Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2005, Том 7, Выпуск 3

УДК **517.5**

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ АДАМАРА И СГЛАЖИВАНИИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. Брайчев

Дорогому учителю посвящается

Приводятся узкие классы функций, в которых для произвольной целой функции можно найти представителей, дающих точные оценки снизу и сверху различных характеристик роста целой функции с возможностью вычисления таких характеристик по тейлоровским коэффициентам функции.

В 1892 году Ж. Адамар [1] ввел понятия порядка и типа целой функции и нашел формулы, определяющие введенные величины по коэффициентам ряда Тейлора целых функций. Некоторые целые функции при этом могли иметь при положительном порядке тип, равный нулю или бесконечности, а тип функции $f(z)$ при порядке ρ определялся формулой $\sigma_f := \varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}$, где $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| \leqslant r\}$. Начиная с Ж. Адамара, математиков интересовал вопрос о нахождении возможно более узких классов функций H таких, в которых для любой целой функции $f(z)$ нашлась бы $h(x) \in H$ с условием

$$\sigma_f := \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} \neq 0, \infty \qquad (*)$$

и с возможностью вычислить эту величину (называемую типом $f(z)$ по отношению к $h(r)$) по тейлоровским коэффициентам $f(z)$.

Эту задачу для подкласса целых функций конечного положительного порядка решил Ж. Валирон [2], введя понятие уточненного порядка. Накладывая на такие порядки дополнительные требования (такие как дифференцируемость достаточное число раз или бесконечная дифференцируемость и др.), классы уточненных порядков, применяемых для изучения сравнительного роста целых функций, постоянно сужались (см., например, [3, 4]). Многие авторы решали задачу коэффициентного описания роста целых функций нулевого или бесконечного порядков, определяя логарифмические, экспоненциальные, p, q — порядки и типы (и многие другие) и вводя соответствующие уточненные порядки.

Важность коэффициентной характеризации для различных пространств целых функций нашла убедительное подтверждение в работах Ю. Ф. Коробейника (см., например, [5, 6]) и его многочисленных учеников, а также последователей созданной им школы. Именно, координатный метод был Ю. Ф. Коробейником развит и применен к исследованию разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка в различных общих классах аналитических функций определенных им пяти типов.

Универсальной шкалы роста целых функций, конечно, не существует, но возможность иметь более узкий класс функций, с которым можно было бы сравнивать в том или ином смысле рост произвольной целой функции, имеет большое значение. Такие классы называются плотными классами функций сравнения роста во множестве всех целых функций $\grave{A}_\infty$.

Наиболее полное решение проблемы Адамара получено в последнее время В. А. Осколковым [7, 8], которым показано, что классы H_γ, состоящие из возрастающих на $\mathbb{R}_+$, дважды непрерывно дифференцируемых функций $\Phi(x)$ с $\Phi''(x) > 0$, удовлетворяющих условию

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)\Phi''(x)}{[\Phi'(x)]^2} \leqslant \gamma \tag{1}$$

с константой $\gamma \geqslant 1$ являются плотными классами функций сравнения роста, а классы H_γ с $\gamma < 1$ — таковыми не являются.

Условие $(*)$ дает точную асимптотическую оценку логарифма максимума модуля целой функции сверху. Но во многих вопросах анализа важное значение имеют и нижние оценки целых функций, поэтому мы расширяем задачу Адамара, дополняя ее нахождением возможно более узких классов функций H таких, что для любой целой функции $f(z)$ дополнительно к $(*)$ найдется $h_1(x) \in H$ с условием

$$\underline{\sigma}_f := \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h_1(r)} \neq 0, \infty \tag{$**$}$$

и с возможностью вычисления и этой величины по коэффициентам ряда Тейлора функции $f(z)$. Такие классы функций мы назовем *классами функций двустороннего сравнения роста* (верхнего и нижнего), или *двусторонне плотными* в указанном смысле во множестве всех целых функций $\grave{A}_\infty$.

Оценки $(*)$ и $(**)$ можно уточнять и находить такие классы функций, в которых для любой целой функции $f(z)$ нашлись бы функции $h(x)$ и $h_1(x)$ со следующими условиями

$$\varlimsup_{r\to\infty} (\ln M_f(r) - h(r)) = 0, \tag{$***$}$$

$$\varliminf_{r\to\infty} (\ln M_f(r) - h_1(r)) = 0. \tag{$****$}$$

Таким образом, под *обобщенной проблемой Адамара* мы понимаем отыскание возможно более узких классов функций, в которых для любой целой функции $f(z)$ нашлись бы функции, дающие точные асимптотические оценки $M_f(r)$ как снизу, так и сверху, причем с возможностью описания тейлоровских коэффициентов $f(z)$, удовлетворяющих таким оценкам.

Эта задача оказалась связанной с регуляризацией и двусторонней аппроксимацией выпуклых функций и последовательностей.

Приведем результат О. Кизельмана [9], который показал, что если $y = \varphi_1(x)$ — уравнение ломаной, звеньями которой являются опорные прямые к графику функции $\varphi(x) = \ln M_f(e^x)$ с угловыми коэффициентами, последовательно равными натуральным числам, то для всех $x \in \mathbb{R}_+$ выполняются неравенства

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_1(x) + C,$$

где C — абсолютная константа, $\ln 2 < C < \ln 3$.

Вначале мы приводим результаты о двусторонней аппроксимации выпуклых функций, каждый из которых может быть применен для решения обобщенной проблемы Адамара, а затем даем коэффициентные характеристики целых функций, необходимые для решения проблемы Адамара в различных формах.

Известно, что для трансцендентной, т. е. отличной от многочлена, целой функции $f(z)$ функция $\varphi(x) = \ln M_f(e^x)$ является выпуклой и удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty. \tag{2}$$

Вписывая и описывая в график выпуклой функции ломаные с достаточно мелкими звеньями, в [10] получен следующий результат, примыкающий к [9].

Теорема A. *Пусть $\varphi(x)$ — выпуклая функция на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию* (2). *Существуют кусочно-линейные выпуклые функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ такие, что для любого $x \in \mathbb{R}_+$ выполняются неравенства*

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_2(x)$$

со знаками равенства на некоторой последовательности $x_n \uparrow \infty$ и $\varphi(x) = \varphi_i(x) + o(1)$, $\varphi'(x) = \varphi_i'(x) + o(1)$, $x \to \infty$, $i = 1, 2$.

Под $\varphi'(x)$ в дальнейшем понимаем правую производную выпуклой функции $\varphi(x)$.

Выпуклая регуляризация функций и последовательностей играет важную роль также в теории квазианалитических классов функций, используется при рассмотрении весовых пространств функций и последовательностей, при этом на регуляризованные функции часто накладываются дополнительные условия, одним из которых является дифференцируемость достаточное число раз. Кроме того, нередко для решения экстремальных и других задач требуется, чтобы приближающие функции имели строго возрастающие производные, т. е. чтобы эти функции были строго выпуклыми, или имели положительные вторые производные.

Применяя определенные процессы сглаживания кусочно-линейных или кусочно-параболических мажорант и минорант выпуклых функций в [10] получен следующий результат:

Теорема B. *Пусть $\varphi(x)$ — выпуклая функция на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию* (2). *Существуют бесконечно дифференцируемые строго выпуклые функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ (т. е. $\psi_i''(x) > 0,\ i = 1, 2$) такие, что для любого $x \in \mathbb{R}_+$ выполняются неравенства*

$$\psi_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \psi_2(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \psi_i(x) + o(1),\ x \to \infty,\ i = 1, 2.$$

А если дополнительно выполняется условие

$$\varphi'(x) - \varphi'(x - 0) \to 0 \ \text{ при } x \to \infty, \tag{3}$$

то и $\varphi'(x) = \psi_i'(x) + o(1),\ x \to \infty,\ i = 1, 2$.

Дальнейшее сужение классов аппроксимирующих функций связано с наложением на такие функции дополнительных условий типа условия В. А. Осколкова (1).

Именно, обозначим через $\ln_k = \ln(\ln_{k-1})$ — k-ю итерацию логарифма и через $H_\gamma^{(k)}$, $\gamma > 0$, $k \in \mathbb{N}$ — класс бесконечно дифференцируемых, строго выпуклых на $\mathbb{R}_+$ функций, удовлетворяющих условию

$$\varlimsup_{x\to\infty} \left(\ln_k \Phi(x) \ldots \left(\ln\ln \Phi(x) \left(\ln \Phi(x) \left(\frac{\Phi(x)\Phi''(x)}{[\Phi'(x)]^2} - 1 \right) - 1 \right) - 1 \right) \ldots - 1 \right) \leqslant \gamma.$$

Очевидно, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеем $H_\gamma^k \subset H_\gamma$. Кроме того, $H_{\gamma_1}^{(k)} \subset H_{\gamma_2}^{(k)}$ для $\gamma_1 < \gamma_2$ и $H_\gamma^{(k)} \subset H_\gamma^{(\bar{k})}$ для $k > \bar{k}$.

Справедлив следующий результат (ср. [11]).

Теорема C. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Для любой выпуклой на $\mathbb{R}_+$ функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию (2), существуют функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ из класса $H_1^{(k)}$ такие, что для всех x справедливо*

$$\Phi_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \Phi_2(x),$$

причем для некоторых последовательностей $x_n \to \infty$ и $\bar{x}_n \to \infty$ выполняется $\Phi_1(\bar{x}_n) = \varphi(\bar{x}_n) + o(1),\ n \to \infty$ и $\Phi_2(x_n) = \varphi(x_n) + o(1),\ n \to \infty$.

В то же время, для любого $\gamma < 1$ найдется выпуклая функция $\varphi(x)$ со свойством (2) такая, что для всех $\Phi(x) \in H_\gamma^{(k)}$ будет выполняться $\varliminf\limits_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} = +\infty$.

Рассмотрим некоторые свойства функций из классов $H_\gamma^{(k)}$, которые будут нам полезны в дальнейшем. Мы сделаем это для более широкого класса функций.

Обозначим через $H^\bullet$ класс выпуклых дважды дифференцируемых на $\mathbb{R}_+$ функций $H(x)$, удовлетворяющих условиям (2) и

$$\sup_x \left\{ \frac{H(x)H''(x)}{[H'(x)]^2} \right\} \leqslant 2. \tag{4}$$

В силу условия (2) имеем $\lim\limits_{x\to\infty} H'(x) = \infty$, поэтому каждая функция из класса $H^\bullet$ является строго возрастающей положительной для достаточно больших значений аргумента. Кроме того, эти функции обладают следующими свойствами

Предложение 1. *Функции $H(x)$ из класса $H^\bullet$ удовлетворяют условиям:*

$$\text{Функция } \frac{1}{H(x)} \text{ является выпуклой для всех } x > x_0 \text{ при некотором } x_0 > 0, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xH'(x)}{H^2(x)} = 0. \tag{6}$$

$\lhd$ Условие (5) следует из (4) поскольку

$$\left(\frac{1}{H(x)}\right)'' = \frac{(H'(x))^2}{H^3(x)} \left(2 - \frac{H(x)H''(x)}{[H'(x)]^2}\right) \geqslant 0.$$

Условие (6) вытекает из условия (5):

$$\frac{H'(x)}{H^2(x)}\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{H(x)}\right)' \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) \leqslant \left(\frac{1}{H(\frac{x}{2})} - \frac{1}{H(x)}\right) \to 0. \quad \rhd$$

Предложение 2. *Функции $H(x)$ из класса $H^\bullet$ удовлетворяют условию*

$$H(x) \sim H\left(x - \frac{1}{\sqrt{H'(x)}}\right), \quad x \to \infty. \tag{7}$$

$\lhd$ Обозначив $c = \frac{1}{\sqrt{H'(x)}}$, по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем при некотором $\theta:\ x - c < \theta < x$

$$\ln H(x) - \ln H(x-c) = \frac{H'(x)}{H(x)}c + \frac{c^2}{2}\left[\frac{H'(\theta)}{H(\theta)}\right]^2 \left(\frac{H''(\theta)H(\theta)}{[H'(\theta)]^2} - 1\right).$$

Первое слагаемое правой части

$$\frac{H'(x)}{H(x)}c = \frac{H'(x)}{H(x)\sqrt{H'(x)}} = \sqrt{\frac{H'(x)}{H^2(x)}} \to 0$$

в силу (6).

Во втором слагаемом выражение в круглых скобках не превосходит единицы в силу (4). Оставшийся сомножитель имеет оценку

$$\frac{c^2}{2}\left[\frac{H'(\theta)}{H(\theta)}\right]^2 = \frac{H'(\theta)}{2H'(x)}\frac{H'(\theta)}{H^2(\theta)} \leqslant \frac{1}{2}\frac{H'(x-1)}{H^2(x-1)} \to 0.$$

Мы использовали возрастание производных функций $H(x)$ и $\frac{1}{H(x)}$ ввиду выпуклости последних (свойство (5)), а также то, что для достаточно больших x имеем $c = \frac{1}{\sqrt{H'(x)}} < 1$, и $\theta > x - 1$. $\rhd$

О равенстве некоторых характеристик роста целых функций

Обозначим тип и нижний тип целой функции $f(z)$ относительно $h(r)$, соответственно,

$$\sigma_{M_f} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} \quad \text{и} \quad \underline{\sigma}_{M_f} = \varliminf_{x\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)}.$$

Имея в виду решение обобщенной проблемы Адамара, нам необходимо вычислить эти характеристики по коэффициентам Тейлора функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$. Однако с коэффициентами непосредственно связан не максимум модуля целой функции, а максимальный член ее ряда Тейлора $\mu_f(r) =: \max\limits_n |f_n| r^n$.

Поэтому, определив величины $\sigma_{\mu_f} = \varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{h(r)}$ и $\underline{\sigma}_{\mu_f} = \varliminf\limits_{x\to\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{h(r)}$, имеет смысл найти условия, при соблюдении которых выполняются равенства

$$\sigma_{\mu_f} = \sigma_{M_f}, \quad \underline{\sigma}_{\mu_f} = \underline{\sigma}_{M_f}. \tag{8}$$

Мы покажем, что для функций $h(r)$ таких, что $h(e^x) \in H^\bullet$, равенства (8) имеют место.

Теорема 1. *Пусть функция $h(r)$ такова, что $h(e^x) \in H^\bullet$, тогда справедливы равенства* (8), *т. е.*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{h(r)} \quad \text{и} \quad \varliminf_{x\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} = \varliminf_{x\to\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{h(r)}.$$

$\lhd$ Нам понадобятся простые неравенства, первое из которых — следствие неравенств Коши. Для $k = k(r) < 1$ имеем

$$\mu_f(kr) \leqslant M_f(kr) \leqslant \sum_0^\infty |f_n| r^n k^n \leqslant \mu_f(r) \sum_0^\infty k^n = \mu_f(r)\frac{1}{1-k},$$

т. е.

$$\mu_f(kr) \leqslant M_f(kr) \leqslant \mu_f(r)\frac{1}{1-k}.$$

Учитывая, что $\ln x \leqslant x,\ x > 0$, получаем неравенства

$$\frac{\ln \mu_f(kr)}{h(kr)} \leqslant \frac{\ln M_f(kr)}{h(kr)} \leqslant \left(\frac{\ln \mu_f(r)}{h(r)} + \frac{1}{(1-k(r))h(r)}\right)\frac{h(r)}{h(kr)}.$$

Чтобы равенства (8) имели место, достаточно проверить, что при $r \to \infty$ выполняются условия

$$h(k(r)\cdot r) \sim h(r), \tag{9}$$

$$(1-k(r))h(r) \to \infty. \tag{10}$$

Полагая $r = e^x$, $k(r) = \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{H'(\ln r)}}\right\}$, с помощью предложения 2 получаем

$$h(r) = h(e^x) = H(x) \sim H\left(x - \frac{1}{\sqrt{H'(x)}}\right)$$

$$= h\left(\exp\left\{x - \frac{1}{\sqrt{H'(x)}}\right\}\right) = h(e^x k(e^x)) = h(rk(r)), \quad r \to \infty,$$

и условие (9) выполнено. Проверим выполнение (10):

$$(1-k(r))h(r) = (1-k(e^x))h(e^x) = \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{H'(x)}}\right\}\right)H(x) \sim$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{H'(x)}}H(x) = \sqrt{\frac{H^2(x)}{H'(x)}} \to \infty,\ x \to \infty.$$

Оба условия (9) и (10) выполнены, так что утверждение теоремы справедливо. $\rhd$

Замечание. В работе [11] показано, что утверждение теоремы имеет место, если $\ln h(r)$ выпукла вверх или вниз на $\mathbb{R}_+$, а функция $h(r)$ удовлетворяет условию (6) или соответственно несколько более сильному условию $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{rh'(r)}{h(r)h(\frac{r}{2})} = 0$.

Еще один способ выяснения роста целой функции состоит в том, что ее максимум модуля сравнивается с максимумом модуля «правильных» целых функций. В качестве таких «правильных» функций могут быть взяты функции сравнения.

Функция $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ называется *функцией сравнения*, если $A_n > 0$ для любого n и $\frac{A_{n+1}}{A_n} \downarrow 0$. Из последнего условия следует, что все функции сравнения являются целыми.

Весьма полезным является следующее свойство функций сравнения.

Теорема 2. *Для каждой функции сравнения* $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, $A_n = \exp\{-\widetilde{\Phi}(n)\}$, $\Phi(x) \in H^{\bullet}$, *выполняется соотношение*

$$\ln M_A(r) \sim \ln \mu_A(r) \sim \Phi(\ln r), \quad r \to \infty.$$

$\lhd$ С одной стороны,

$$\ln \mu_A(e^x) = \sup_{n=0,1,2,\ldots} \{xn - \widetilde{\Phi}(n)\} \leqslant \sup_{\zeta \geqslant 0}\{x\zeta - \widetilde{\Phi}(\zeta)\} = \Phi(x).$$

С другой стороны, если ζ_x такова, что $\sup\limits_{\zeta\geqslant 0}\{x\zeta-\widetilde{\Phi}(\zeta)\}=x\zeta_x-\widetilde{\Phi}(\zeta_x)$ и $[\zeta_x]$ — целая часть ζ_x, то

$$\ln\mu_A(e^x)=\sup_{n=0,1,2,\dots}\{xn-\widetilde{\Phi}(n)\}\geqslant x[\zeta_x]-\widetilde{\Phi}([\zeta_x])\geqslant x(\zeta_x-1)-\widetilde{\Phi}(\zeta_x)$$

$$=x\zeta_x-\widetilde{\Phi}(\zeta_x)-x=\sup_{\zeta\geqslant 0}\{x\zeta-\widetilde{\Phi}(\zeta)\}-x=\Phi(x)-x.$$

Таким образом, выполняются неравенства $\Phi(x)-x\leqslant\ln\mu_A(e^x)\leqslant\Phi(x)$, из которых, учитывая (2), получаем $\ln\mu_A(r)\sim\Phi(\ln r)$. Но в силу теоремы 1 также и $\ln M_A(r)\sim\Phi(\ln r)$. $\triangleright$

Тип и нижний тип целой функции $f(z)$ относительно $h(r)$ можно определить следующим образом:

$$\sigma_f=\inf\{\tau>0:\ M_f(r)<\exp\tau h(r),\ r>r_0(\tau)\},$$

соответственно,

$$\underline{\sigma}_f=\sup\{\mu>0:\ M_f(r)<\exp\mu h(r),\ r>r_0(\mu)\}.$$

Аналогично этому вводятся и следующие понятия.

Величина $\sigma_A=\sigma_A(f)=\inf\{\tau>0:\ M_f(r)\leqslant A(\tau\cdot r),\ r>r_0(\tau)\}$ называется *типом целой функции $f(z)$ относительно функции сравнения $A(z)$* или просто *A-типом $f(z)$*.

Величину $\underline{\sigma}_A=\underline{\sigma}_A(f)=\sup\{\tau>0:\ M_f(r)\geqslant A(\tau\cdot r),\ r>r_0(\tau)\}$ назовем *нижним типом целой функции $f(z)$ относительно функции сравнения $A(z)$*, или *нижним A-типом $f(z)$*.

Ю. А. Казьмин [13] показал, что для целой функции $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_nz^n$ имеет место формула $\sigma_A(f)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|f_n|/A_n}$.

Для определения σ_A и $\underline{\sigma}_A$ по коэффициентам целой функции нам, как и в теореме 1, понадобится заменить в определениях этих величин максимум модуля целой функции $M_f(r)$ на ее максимальный член $\mu_f(r)$.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — целая функция и $A(z)$ — функция сравнения. Тогда*

$$\sigma_A(f)=\inf\{\tau>0:\ \mu_f(r)\leqslant\mu_A(\tau\cdot r),\ r>r_1(\tau)\},$$

$$\underline{\sigma}_A(f)=\sup\{\tau>0:\ \mu_f(r)\geqslant\mu_A(\tau\cdot r),\ r>r_1'(\tau)\}.$$

$\triangleleft$ Если $f(z)$ — многочлен, то утверждение очевидно и $\sigma_A(f)=0$. Обозначим $\sigma=\inf\{\tau>0:\ \mu_f(r)\leqslant\mu_A(\tau\cdot r),\ r>r_1(\tau)\}$. Если $f(z)$ — трансцендентная целая функция, то для $k>1$ выполняется $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\mu_f(r)}{\mu_f(kr)}=0$. Поэтому для любых $\tau>\sigma_A(f)$ и $k_1>1$ имеем

$$\mu_f(r)\leqslant M_f(r)\leqslant A(\tau r)\leqslant\mu_A(k_1\tau\cdot r)\frac{k_1}{k_1-1}$$

$$=\mu_A(\tau\cdot kk_1r)\frac{k_1}{k_1-1}\frac{\mu_A(\tau\cdot k_1r)}{\mu_A(\tau\cdot kk_1r)}\leqslant\mu_A(\tau\cdot kk_1r)$$

при всех достаточно больших r.

Отсюда заключаем, что $\sigma\leqslant\tau\cdot kk_1$. Устремляя k и k_1 к единице, а τ — к $\sigma_A(f)$, получаем $\sigma\leqslant\sigma_A(f)$. С другой стороны, для любых $\tau>\sigma$ и $r>r_1(\tau)$ имеем

$$M_f(r)\leqslant\mu_f(kr)\leqslant\mu_A(\tau\cdot kr)\leqslant M_A(\tau\cdot kr)=A(\tau\cdot kr).$$

Отсюда по определению $\sigma_A(f)$ получаем $\sigma_A(f) \leqslant \tau k$, что в силу произвольности чисел $k > 1$ и $\tau > \sigma$ влечет неравенство $\sigma_A(f) \leqslant \sigma$. Вместе с предыдущим это приводит к первому утверждению теоремы. Второе доказывается аналогично. $\triangleright$

Вычисление типов целой функции по ее тейлоровским коэффициентам

Напомним, что сопряженной к функции $\varphi(x)$ по Юнгу (Фенхелю — Лежандру) называется функция $\widetilde{\varphi}(\zeta) := \sup\limits_x\{x\zeta - \varphi(x)\}$. Отметим, что для функций, удовлетворяющих условию (2), супремум достигается. Для выпуклых функций (и только для них) имеет место двойственная формула: $\varphi(x) := \sup\limits_\zeta\{x\zeta - \widetilde{\varphi}(\zeta)\}$. Поэтому для выпуклых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и им сопряженных по Юнгу функций $\widetilde{\varphi}_1(\zeta)$, $\widetilde{\varphi}_2(\zeta)$ условие $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ для всех $x \geqslant 0$ эквивалентно условию $\widetilde{\varphi}_1(\zeta) \geqslant \widetilde{\varphi}_2(\zeta)$ для всех $\zeta \geqslant 0$.

Обозначим сопряженную по Юнгу функцию к $\ln\mu_f(e^x)$ через $g(y)$, и пусть $F_n = \exp\{-g(n)\}$. Тогда $\ln\mu_f(e^x) = \sup\limits_n\{xn + \ln F_n\}$, т. е. функции $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ и $f(z)$ имеют одинаковые максимальные члены. Коэффициенты F_n называются регуляризацией Ньютона — Адамара $|f_n|$, а точки $(n; -\ln F_n)$ лежат на границе выпуклой оболочки точек $(n; -\ln|f_n|)$.

Коэффициентная характеризация типов целых функций опирается на теоремы 1, 3 и следующие три леммы.

Лемма 1. *Пусть функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию* (2). *Условие $\ln\mu_f(r) \leqslant \varphi(\ln r)$ асимптотически* (*т. е. для всех $r \geqslant r_0$*) *выполняется тогда и только тогда, когда асимптотически выполняется условие $\ln|f_n| \leqslant -\widetilde{\varphi}(n)$, или когда $\ln F_n \leqslant -\widetilde{\varphi}(n)$.*

$\triangleleft$ Будем предполагать для простоты, что неравенства выполняются для всех значений аргументов. Общий случай лишь незначительными деталями отличается от этого. Если $\ln\mu_f(r) \leqslant \varphi(\ln r)$, то

$$-\ln F_n = \sup_x\{nx - \ln\mu_f(e^x)\} \geqslant \sup_x\{nx - \varphi(x)\} = \widetilde{\varphi}(n).$$

Отсюда $\ln|f_n| \leqslant \ln F_n \leqslant -\widetilde{\varphi}(n)$.

Если же $\ln|f_n| \leqslant -\widetilde{\varphi}(n)$, то

$$\ln\mu_f(e^x) = \max_n\{xn + \ln|f_n|\} \leqslant \max_n\{xn - \widetilde{\varphi}(n)\} \leqslant \max_\xi\{x\zeta - \widetilde{\varphi}(\zeta)\} \leqslant \varphi(x). \quad \triangleright$$

Оценки снизу, как обычно, не столь просты.

Лемма 2. *Пусть функция $\varphi(\zeta)$ выпукла, возрастает и удовлетворяет условию* (2).
Если $\ln\mu_f(r) \geqslant \varphi(\ln r)$, то $\ln F_n \geqslant -\widetilde{\varphi}(n)$.
Если $\ln F_n \geqslant -\widetilde{\varphi}(n)$, то $\ln\mu_f(r) \geqslant \varphi(\ln r)(1 - o(1))$.

$\triangleleft$ $-\ln F_n = \sup\limits_x\{nx - \ln\mu(e^x)\} \leqslant \sup\limits_x\{nx - \varphi(x)\} = \widetilde{\varphi}(n)$ и первое утверждение доказано. Для доказательства второго заметим, что

$$\varphi(x) = \sup_\zeta\{x\zeta - \widetilde{\varphi}(\zeta)\} = \zeta_x x - \widetilde{\varphi}(\zeta_x).$$

Обозначив $m = [\zeta_x]$, с учетом того, что $m \leqslant \zeta_x < m + 1$ и $\varphi(m) \leqslant \varphi(\zeta_x)$, получаем

$$\ln\mu(e^x) = \max_n\{nx + \ln F_n\} \geqslant \max_n\{nx - \widetilde{\varphi}(n)\} \geqslant mx - \widetilde{\varphi}(m)$$

$$\geqslant (\zeta_x - 1)x - \widetilde{\varphi}(\zeta_x) = \varphi(x) - x = \varphi(x)\left(1 - \frac{x}{\varphi(x)}\right) = \varphi(x)(1 - o(1)). \quad \rhd$$

Замечание. Второе утверждение леммы 2 можно уточнить, если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет более сильному, чем (2) условию $\varphi''(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ $\left(\frac{\varphi(x)}{x^2} \to \infty\right)$. Именно, в этом случае справедливо утверждение:

Если $\ln F_n \geqslant -\widetilde{\varphi}(n)$, то $\ln \mu_f(r) \geqslant \varphi(\ln r) - o(1)$.

Следующий простой вспомогательный результат мы не нашли в литературе, и поэтому для полноты изложения и удобства ссылок приводим его.

Лемма 3. *Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ — целые функции и F_n и G_n — регуляризации Ньютона — Адамара последовательностей $|f_n|$ и $|g_n|$ соответственно. Справедливы следующие равенства*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|f_n|}{G_n} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{F_n}{G_n} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mu_f(r)}{\mu_g(r)}, \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{F_n}{|g_n|} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{F_n}{G_n} = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\mu_f(r)}{\mu_g(r)}.$$

$\lhd$ Обозначим $A = \varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{\mu_f(r)}{\mu_g(r)}$. Для любого $\varepsilon > 0$, $A' = A + \varepsilon$ и $r > r_0 = r_0(\varepsilon)$ имеем $\mu_f(r) \leqslant A'\mu_g(r)$. Теперь для $n > n_0 = n_f(r_0)$ получаем

$$|f_n| \leqslant F_n \leqslant \frac{\mu_f(r)}{r^n} \leqslant A' \frac{\mu_g(r)}{r^n}$$

и

$$|f_n| \leqslant F_n \leqslant A' \exp\{-\sup_{r>r_0} n \ln r - \ln \mu_g(r)\} = A' G_n,$$

а тогда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{F_n}{G_n} \leqslant A' = A + \varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получаем

$$B := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{|f_n|}{G_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{F_n}{G_n} \leqslant A.$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ и $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$ выполняется $|f_n| \leqslant (B + \varepsilon)G_n$. Выберем $r_0 = r_0(\varepsilon)$ настолько большим, чтобы при $r > r_0$ центральный индекс $n_f = n_f(r)$ превосходил n_0, т. е. $n_f > n_0$. Тогда для таких r имеем

$$\mu_f(r) = |f_{n_f}| r^{n_f} \leqslant (B + \varepsilon) G_{n_f} r^{n_f} \leqslant (B + \varepsilon)\mu_g(r)$$

и

$$A = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mu_f(r)}{\mu_g(r)} \leqslant B + \varepsilon.$$

Отсюда вытекает $A = \varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{\mu_f(r)}{\mu_g(r)} \leqslant B$, что вместе с предыдущим доказывает предложение. Второе утверждение леммы следует из уже доказанного рассмотрением обратных отношений. $\rhd$

Обозначим через $H_0(x)$ ассоциированную по Ньютону с $H(x)$ функцию: $H_0(x) = x - \frac{H(x)}{H'(x)}$. Теперь у нас есть все необходимое, чтобы доказать основные в этом пункте результаты.

Теорема 4. *Пусть функция $h(r)$ такова, что $h(e^x) = H(x) \in H^\bullet$, $\beta(t)$ — обратная функция к $H'(x)$, $H_0(x)$ — ассоциированная по Ньютону с $H(x)$ функция, а $\omega(t)$ — функция, обратная к $\exp\{H_0(\beta(x))\}$. Тогда справедливы формулы*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} = \sigma_{\mu_f} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\omega(|f_n|^{-\frac{1}{n}})} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\omega(F_n^{-\frac{1}{n}})},$$

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} = \underline{\sigma}_{\mu_f} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n}{\omega(F_n^{-\frac{1}{n}})}. \tag{11}$$

$\lhd$ Для всех $\sigma > \sigma_{\mu_f}$, и только для них, выполняются неравенства $\ln\mu_f(r) < \sigma h(r)$, $r > r_0(\sigma)$. Обозначив $H(x) = h(e^x)$, получим неравенства

$$\ln\mu_f(e^x) < \sigma H(x), \quad \sigma > \sigma_{\mu_f},\ x > x_0(\sigma). \tag{12}$$

По лемме 1 условие (12), в котором удобно считать $H(x) = H(x_0)$ для всех $x \leqslant x_0 = x_0(\sigma)$, эквивалентно условию $-\ln|f_n| \geqslant \Psi(n)$, или условию $-\ln F_n \geqslant \Psi(n)$, где $\Psi(y)$ является сопряженной по Юнгу к функции $\sigma H(x)$. Найдем эту функцию.

По определению $\Psi(y) = \sup\limits_x\{xy - \sigma H(x)\}$. А так как супремум достигается при $x = \beta\left(\frac{n}{\sigma}\right)$, то для $n > n_0 = \sigma H'(x_0)$ имеем

$$\Psi(n) = \beta\left(\frac{n}{\sigma}\right) n - \sigma H\left(\beta\left(\frac{n}{\sigma}\right)\right) = nH_0\left(\beta\left(\frac{n}{\sigma}\right)\right).$$

Таким образом, условия (12) эквивалентны условиям

$$F_n \leqslant \exp\left\{-nH_0\left(\beta\left(\frac{n}{\sigma}\right)\right)\right\}, \quad n > n_0,$$

или

$$|f_n| \leqslant \exp\left\{-nH_0\left(\beta\left(\frac{n}{\sigma}\right)\right)\right\}, \quad n > n_0,$$

которые легко преобразовать к виду $\omega(F_n^{-\frac{1}{n}}) \geqslant \frac{n}{\sigma}$, или к виду

$$\frac{n}{\omega(F_n^{-\frac{1}{n}})} \leqslant \sigma,\ \sigma > \sigma_{\mu_f}, \quad n > n_0(\sigma).$$

Таким образом, последнее условие эквивалентно условию (12), что доказывает первое утверждение теоремы. Аналогично, опираясь на лемму 2, проверяется и второе. $\rhd$

Теорема 5. *Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ — целая функция, F_n — регуляризация Ньютона — Адамара коэффициентов f_n и $A(z)$ — функция сравнения. Тогда справедливы формулы*

$$\sigma_A(f) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f_n|}{A_n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{F_n}{A_n}}, \quad \underline{\sigma}_A(f) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{F_n}{A_n}}.$$

$\lhd$ Утверждение очевидно для многочленов. Если $f(z)$ — трансцендентная целая функция, то для $\tau > \sigma_A(f)$ функция $A^\bullet(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n^\bullet z^n$, $A_n^\bullet = \tau^n A_n$ является функцией сравнения так как $\frac{A_{n+1}^\bullet}{A_n^\bullet} = \tau\frac{A_{n+1}}{A_n} \downarrow 0$ и $\mu_A(\tau\cdot r) = \mu_{A^\bullet}(r)$. Согласно лемме 3 имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|f_n|}{\tau^n A_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|f_n|}{A_n^\bullet} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{F_n}{A_n^\bullet} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mu_f(r)}{\mu_{A^\bullet}(r)} \leqslant 1.$$

Отсюда $t := \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|f_n|}{A_n}} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{F_n}{A_n}} \leqslant \tau$, что в силу произвольности $\tau > \sigma_A(f)$ дает $t \leqslant \sigma_A(f)$. Но для любых $\varepsilon > 0$ и $n > n(\varepsilon)$ выполняется $\sqrt[n]{\frac{F_n}{A_n}} \leqslant t_1 = t+\varepsilon$ или $F_n \leqslant t_1^n A_n$. Отсюда следует для достаточно больших r неравенство $\mu_f(r) \leqslant \mu_A(t_1 r)$, которое означает, что $t+\varepsilon > \sigma_A(f)$. Устремляя ε к нулю, получаем $t \geqslant \sigma_A(f)$. Сопоставив с ранее полученным неравенством, получаем $t = \sigma_A(f)$.

Для доказательства второго утверждения положим $s = \varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{F_n}{A_n}}$. Если n достаточно велико, то имеем последовательно $\sqrt[n]{\frac{F_n}{A_n}} > s_1 = \max\{0; s-\varepsilon\}$, $F_n > s_1^n A_n$ и, значит, $\mu_f(r) \geqslant \mu_A(s_1 r)$ для достаточно больших r, т. е. $s_1 \leqslant \underline{\sigma}_A(f)$. Это при $\varepsilon \downarrow 0$ дает $s \leqslant \underline{\sigma}_A(f)$. Значит, $s = 0$, если $\underline{\sigma}_A(f) = 0$. Если $\underline{\sigma}_A(f) > 0$, то взяв произвольно положительное $\tau < \underline{\sigma}_A(f)$, получаем $\mu_f(r) \geqslant \mu_A(\tau\cdot r)$, $r > r_1'(\tau)$. По лемме 3 получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{F_n}{\tau^n A_n} = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\mu_f(r)}{\mu_A(\tau\cdot r)} \geqslant 1 \quad\text{и}\quad s = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{F_n}{A_n}} \geqslant \tau,$$

что дает $s \geqslant \underline{\sigma}_A(f)$ и, окончательно, $s = \underline{\sigma}_A(f)$. $\rhd$

Различные формы решения проблемы Адамара

Теоремы 4 и 5 дают вместе с теоремой C некоторое решение обобщенной проблемы Адамара, предлагая любой класс $H_1^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, в качестве плотных в $\grave{A}_\infty$ классов функций двустороннего сравнения роста.

Теорема 6. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Для любой целой функции $f(z)$ существуют функции $h_i(r)$, $h_i(e^x) \in H_1^{(m)}$, $i = 1, 2$, такие, что для всех $r > 0$ выполняются неравенства*

$$h_1(r) \leqslant \ln M_f(r) \leqslant h_2(r),$$

причем для некоторых последовательностей $r_k^{(i)} \to \infty$, $k \to \infty$, $i = 1, 2$, справедливы равенства

$$\ln M_f(r_k^i) = h_i(r_k^i) + o(1),\ k \to \infty,\ i = 1, 2.$$

Кроме того, выполняются равенства

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{h(r)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\omega_2\left(|f_n|^{-\frac{1}{n}}\right)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\omega_2\left(F_n^{-\frac{1}{n}}\right)} = 1,$$

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{h(r)} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\omega_1\left(F_n^{-\frac{1}{n}}\right)} = 1.$$

Здесь $\omega_i(t)$ связаны с $h_i(r)$ как в теореме 4.

С другой стороны, для любого $\gamma \in [0, 1)$ найдется целая функция $f(z)$ такая, что $\varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} = \infty$ при любой функции $h(r)$, $h(e^x) \in H_\gamma^{(k)}$.

Последнее утверждение теоремы означает, что при каждом $m \in \mathbb{N}$ в рамках классов $H_\gamma^{(m)}$, $\gamma > 0$, дальнейшее сужение $H_1^{(m)}$ невозможно.

Однако, опираясь на теорему 2, классы $H_1^{(m)}$ можно сузить, рассматривая совокупности функций $\big\{ \ln A(r),\ A(r) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\widetilde{\Phi}(n)} r^n,\ \Phi(x) \in H_1^{(m)} \big\}$, $m \in \mathbb{N}$.

В теореме 6 формулы для вычисления типов целой функции получены в общей ситуации. В каждом конкретном случае они малопригодны, и их основное значение состоит в том, что они доказывают возможность решения проблемы Адамара.

В работе В. А. Осколкова [8] для функций одного переменного и в работе Ю. Ф. Коробейника [14] для функций многих переменных при выполнении некоторых дополнительных условий получены общие формулы вычисления типа целой функции по ее коэффициентам Тейлора, являющиеся конкретизацией формул теоремы 6. Аналогичные формулы с нижними пределами и с заменой коэффициентов $|f_n|$ на их регуляризации F_n справедливы и для вычисления нижнего типа целой функции. Отметим также, что в этих работах фактически доказано равенство $\sigma_{\mu_f} = \sigma_{M_f}$ при условии, что функция $\alpha(x) = xh'(x)$ удовлетворяет условию (6).

Класс всех функций сравнения обозначим U.

Класс U является плотным классом во множестве всех целых функций в том смысле, что для всякой целой функции $f(z)$ найдется такая функция $A(z) \in U$, что $\sigma_A(f) \neq 0, \infty$ (см. [13]).

И здесь опять возникает проблема Адамара нахождения возможно более узких классов функций сравнения, плотных в этом смысле. Так в работе [15] А. Ю. Попов показал, что плотной в классе целых функций, имеющих бесконечный тип при логарифмическом порядке 2, является совокупность всех функций сравнения с дополнительным условием $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n A_{n+2}}{A_{n+1}^2} = 1$.

Обозначим $U_\gamma^{(k)} = \{A(z) : \ A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\widetilde{\Phi}(n)} z^n, \ \Phi(x) \in H_\gamma^{(k)}\}$. Поскольку здесь $A_n = e^{-\widetilde{\Phi}(n)}$, то $\frac{A_{n+1}}{A_n} = e^{\widetilde{\Phi}(n)-\widetilde{\Phi}(n+1)} \downarrow 0$, и каждый класс $U_\gamma^{(k)}$, $k \geqslant 1$, $\gamma > 0$, состоит из функций сравнения. Очевидно, при любом $k \geqslant 1$, $\gamma > 0$ и $U_\gamma^{(k+1)} \subset U_\gamma^{(k)}$.

Следующие результаты говорят о том, что при любом $k \geqslant 1$ в качестве плотного во множестве всех целых функций класса функций сравнения как сверху, так и снизу, может быть взят любой из классов $U_1^{(k)}$. В то же время классы $U_\gamma^{(k)}$ с $\gamma \in (0;1)$ при любом $k \geqslant 1$ не могут служить такими классами функций сравнения, т. е. дальнейшее сужение в рамках $U_\gamma^{(k)}$ при любом $k \geqslant 1$ уже невозможно.

Теорема 7. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Для всякой целой трансцендентной функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ найдутся функции $\Phi_1(x) \in H_1^{(k)}$ и $\Phi_2(x) \in H_1^{(k)}$ такие, что*

$$\varlimsup_{x\to\infty} \{\ln \mu_f(e^x) - \Phi_1(x)\} = 0 \ \text{ и } \ \varliminf_{x\to\infty} \{\ln \mu_f(e^x) - \Phi_2(x)\} = 0,$$

причем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \{\ln |f_n| + \widetilde{\Phi}_1(n)\} = \varlimsup_{n\to\infty} \{\ln F_n + \widetilde{\Phi}_1(n)\} = 0 \ \text{ и } \ \varliminf_{n\to\infty} \{\ln F_n + \widetilde{\Phi}_2(n)\} \geqslant 0.$$

Здесь опять F_n — регуляризация Ньютона — Адамара $|f_n|$.

С другой стороны, для всякого $\gamma \in (0;1)$ найдется целая функция $f(z)$ такая, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} \{\ln F_n + \widetilde{\Phi}(n)\} = \infty$ при всех $\Phi(x) \in H_\gamma^{(k)}$.

$\lhd$ По теореме C для функции $\varphi(x) = \ln \mu_f(e^x)$ существуют функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ из класса $H_1^{(k)}$ такие, что для всех

$$\Phi_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \Phi_2(x),$$

причем для некоторых последовательностей $x_n \to \infty$ и $\bar{x}_n \to \infty$ выполняются соотношения $\Phi_1(\bar{x}_n) = \varphi(\bar{x}_n) + o(1),\ n \to \infty$ и $\Phi_2(x_n) = \varphi(x_n) + o(1),\ n \to \infty$.

В то же время, для любого $\gamma < 1$, найдется выпуклая функция $\varphi(x)$ со свойством (2) такая, что для всех $\Phi(x) \in H_\gamma^{(k)}$ будет выполняться $\varliminf\limits_{x\to\infty} [\varphi(x) - \Phi(x)] = +\infty$.

Рассмотрим функцию $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, $A_n = e^{-\widetilde{\Phi}_2(n)}$. Для $n = 0, 1, 2, \dots$ выполняется $\ln|f_n|e^{nx} \leqslant \ln\mu_f(e^x) \leqslant \Phi_2(x)$ и $\ln|f_n| \leqslant \Phi_2(x) - nx$, а тогда

$$\ln|f_n| \leqslant \ln F_n \leqslant -\sup_x\{nx - \Phi_2(x)\} = -\widetilde{\Phi}_2(n),$$

т. е. $|f_n| \leqslant A_n$. Кроме того,

$$\ln\mu_A(e^x) = \max_{n\geqslant 0}\{nx - \widetilde{\Phi}_2(n)\} \leqslant \sup_{\zeta\geqslant 0}\{\zeta x - \widetilde{\Phi}_2(\zeta)\} = \Phi_2(x).$$

Обозначим $q = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{|f_n|}{A_n}$, $q \leqslant 1$. Если бы $q < 1$, то для $q_1 \in (q; 1)$ и достаточно больших r в силу леммы 3 имели бы $\mu_f(r) \leqslant q_1\mu_A(r)$, а тогда

$$\Phi_2(x) + o(1) = \ln\mu_f(e^x) \leqslant \ln q_1\mu_A(e^x) \leqslant \ln q_1 + \Phi_2(x), \quad x = x_n \to \infty.$$

Противоречие указывает на то, что $q = 1$. Следовательно, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{F_n}{A_n} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{|f_n|}{A_n} = 1$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty}[\ln|f_n| + \widetilde{\Phi}_2(n)] = \varlimsup\limits_{n\to\infty}[\ln F_n + \widetilde{\Phi}_2(n)] = 0$.

Рассмотрим теперь функцию $B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n z^n,\ \ B_n = e^{-\widetilde{\Phi}_1(n)}$. Поскольку $\ln\mu_f(e^x) = \widetilde{G}(x)$, где $y = G(\zeta)$ — уравнение ломаной Ньютона — Адамара функции $f(z)$, то условие $\Phi_1(x) \leqslant \ln\mu_f(e^x) = \widetilde{G}(x)$ эквивалентно условию $G(\zeta) \leqslant \widetilde{\Phi}_1(\zeta)$. Тогда $\ln F_n = -G(n) \geqslant -\widetilde{\Phi}_1(n)$, т. е. $F_n \geqslant B_n$ и $\ln F_n + \widetilde{\Phi}_1(n) \geqslant 0$. $\rhd$

Теорема 8. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Для всякой целой трансцендентной функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ найдутся функции сравнения $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in U_1^{(k)}$, $B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n z^n \in U_1^{(k)}$ такие, что $\sigma_A(f) = 1$ и $\underline{\sigma}_B(f) \geqslant 1$, причем*

$$\sigma_A(f) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|f_n|}{A_n}} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{F_n}{A_n}} \ \ \text{и} \ \ \underline{\sigma}_B(f) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{F_n}{B_n}},$$

где F_n — регуляризация Ньютона — Адамара $|f_n|$.

В то же время, для любого $\gamma \in (0; 1)$ найдется целая функция $f(z)$ такая, что $\underline{\sigma}_A(f) = \infty$ при всех $A(z) \in U_\gamma^{(k)}$.

$\lhd$ На самом деле, функции, построенные при доказательстве теоремы 7, пригодны и для доказательства теоремы 8. Это ясно для функции $A(z)$, поскольку

$$M_f(r) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| r^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n = A(r).$$

И если бы для некоторых $\tau < 1$ и r_0 при всех $r > r_0$ выполнялось $M_f(r) \leqslant A(\tau \cdot r)$, то по лемме 1 предыдущего пункта имели бы для всех достаточно больших r и некоторого $\tau_1 \in (\tau; 1)$ оценку $\mu_f(r) \leqslant \mu_A(\tau_1 \cdot r) \leqslant q_1\mu_A(r)$ с произвольно малым положительным q_1. Но это, как мы видели, невозможно. Следовательно, $\sigma_A(f) = 1$.

По доказанной теореме 2 $F_n \geqslant B_n$, а тогда $\underline{\sigma}_B(f) = \varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{F_n}{B_n}} \geqslant 1$. $\rhd$

Классы $H_1^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ пригодны и для более точной, чем в теореме 6 классификации роста целой функции в смысле (∗∗∗) и (∗∗∗∗).

Теорема 9. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Для любой целой трансцендентной функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ существуют функции $\Phi_i(x) \in H_1^{(k)}$, $i = 1, 2$, такие, что выполняются равенства*

$$\varlimsup_{x\to\infty}(\ln M_f(e^x) - \Phi_2(x)) = 0, \quad \varliminf_{x\to\infty}(\ln M_f(e^x) - \Phi_1(x)) = 0,$$

а для коэффициентов функции выполняются соотношения

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|f_n| + \widetilde{\Phi}_2(n)}{n} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln F_n + \widetilde{\Phi}_2(n)}{n} = 0; \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln F_n + \widetilde{\Phi}_2(n)}{n} \geqslant 0.$$

$\lhd$ В самом деле, существование таких $\Phi_i(x) \in H_1^{(k)}$, $i = 1, 2$, гарантирует теорема C. Построим функции $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\widetilde{\Phi}_2(n)} z^n$, $B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\widetilde{\Phi}_1(n)} z^n$. Как и в теореме 8, показываем, что $\sigma_A(f) = 1$ и $\underline{\sigma}_B(f) \geqslant 1$. А это после логарифмирования дает требуемые формулы. $\rhd$

Замечание. Если дополнительно функция $B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n z^n$, $B_n = e^{-\widetilde{\Phi}_1(n)}$ такова, что $x = o(\Phi_1'(x))$, $x \to \infty$ (например, $\Phi_1''(x) \to \infty$, что влечет $\frac{B_n B_{n+2}}{B_{n+1}^2} \to 1$), то в теореме 8 можно утверждать, что $\underline{\sigma}_B(f) = 1$, и, соответственно, в теореме 9 — что $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\ln F_n + \widetilde{\Phi}_1(n)}{n} = 0$.

В самом деле, если бы $\underline{\sigma}_B(f) > 1$, то для некоторого $\tau > 1$ по лемме 1 имели бы асимптотически $\mu_f(r) \geqslant \mu_B(\tau \cdot r)$, что влечет

$$\Phi_1(x) + o(1) = \ln \mu_f(e^x) \geqslant \mu_B(e^{x+\ln\tau}) \geqslant \Phi_1(x + \ln\tau) - (x + \ln\tau), \quad x = \bar{x}_n \to \infty.$$

А тогда имели бы

$$o(1) \geqslant \Phi_1(x + \ln\tau) - \Phi_1(x) - (x + \ln\tau) \geqslant \Phi_1'(x)\ln\tau - (x + \ln\tau)\ (x = \bar{x}_n \to \infty)$$

или

$$o(1) \geqslant \left(\frac{\Phi_1'(x)}{x}\ln\tau - 1\right)x - \ln\tau \to \infty, \quad \text{если } x = \bar{x}_n \to \infty,$$

что невозможно. Противоречие доказывает требуемое равенство $\underline{\sigma}_B(f) = 1$.

Применяя методы работы [14], можно перенести полученные результаты и на функции многих переменных.

Литература

1. *Hadamard J.* Essai d'étude des fonctions données par leur dévéloppement de Taylor // J. Math. Pure et Appl.—1892.—V. 8.—P. 154–186.
2. *Valiron G.* Lecture on the General Theory of Integral Functions. Privat Toulouse, 1923.
3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: ГИТТЛ, 1956.
4. *Таров В. А.* Гладко меняющиеся функции и совершенные уточненные порядки // Мат. заметки.—2004.—Т. 76, вып. 2.—С. 258–264.

5. *Коробейник Ю. Ф.* Аналитические решения операторных уравнений бесконечного порядка: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, Ростовский гос. ун-т, 1965.
6. *Коробейник Ю. Ф.* Нормально-разрешимые операторы и дифференциальные уравнения бесконечного порядка // Литовский мат. сб.—1971.—Т. XI, № 3.—С. 569–596.
7. *Осколков В. А.* Современные методы теории функций и смежные проблемы // В сб.: ВЗМШ, тезисы докладов.—Воронеж, 1997.—С. 126.
8. *Осколков В. А.* О некоторых вопросах теории целых функций // Мат. сб.—1993.—Т. 184, № 1.—С. 129–148.
9. *Kiselman Ch. O.* Croissance des fonctions plurisousharmoniques en dimension infinie // Ann. Inst. Fourier, Grenoble.—1984.—V. 34, № 1.—P. 155–183.
10. *Брайчев Г. Г.* О сглаживании выпуклых функций // Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона.—Киров, 2004.—Вып. 6.—С. 38–47.
11. *Брайчев Г. Г.* Несколько простых замечаний о равенстве характеристик роста целых функций // В сб.: Актуальные проблемы математики, физики, информатики и методики их преподавания. Юбилейный сборник к 130-летию МПГУ.—М.: МПГУ, 2003.—С. 49–53.
12. *Брайчев Г. Г.* О сглаживании выпуклых функций. Обобщенная проблема Адамара // В сб.: Актуальные проблемы математики, информатики, физики и математического образования. Юбилейный сборник к 70-летию кафедры математического анализа МПГУ.—М.: МПГУ, 2004.—С. 147–156.
13. *Казьмин Ю. А.* Методы интерполяции аналитических функций и их приложения: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1972.
14. *Коробейник Ю. Ф.* О связи между максимумом модуля и тейлоровскими коэффициентами целых функций многих комплексных переменных // Мат. заметки.—1997.—Т. 62, вып. 2.—С. 238–258.
15. *Попов А. Ю.* Границы сходимости и единственности интерполяционных задач Абеля — Гончарова // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 2.—С. 97–128.

Статья поступила 15 мая 2005 г.

Брайчев Георгий Генрихович, к. ф.-м. н.
г. Москва, Московский педагогический государственный университет
E-mail: `braichev@mail.ru`