1), \tag{2}$$

*то в качестве $r_n$ в* 2) *можно положить*

$$r_n = \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2} \;\; (n \geqslant 1);$$

**4)** *при условии* (2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right| = 0.$$

При дополнительных требованиях на распределение точек последовательности $\Lambda$ можно получить более точные оценки (как сверху, так и снизу) для функции $Q$ на вещественной оси. Такие оценки для функции

$$Q(z) = \frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

хорошо известны. Приведем еще два результата из [3].

**Теорема B** (Пэли — Винер, 1934). *Пусть $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, и*

$$|\lambda_n - n| \leqslant d < \infty. \tag{3}$$

*Тогда для функции*

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \;\; (z = x + iy)$$

*справедливы оценки*

1) $|xQ(x)| \leqslant \text{const}\,|x|^{4d}$;

2) *для* $|x-\lambda_n| \geqslant \epsilon > 0$ $(n \geqslant 1)$

$$|xQ(x)| \geqslant \text{const}\,|x|^{-4d} \ \ (|x| \geqslant 1).$$

**Теорема C** (Б. Я. Левин, 1949). *Если выполняется условие* (3), *то*

$$|Q(z)| \leqslant \text{const}\left(1+|z|^{4d}\right)e^{\pi|y|}.$$

*При условии* $\inf\limits_{n\neq j}|\lambda_n-\lambda_j| > 0$

$$|Q'(\lambda_j)| \geqslant \text{const}\,\lambda_j^{-4d} \quad (j \geqslant 1).$$

В статье обсуждается следующая более общая задача: при каких условиях на последовательность $\Lambda=\{\lambda_n\}$ существует целая функция $P$ экспоненциального типа такая, что $P(\lambda_n)=0$, $P^{'}(\lambda_n)\neq 0$, и имеющая достаточно правильное поведение на вещественной оси?

## § 1. Специальные плотности распределения последовательности $\Lambda$

Пусть $L$ — класс положительных, непрерывных и возрастающих на $[0,\infty)$ функций. Через $K$ обозначим подкласс функций $h$ из класса $L$ таких, что $h(0)=0$ и $h(t)=o(t)$ при $t\to\infty$, $\frac{h(t)}{t}\downarrow$ при $t\uparrow$. В частности, $h(2t)\leqslant 2h(t)$ $(t>0)$, $h(t)\leqslant h(1)t$ при $t\geqslant 1$.

Пусть $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n\uparrow\infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность. $K$-плотностью последовательности $\Lambda$ назовем величину

$$G(K)=\inf_{h\in K}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)}, \tag{4}$$

где $\omega(t)=[t,t+h(t))$ — полуинтервал, $\mu_\Lambda(\omega)$ — число точек из $\Lambda$, попавших в полуинтервал $\omega$.

Через $D(K)$ обозначим точную нижнюю грань тех чисел $a$ $(0\leqslant a<\infty)$, для каждого из которых существует мера $\mu_\Gamma$, мажорирующая $\mu_\Lambda$, такая, что для некоторой функции $h\in K$

$$|M(t)-at|\leqslant h(t) \qquad (0\leqslant t<\infty). \tag{5}$$

Здесь $\Lambda=\{\lambda_n\}$, $\quad\Gamma=\{\mu_n\}\quad(0<\lambda_n\uparrow\infty, 0<\mu_n\uparrow\infty)$, $\quad M(t)=\sum\limits_{\mu_n\leqslant t}1$.

**Лемма.** *Величины* $D(K)$ *и* $G(K)$ *совпадают:* $D(K)=G(K)$.

$\lhd$ Для любого $a>D(K)$ существует мера $\mu_\Gamma$, мажорирующая $\mu_\Lambda$, такая, что для некоторой функции $h\in K$ выполняется оценка (5). Положим $h^*(t)=Ah(t)$ $(0<A<\infty)$. Ясно, что $h^*\in K$. Учитывая (5), имеем

$$\mu_\Gamma([t,t+h^*(t)))=M(t+h^*(t))-M(t)\leqslant h(t+h^*(t))+h(t)+ah^*(t) \ \ (t\geqslant 0).$$

Так как $h\in K$, то $h(2t)\leqslant 2h(t)$ $(t>0)$. Так как $h^*(t)=o(t)$ при $t\to\infty$, то

$$\frac{\mu_\Gamma([t,t+h^*(t)))}{h^*(t)}\leqslant a+\frac{3h(t)}{h^*(t)}=a+\frac{3}{A},\ \ t\geqslant t_0.$$

Но $\mu_\Lambda(\omega) \leqslant \mu_\Gamma(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$. Следовательно, учитывая (4), получаем, что $G(K) \leqslant a$. Поскольку, $a > D(K)$ — любое, то $G(K) \leqslant D(K)$.

Убедимся, что $G(K) = D(K)$. Для любого $b > G(K)$ существует функция $h \in K$ такая, что при $t \geqslant t_0$

$$\mu_\Lambda(\omega(t)) \leqslant bh(t), \quad \omega(t) = [t, t + h(t)).$$

Положим $t_1 = t_0 + h(t_0), t_2 = t_1 + h(t_1), ..., t_n = t_{n-1} + h(t_{n-1})$ $(n \geqslant 1)$. Ясно, что

$$[t_0, \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \omega_i, \quad \omega_i = [t_i, t_{i+1}).$$

Таким образом,

$$\mu_\Lambda(\omega_i) \leqslant b|\omega_i|, \quad |\omega_i| = h_i = h(t_i). \tag{6}$$

Расширим последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ до последовательности $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(o < \mu_n \uparrow \infty)$ путем добавления в каждый полуинтервал $\omega_i$ точек $\nu_n$ так, чтобы

$1^0$. $|\mu_\Gamma(\omega_i) - b|\omega_i|| \leqslant 1$ $(i \geqslant 0)$;

$2^0$. для любого $n \geqslant 0$

$$\left| \mu_\Gamma \left( \bigcup_{i=0}^{n} \omega_i \right) - b \sum_{i=0}^{n} |\omega_i| \right| \leqslant 1.$$

Для этого поступаем следующим образом. Пусть $\alpha = a - [a]$ ($[a]$ — целая часть $a$). Ясно, что $0 \leqslant \alpha < 1$. Учитывая (6), в каждый полуинтервал $\omega_i$ добавим, если это необходимо, конечное число попарно различных точек $\{\nu_j^{(i)}\}_{j=1}^{k_i}$ так, чтобы выполнялись условия:

а) $\nu_j^{(i)} \notin \Lambda,\ j = 1, 2, ..., k_i,\ i \geqslant 0$;

б) $\nu_1^{(i)} < \nu_2^{(i)} < ... < \nu_{k_i}^{(i)},\ i \geqslant 0$;

в) $|\mu_\Lambda(\omega_i) + k_i - b|\omega_i|| \leqslant 1$.

Если $\mu_\Lambda(\omega_i) = b|\omega_i|$, считаем, что $k_i = 0$. Присоединяя к последовательности $\Lambda$ точки $\nu_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, ..., k_i, i \geqslant 0)$, получим расширенную последовательность $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$. Из построения видно, что

$$|\mu_\Gamma(\omega_i) - b|\omega_i|| \leqslant 1 \quad (i \geqslant 0).$$

Последовательность $\Gamma$ не обязательно удовлетворяет условию $2^0$. Поэтому уточним построение $\Gamma$.

Выберем точки $\nu_j^{(0)}$ $(j = 1, 2, ..., k_0)$, $\nu_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, ..., k_1)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\mu_\Gamma(\omega_0) = [b|\omega_0|], \qquad \mu_\Gamma(\omega_1) = [b|\omega_1|] + 1.$$

Тогда

$$\mu_\Gamma(\omega_0 \cup \omega_1) = b|\omega_0| + b|\omega_1| - \alpha_0 + \alpha_1,$$

где $\alpha_0 = \{b|\omega_0|\}$ $(0 \leqslant \alpha_0 < 1)$, $\alpha_1 = 1 - \{b|\omega_1|\}$ $(0 < \alpha_1 \leqslant 1)$ ($\{a\}$ — дробная часть $a$, т. е. $\{a\} = a - [a]$). Если положить $s_0 = -\alpha_0, s_1 = -\alpha_0 + \alpha_1$, то $-1 \leqslant s_0 \leqslant 0, -1 \leqslant s_1 \leqslant 1$. Теперь добьемся того, чтобы

$$\mu_\Gamma(\omega_2) = \begin{cases} [b|\omega_2|] + 1, & \text{если } -1 \leqslant s_1 \leqslant 0; \\ [b|\omega_2|], & \text{если } 0 < s_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\mu_\Gamma\left(\bigcup_{i=0}^{2}\omega_i\right) = b\sum_{i=0}^{2}|\omega_i| + s_2,$$

где $s_2 = s_1 + \alpha_2$, а

$$\alpha_2 = \begin{cases} 1 - \{b|\omega_2|\}, & \text{если} \quad -1 \leqslant s_1 \leqslant 0; \\ -\{b|\omega_2|\}, & \text{если} \quad 0 < s_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Видно, что $-1 \leqslant s_2 \leqslant 1$. Продолжая построение по индукции, добьемся того, чтобы

$$\mu_\Gamma(\omega_n) = \begin{cases} [b|\omega_n|] + 1, & \text{если} \quad -1 \leqslant s_{n-1} \leqslant 0; \\ [b|\omega_n|], & \text{если} \quad 0 < s_{n-1} \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\mu_\Gamma\left(\bigcup_{i=0}^{n}\omega_i\right) = b\sum_{i=0}^{n}|\omega_i| + s_n,$$

где $s_n = s_{n-1} + \alpha_n$, а

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 - \{b|\omega_n|\}, & \text{если} \quad -1 \leqslant s_{n-1} \leqslant 0; \\ -\{b|\omega_n|\}, & \text{если} \quad 0 < s_{n-1} \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\left|\mu_\Gamma(\bigcup_{i=0}^{n}\omega_i) - b\sum_{i=0}^{n}|\omega_i|\right| = |s_n| \leqslant 1.$$

Таким образом, последовательность $\Gamma$ обладает свойством $2^0$. Убедимся, что

$$|M(t) - bt| \leqslant H(t),\ H \in K. \tag{7}$$

Действительно, пусть $t \in \omega_n$, т. е. $t_n \leqslant t < t_{n+1}$, где $t_n = t_{n-1} + +h(t_{n-1})$ $(n \geqslant 1)$. Тогда

$$M(t) = M(t_0) + \mu_\Gamma\left(\bigcup_{i=0}^{n}\omega_i\right) + \mu_\Gamma([t_n, t)).$$

Следовательно, учитывая $2^0$, имеем

$$|M(t) - bt| \leqslant M(t_0) + \left|\mu_\Gamma\left(\bigcup_{i=0}^{n-1}\omega_i\right) - b\sum_{i=0}^{n}|\omega_i|\right| + b(t - t_n) + \mu_\Gamma([t_n, t))$$

$$\leqslant M(t_0) + 1 + bh(t_n) + \mu_\Gamma([t_n, t_{n+1})) \leqslant M(t_0) + 1 + (b+1)h(t) = H(t).$$

Очевидно, $H \in K$, и оценка (7) имеет место. Поскольку $b > G(K)$ любое, $G(K) \leqslant D(K)$, то, учитывая определение величины $D(K)$, заключаем, что неравенство $G(K) < D(K)$ невозможно. Следовательно, $G(K) = D(K)$.

Лемма 1 полностью доказана. $\triangleright$

## § 2. Применение

Пусть $L$ и $K$ классы функций, введенные выше,

$$S = \left\{ h \in K : \varlimsup_{x\to\infty} \frac{h(x)\ln h(x)}{x \ln \frac{x}{h(x)}} < \infty \right\}.$$

Так, например, классу $S$ принадлежат функции

$$h(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \frac{x}{\ln(x+e)}, \quad h(x) = \frac{x \ln\ln(x+e^e)}{\ln(x+e^e)}.$$

В качестве примера применения леммы приведем следующий результат.

**Теорема.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную $S$-плотность $G(S)$. Тогда для любого $\sigma > G(S)$ существует последовательность $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$, содержащая $\Lambda$ и имеющая плотность $\sigma$, такая, что целая функция экспоненциального типа $\pi\sigma$*

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right)$$

*обладает свойствами:*

1) *$Q(\lambda_n) = 0, Q^{'}(\lambda_n) \neq 0$ для любого $\lambda_n \in \Lambda$;*

2) *существует $H \in S$ такая, что:*

$$\ln|Q(x)| \leqslant AH(x)\ln^+ \frac{x}{H(x)} + B; \tag{8}$$

3) *если $\Lambda(x) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant x} 1$, и*

$$\Lambda(x+\rho) - \Lambda(x) \leqslant a\rho + b + \frac{\varphi(x)}{\ln^+\rho + 1} \quad (\rho \geqslant 0) \tag{9}$$

*($\varphi$ — любая неотрицательная неубывающая функция, определенная на луче $[0,\infty)$, $1 \leqslant \varphi(x) \leqslant cx\ln^+ x + d$), то существует последовательность $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $r_{n+1} - r_n = O(H(r_n))$ при $n \to \infty$, такая, что при $x = r_n$*

$$\ln|Q(x)| \geqslant -CH(x)\ln^+ \frac{x}{H(x)} - 2\varphi(x) - P; \tag{10}$$

4) *если*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^1 \frac{n(\lambda_n;t)}{t}\,dt < \infty,$$

*то при условии (9)*

$$\left| \ln\left|\frac{1}{Q^{'}(\lambda_n)}\right| - \int_0^1 \frac{n(\lambda_n;t)}{t}\,dt \right| \leqslant MH(\lambda_n)\ln^+ \frac{\lambda_n}{H(\lambda_n)} + 2\varphi(\lambda_n) + F\ln\lambda_n + L \quad (n \geqslant 1),$$

*где $n(\lambda_n;t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{x : |x-\lambda_n| \leqslant t\}$.*

*Здесь все постоянные положительны, конечны и от переменных $x$ и $n$ не зависят.*

◁ Доказательство теоремы основано на применении равенства $G(S) = D(S)$, вытекающего из леммы.

Оценки (8), (10) установлены в [4, 5]. Оценка (11) доказывается при помощи тех же рассуждений, примененных к функции

$$Q_n(\lambda_n) = \prod_{\mu_k \neq \lambda_n} \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\mu_k^2}\right). \ \triangleright$$

## Литература

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
2. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.—М.: ИЛ, 1955.—267 с.
3. *Redheffer R. M.* Completeness of Sets of Complex Exponentials // Advances in Math.—1977.—V. 24.—P. 1–62.
4. *Сергеева Д. И.* Оценка произведения Вейерштрасса на вещественной оси снизу // IV Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике, посвященная 95-летию БашГУ: Тезисы докладов. Ч. 1.—Уфа: Изд-во БашГУ, 2004.—С. 8.
5. *Сергеева Д. И.* Оценка произведения Вейерштрасса с регулярным распределением нулей на вещественной оси // Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике: Сборник статей. Том I. Математика.—Уфа: Изд-во БашГУ, 2004.—С. 193–206.

*Статья поступила 14 апреля 2005 г.*

Гайсин Ахтяр Магазович, д. ф.-м. н.
г. Уфа, Институт математики с Вычислительным центром УНЦ УрО РАН
E-mail: Gaisin@imat.rb.ru

Сергеева Дина Ильдаровна
г. Уфа, Институт математики с Вычислительным центром УНЦ УрО РАН
E-mail: SergeevaDI@yandex.ru