Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2005, Том 7, Выпуск 3

УДК **517.927**

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

А. И. Вагабов, З. А. Абдурахманов

Юрию Федоровичу Коробейнику
к его семидесятипятилетию

Рассматривается плоская квазилинейная смешанная задача для параболической системы с переменными коэффициентами в старшей части при общих условиях нелинейности. Строится резольвента старшей линейной части задачи с последующим сведением проблемы к нелинейной интегральной системе уравнений. Установлено существование локального обобщенного решения и указано условие его перехода в классическое.

В статье [1] был предложен метод решения смешанной задачи (1)–(3) для квазилинейного параболического уравнения. В данной работе разработана теория в случае плоских смешанных задач для систем такого типа с существенным использованием понятия обобщенного решения. В [1, 2] указана литература по рассматриваемому вопросу.

1. Рассматривается квазилинейная параболическая система

$$c(x)\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f\left(t, x, v, \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$U^1(v) \equiv \alpha^1\,\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^{10} v\Big|_{x=0} + \beta^1\,\frac{\partial v}{\partial x} + \beta^{10} v\Big|_{x=1} = 0,$$
$$U^2(v) \equiv \alpha^2 v(t,0) + \beta^2 v(t,1) = 0, \tag{2}$$

$$v(0,x) = \psi(x), \tag{3}$$

где $c(x)$, v, ψ, α^i, β^i, α^{10}, β^{10} — вещественные $(n\times n)$-матрицы, f — $(n\times n)$-матричная функция.

Предполагается, что выполнены условия:

1) $c(x) \in C^2[0,1]$.

2) Характеристические корни $\varphi_1^2(x), \ldots, \varphi_n^2(x)$ матрицы $c(x)$ различны при всех x, их вещественные части положительны, аргументы этих корней и аргументы их разностей не зависят от x. Отсюда следует, что либо $-\frac{\pi}{4} < \arg\varphi_i < \frac{\pi}{4}$, либо $-\frac{\pi}{4} < \arg(-\varphi_i) < \frac{\pi}{4}$, $i = 1, \ldots, n$.

3) $f(t,x,v,w)$ — непрерывно дифференцируемая функция в области

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(T):\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ \|v - \Phi(t,x)\| \leqslant Q\ \left\|w - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right\| \leqslant Q,$$

где $Q = \mathrm{const}$ и приняты обозначения $\|v(t,x)\| = \max_{x,t}|v(t,x)|$, $|v| = \max_{i,j}|v_{ij}|$, Φ — решение задачи (1)–(3) при $f \equiv 0$.

4) $\det\{\alpha^1\beta^2 D(0)\} + (-1)^{n+1}\det\{\alpha^2\beta^1 D(1)\} \neq 0$, где $D(x) = \mathrm{diag}\,(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))$.

5) $\psi(x) \in C^2[0,1]$, $\psi^{(i)}(x)|_{x=0,1} = 0$, $i = 0,1$.

2. Выполним построения в аналогии с [1]. Введем в рассмотрение вспомогательную краевую задачу с комплексным параметром λ:

$$l(y) \equiv y'' - \lambda^2 c(x) y = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

$$U^1(y) = 0, \quad U^2(y) = 0, \tag{5}$$

$y(x,\lambda)$ — $(n\times n)$-матрица.

Прямыми $\operatorname{Re}\lambda(\varphi_i - \varphi_j) = 0$, $i \neq j$, $\operatorname{Re}\lambda(\varphi_i + \varphi_j) = 0$ разобьем λ-плоскость на конечное число секторов S с вершиной в 0. В каждом из секторов S при некоторой нумерации φ-корней справедливы неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda\varphi_1(x) \leqslant \dots \leqslant \operatorname{Re}\lambda\varphi_n(x) \leqslant 0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda\varphi_{n+1}(x) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda\varphi_{2n}(x), \quad \lambda \in S, \tag{6}$$

$\varphi_{n+k} = -\varphi_{n-k+1}$ при $k \leqslant n$.

Известным образом, см. [3, 4], устанавливается

Теорема 1. *Для любого фиксированного сектора S существует фундаментальная система двух матричных решений уравнения (4), аналитических в секторе S при $|\lambda| \gg 1$ и имеющих в нем асимптотические представления:*

$$y^1(x,\lambda) = \left\{ m(x) + \frac{m^1(x)}{\lambda} + \frac{E(x,\lambda)}{\lambda^2} \right\} e^{\lambda\int\limits_0^x D(\zeta)d\zeta},$$

$$y^2(x,\lambda) = \left\{ m(x) + \frac{m^2(x)}{\lambda} + \frac{E(x,\lambda)}{\lambda^2} \right\} e^{-\lambda\int\limits_0^x D(\zeta)d\zeta}, \tag{7}$$

где $m(x)$ — $(n\times n)$-матрица, для которой

$$m^{-1}(x)c(x)m(x) = D^2(x), \quad m \in C^2[0,1], \tag{8}$$

E обозначает покомпонентно ограниченную матрицу при $\lambda \in S$, $\lambda \gg 1$.

Покомпонентная запись системы (7) имеет вид:

$$y_{ik}(x,\lambda) = \left\{ m_{ik}(x) + \frac{m^1_{ik}(x)}{\lambda} + \frac{E_{ik}(x,\lambda)}{\lambda^2} \right\} e^{-\lambda\int\limits_0^x \varphi_k(\zeta)d\zeta}, \tag{9}$$

$\lambda \in S$, $i = 1,\dots,n$, $k = 1,\dots,2n$, $m_{i,k+n} = m_{i,k}$ при $k \leqslant n$.

Теорема 2. *Матричная функция Грина $G(x,\xi,\lambda) = \{G_{ij}\}_1^n$ задачи (4)–(5) имеет представление: $G_{ij}(x,\xi,\lambda) = \frac{\Delta_{ij}(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$, где*

$$\Delta_{ij}(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} g_{ij}(x,\xi,\lambda) & y_{i1}(x,\lambda) & \dots & y_{i2n}(x,\lambda) \\ U_1(g_j(x,\xi,\lambda)_x & u_{1,1}(\lambda) & \dots & u_{1,2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{2n}(g_j(x,\xi,\lambda)_x & u_{2n,1}(\lambda) & \dots & u_{2n,2n}(\lambda) \end{vmatrix},$$

$$\Delta(\lambda) = \det\{u_{ij}(\lambda)\}_1^{2n}, \quad u_{ij}(\lambda) = U_i(y_j(x,\lambda)), \tag{10}$$

y_j — *j-й столбец выбранной фундаментальной матрицы решений* (9).

$$g_{ij}(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n} y_{ik}(x,\lambda)z_{kj}(\xi,\lambda) & \text{при } 0\leqslant\xi\leqslant x,\\ -\sum\limits_{k=n+1}^{2n} y_{ik}(x,\lambda)z_{kj}(\xi,\lambda) & \text{при } x\leqslant\xi\leqslant b,\end{cases}$$

$$z_{kj}(\xi,\lambda)=\frac{W_{j+n,k}(\xi,\lambda)}{W(\xi,\lambda)},\quad i,j=1,\ldots,n,$$

$$W(\xi,\lambda)=\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} & \cdots & y_{1,2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} & \cdots & y_{n,2n}\\ \frac{dy_{11}}{d\xi} & \cdots & \frac{dy_{1n}}{d\xi} & \cdots & \frac{dy_{1,2n}}{d\xi}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{dy_{n1}}{d\xi} & \cdots & \frac{dy_{nn}}{d\xi} & \cdots & \frac{dy_{n,2n}}{d\xi}\end{pmatrix}, \tag{11}$$

$W_{j+n,k}$ — алгебраическое дополнение элемента с индексами $j+n,k$ в определителе W.

Основываясь на формулах (9)–(11), получим теорему

Теорема 3. *В каждом секторе S при $|\lambda|\gg 1$ для элементов матрицы Грина справедливы асимптотические представления*

$$G_{ij}(x,\xi,\lambda)=g_{ij}(x,\xi,\lambda)+\sum_{k,l=1}^{2n}\frac{\varepsilon_{klij}(x,\xi,\lambda)}{\lambda}e^{\int\limits_{c_1}^{x}\varphi_k dt}\,e^{\lambda\int\limits_{c_2}^{\xi}\varphi_l dt}, \tag{12}$$

где $c_1,c_2=0$, если $k,l\leqslant n$; $c_1,c_2=1$, если $k,l>n$, $\varepsilon_{klij}(x,\xi,\lambda)$ — функции, ограниченные вне δ-окрестности нулей $\Delta(\lambda)$.

$$g_{ij}(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda}\left[\frac{m_{ik}(x)M_{j+n,k}(\xi)}{\det M(\xi)}\right]e^{\lambda\int\limits_{\xi}^{x}\varphi_k d\zeta} & \text{при } 0\leqslant\xi\leqslant x,\\ -\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\lambda}\left[\frac{m_{ik}(x)M_{j+n,k}(\xi)}{\det M(\xi)}\right]e^{\lambda\int\limits_{\xi}^{x}\varphi_k d\zeta} & \text{при } x\leqslant\xi\leqslant 1.\end{cases} \tag{13}$$

Вместо развернутых записей мы употребляем сокращенную запись: $[a]\equiv a+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $|\lambda|\gg 1$. $M_{j+n,k}$ — алгебраическое дополнение элемента с индексами $j+n,k$ в $\det\left(\begin{smallmatrix} m & m\\ mD & -mD\end{smallmatrix}\right)$. Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ имеет счетное множество нулей, состоящее из 2μ $(\mu\leqslant n)$ групп. Значения s-ой группы лежат в полосе, конечной ширины, содержащей луч d_s, который входит в прямую $\mathrm{Re}_\lambda\,\lambda\varphi_s=0$, причем все эти лучи расположены в секторах $\frac{\pi}{4}<\arg\lambda<3\frac{\pi}{4}$, $5\frac{\pi}{4}<\arg\lambda<7\frac{\pi}{4}$. Если из λ-плоскости выбросить внутренности малых кругов радиуса δ с центрами в нулях $\Delta(\lambda)$ (множество всех полюсов $G(x,\xi,\lambda)$ является подмножеством нулей $\Delta(\lambda)$), то в оставшейся части имеет место неравенство

$$|\Delta(\lambda)|\geqslant N_\delta|\lambda|^n\left|e^{-\lambda\int\limits_0^1(\varphi_1+\cdots+\varphi_n)d\zeta}\right|,\quad N_\delta>0.$$

3. Определим контур $L=L_1\cup L_2$, направленный снизу вверх, где $L_1=(|\lambda|=H)\cap\left(|\arg\lambda|\leqslant\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)$, $L_2=(|\lambda|\geqslant H)\cap\left(|\arg\lambda|=\pm\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\right)$, $H\gg 1$, $\varepsilon>0$ — малое число.

Опираясь на теорему 3 доказывается

Теорема 4. *Для любой непрерывной $(n \times n)$-матрицы $h(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, справедлива формула предельного интегрального представления*

$$h(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{\pi\sqrt{-1}} \int\limits_L \lambda e^{\varepsilon\lambda^2} d\lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)c(\xi)h(\xi)\, d\xi, \quad 0 < x < 1. \tag{14}$$

Сходимость в правой части равномерна по x на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (0,1)$.

Далее устанавливается

Лемма 1. *Задача* (1)–(3) *при* $f \equiv 0$ *и при условиях* 1), 2), 4), 5) *п. 1 имеет единственное бесконечно дифференцируемое по* t *при* $0 < t \leqslant T$, $0 < x < 1$, *классическое решение, представимое в виде:*

$$\Phi(t,x) = \frac{-1}{\pi i} \int\limits_L \lambda e^{\lambda^2 t} d\lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)c(\xi)\psi(\xi)\, d\xi.$$

Интегрируя обе части равенства $\frac{\partial v e^{-\lambda^2\tau}}{\partial \tau} = \frac{\partial v}{\partial \tau} e^{-\lambda^2\tau} - \lambda^2 v e^{-\lambda^2\tau}$, для решения v задачи (1)–(3), и применяя к обеим частям полученного равенства оператор (14) получим теорему

Теорема 5. *Всякое решение* $v(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *служит первой компонентой решения системы интегральных уравнений*

$$\begin{cases} v(t,x) = \Phi(t,x) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \lambda d\lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\, d\xi \int\limits_0^t f(t,\xi,v,w) e^{\lambda^2(t-\tau)}\, d\tau, \\ w(t,x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \lambda\, d\lambda \int\limits_0^1 G'_x(x,\xi,\lambda)\, d\xi \int\limits_0^t f(t,\xi,v,w) e^{\lambda^2(t-\tau)}\, d\tau, \end{cases} \tag{15}$$

где $\Phi(t,x)$ — *решение задачи* (1)–(3) *при* $f \equiv 0$, *рассмотренное в лемме 1.*

Определение. Компоненту $v(t,x)$ решения интегральной системы (15) назовем *обобщенным решением* задачи (1)–(3).

Теорема 6. *Задача* (1)–(3) *при условиях* 1)–5) *п. 1 имеет единственное обобщенное решение в области* $\mathcal{D}(T)$ *при достаточно малом* T.

$\lhd$ Согласно теореме 5 достаточно установить однозначную разрешимость в $\mathcal{D}(T)$ системы (15). Из формул (12), (13) следует, что интегральные операторы $A(v,w)$, $B(v,w)$ правых частей системы (15) имеют оценки

$$\max\left(\|A(v,w)\|, \|B(v,w)\|\right) \leqslant C \max_{\mathcal{D}} \|f\| \sqrt{t}. \tag{16}$$

Покажем, что оператор правой части системы (15) является оператором сжатия в пространстве $\mathcal{D}(T)$ при T малых. Но это приводит к оценке тех же выражений A, B с той лишь разницей, что в них вместо f поставлена разность

$$\Delta(v_1, w_1; v_2, w_2) \equiv f(\tau,\xi,v_1(\tau,\xi),w_1(\tau,\xi)) - f(\tau,\xi,v_2(\tau,\xi)),w_2(\tau,\xi)),$$

где v_1, v_2, w_1, w_2 — любые функции из $\mathcal{D}(T)$. По теореме о конечных приращениях [5, с. 249] имеет место оценка

$$\|\Delta(v_1, w_1; v_2, w_2)\| \leqslant M \max\left(|v_1 - v_2|, |w_1 - w_2|\right), \tag{17}$$

где $M = \max\left(\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|, \left\|\frac{\partial f}{\partial w}\right\|\right)$. Из оценок (16), (17) следует оценка

$$\max\left(\|A(v_1 - v_2, w_1 - w_2)\|, \|B(v_1 - v_2, w_1 - w_2)\|\right) \leqslant C \max\left(|v_1 - v_2|, |w_1 - w_2|\right)\sqrt{T},$$

показывающая, что интегральный оператор системы (15) является оператором сжатия в пространстве $\mathcal{D}(T)$, при достаточно малых T, чем доказывается теорема. ▷

В заключение рассмотрим частный случай задачи (1)–(3), когда правая часть системы (1) не зависит от $\frac{\partial v}{\partial x}$. Тогда система (15) сводится к одному интегральному, матричному уравнению

$$v(t,x) = \Phi(t,x) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \lambda d\lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\,d\xi \int\limits_0^t f(t,\xi,v)e^{\lambda^2(t-\tau)}\,d\tau, \tag{18}$$

и нетрудно установить, что решение v уравнения (18) служит классическим решением задачи (1)–(3). Для этого следует установить возможность введения операторов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ под знаки интегралов в (18). Прежде всего при взятии производной по x под знаком интеграла в (18) согласно формулам (12), (13) приходим к интегралам, сходящимся равномерно при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Взятие второй производной по x под знаком интеграла приведет к дополнительному множителю λ под знаком интегралов, но здесь уже можно воспользоваться интегрированием по частям по ξ, что приведет нас к цели. Таким образом, устанавливается

Теорема 7. *В случае, когда нелинейная часть f в уравнении* (1) *не зависит от* $\frac{\partial v}{\partial x}$ *обобщенное решение задачи* (1)–(3) *является классическим.*

Литература

1. *Вагабов А. И., Магомедова Е. С.* Интегральные уравнения, относящиеся к плоским нелинейным смешанным задачам для уравнения параболического типа // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—1999.—№ 3.—С. 16–21.
2. *Акрамов Т. А., Вишневский М. П.* Некоторые качественные свойства системы реакция — диффузия // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 1.—С. 3–19.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.—526 с.
4. *Tamarkin J.* Some general problems of ordinary linear differential equations and expansion of arbitrary function in series of fundamental functions // Math. Zs.—1923.—V. 27.—P. 1–54.
5. *Шварц Л.* Анализ.—М.: Мир, 1972.—811 с.

Статья поступила 5 мая 2005 г.

Вагабов Абдулвагаб Исмаилович, д. ф.-м. н.
г. Махачкала, Дагестанский государственный университет

Абдурахманов Заур Аливердиевич
г. Махачкала, Дагестанский государственный университет