Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2005, Том 7, Выпуск 3

УДК **517.5+517.9**

О ПРОБЛЕМЕ БРАННАНА ДЛЯ ДОСТАТОЧНЫХ МНОЖЕСТВ

А. В. Абанин

Семидесятипятилетию профессора
Ю. Ф. Коробейника посвящается

Дается отрицательный ответ на гипотезу Д. А. Браннана о взаимосвязи между достаточными и лиувиллевскими множествами.

Введение

Пусть $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — неубывающая функция, для которой $\ln r = O(h(r))$ при $r \to \infty$ и $H(x) := h(\exp x)$ выпукла на $\mathbb{R}$. Символом $\mathcal{V}$ обозначим совокупность всех таких функций h. Определим множества $E(h)$ и $K(h)$ следующим образом:

$E(h)$ — векторное пространство всех целых в $\mathbb{C}$ функций f, удовлетворяющих при некотором $A = A(f) > 0$ условию: $|f(z)| = O\big(\exp(A\,h(|z|))\big)$ при $|z| \to \infty$;

$K(h)$ — класс всех непрерывных неотрицательных на $\mathbb{C}$ функций $k(z)$, для которых $\exp\big(A\,h(|z|)\big) = O(k(z))$ при $|z| \to \infty$ и всех $A > 0$.

Заметим, что $E(h)$ — алгебра относительно операций поточечного сложения и умножения функций. Если $h(r) = r^\rho$, где $\rho > 0$, то $E(h)$ — пространство $[\rho, \infty)$ всех целых функций, имеющих при порядке ρ конечный тип.

Для произвольного подмножества S комплексной плоскости положим

$$\|f\|_{k,S} := \sup_{z \in S} \frac{|f(z)|}{k(z)}, \qquad f \in E(h),\ k \in K(h).$$

S называется *достаточным множеством* для $E(h)$, если семейства полунорм $\{\|\cdot\|_{k,\mathbb{C}} : k \in K(h)\}$ и $\{\|\cdot\|_{k,S} : k \in K(h)\}$ задают одну и ту же локально выпуклую топологию на $E(h)$ (см. [**?**]).

Рассмотрим два следующих утверждения:

(i) S — достаточное множество для $E(h)$;

(ii) любая ограниченная на S функция ограничена во всей плоскости и, значит, является постоянной.

Д. М. Шнайдер [**?**, теорема 2.4] доказал, что для любой алгебры целых функций из (i) следует (ii). Другими словами, всякое достаточное для $E(h)$ множество является в смысле определения из [**?**] $E(h)$-максимальным. В связи с этим отметим, что в [**?**] и [**?**] Ю. Ф. Коробейником был получен ряд тонких результатов о максимальности γ-достаточных множеств. Основной результат настоящей работы, теорема 2, показывает, что

(ii) влечет (i) в том и только в том случае, когда $E(h)$ совпадает с алгеброй всех полиномов. Отсюда, в частности, следует отрицательный ответ на гипотезу Д. А. Браннана (см. [**?**, Problem 2.4 (i)]), который предположил, что для алгебры $[\rho, \infty)$ утверждения (i) и (ii) эквивалентны.

Критерий достаточности

В этом параграфе приводится характеризация достаточных для $E(h)$ множеств, на которой базируется доказательство основного результата работы.

Пусть, как и выше, S — подмножество комплексной плоскости. Для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$E_{n,S}(h) := \left\{ f \in E(h) : \, |f|_{n,S} := \sup_{z \in S} \frac{|f(z)|}{\exp(n\, h(|z|))} < \infty \right\}$$

и снабдим это пространство топологией, задаваемой полунормой $|\cdot|_{n,S}$. Ясно, что $E(h) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_{n,S}(h)$. Следовательно, в $E(h)$ можно определить топологию μ_S внутреннего индуктивного предела последовательности полунормированных пространств $(E_{n,S})_{n=1}^{\infty}$. В случае, когда $S = \mathbb{C}$, будем писать $E_n(h)$ вместо $E_{n,\mathbb{C}}(h)$ и μ вместо $\mu_{\mathbb{C}}$. Всегда топология μ_S мажорируется топологией μ. Если μ_S совпадает с μ, то S называется *слабо достаточным множеством* для $E(h)$. Отметим, что слабо достаточные множества были введены Д. М. Шнайдером в [**?**] и являются частным случаем упомянутых выше γ-достаточных множеств.

В соответствии с теоремой 3.3 из [**?**], всякое достаточное для $E(h)$ множество является для этого пространства слабо достаточным. Обратное утверждение следует из результатов работы [**?**] (см. также [**?**]). Приведенные соображения позволяют применить характеризацию слабо достаточных множеств из статьи [**?**]. Чтобы сделать это, нам потребуется некоторая подготовка.

Назовем две функции $h_1 \in \mathcal{V}$ и $h_2 \in \mathcal{V}$ *эквивалентными* ($h_1 \sim h_2$), если $h_1(r) = O(h_2(r))$ и $h_2(r) = O(h_1(r))$ при $r \to \infty$. Ясно, что пространство $E(h)$, достаточные и слабо достаточные множества для $E(h)$ и топологии μ и μ_S в $E(h)$ не изменятся, если мы заменим h на любую функцию $g \sim h$. Для $h \in \mathcal{V}$ положим $h_0(r) := (h(r) - h(1))^+$, где $x^+ := \max(x, 0)$. Очевидно, что $h_0 \in \mathcal{V}$, $h_0(1) = 0$ и $h_0 \sim h$. Далее, каждая функция $h \in \mathcal{V}$ с $h(r) = O(\ln r)$ $(r \to \infty)$ эквивалентна $(\ln r)^+$. Поэтому, не ограничивая общности, мы можем считать, что h принадлежит классу

$$\mathcal{W} := \{(\ln r)^+\} \bigcup \{h \in \mathcal{V} : \, h(r) \text{ возрастает на } [0, \infty), \; \ln r = o(h(r)) \text{ при } r \to \infty\}.$$

Лемма 1. *Пусть $h \in \mathcal{W}$. Существуют возрастающая последовательность $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел и последовательность $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел такие, что функция*

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n_k}, \quad z \in \mathbb{C}\,, \tag{1}$$

является целой и удовлетворяет условиям:

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\ln M_g(r)}{h(r)} = 1; \tag{2}$$

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\ln m_g(r)}{h(r)} = 1, \tag{3}$$

где $M_g(r)=\max\{|g(z)|:\,|z|=r\}$ и $m_g(r)=\min\{|g(z)|:\,|z|=r\}$.

$\lhd$ Для $h(r)=(\ln r)^+$ достаточно взять $g(z)=z$. Теперь рассмотрим возрастающую функцию $h\in\mathcal{V}$ с $h(1)=0$ и $\ln r=o(h(r))$ при $r\to\infty$. Как обычно, сопряженную с $H(x):=h(\exp x)$ функцию H^* определим по формуле

$$H^*(y):=\sup\{xy-H(x):\,x\geqslant 0\},\quad y\geqslant 0\,.$$

Для каждого $x\geqslant 0$ обозначим через $y(x)$ решение уравнения $H^*(y)+H(x)=xy$. Ясно, что $y(x)\to\infty$ при $x\to\infty$. Возьмем любую возрастающую последовательность $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел, для которой соответствующая ей последовательность $(r_k)_{k=1}^{\infty}:=(y(n_k))_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям:

$$k=o(h(r_k))\quad\text{при}\quad k\to\infty; \tag{4}$$

$$h(r_k)\geqslant n_{k-1}\ln r_k+k\,\ln 4\quad\text{при}\quad k\geqslant 2. \tag{5}$$

Положим $c_k=4^{-k}\exp\big(-H^*(n_k)\big)$, $k\in\mathbb{N}$. Так как $xy\leqslant H(x)+H^*(y)$ при всех $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, то

$$c_kr^{n_k}=4^{-k}\exp\big(-H^*(n_k)+n_k\ln r\big)\leqslant 4^{-k}e^{h(r)}$$

при любом $r\geqslant 1$. Поэтому функция g вида (1) с выбранными нами c_k и n_k $(k\in\mathbb{N})$ корректно определена и удовлетворяет оценке

$$M_g(r)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kr^{n_k}\leqslant\frac{1}{3}\,e^{h(r)}\ \ (r\geqslant 1).$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln M_g(r)}{h(r)}\leqslant 1. \tag{6}$$

Используя (5) и выбор $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, имеем

$$\begin{aligned} m_g(r_k)&\geqslant c_kr_k^{n_k}-\sum_{j\neq k}c_jr_k^{n_j}\geqslant 4^{-k}e^{h(r_k)}-\sum_{j\neq k}4^{-j}e^{-H^*(n_j)+n_j\,\ln r_k}\\ &\geqslant 4^{-k}e^{h(r_k)}-\sum_{j=1}^{k-1}4^{-j}e^{n_{k-1}\,\ln r_k}-\sum_{j=k+1}^{\infty}4^{-j}e^{h(r_k)}\geqslant\frac{1}{3}\,4^{-k}e^{h(r_k)}. \end{aligned}$$

С учетом (4) заключаем тогда, что

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln m_g(r)}{h(r)}\geqslant 1. \tag{7}$$

Объединив (6) и (7), получим (2) и (3). Лемма доказана. $\rhd$

Теорема 1. *Пусть S — подмножество комплексной плоскости. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *S достаточно для $E(h)$;*

(ii) *S слабо достаточно для $E(h)$;*

(iii) *для каждого $l\in\mathbb{N}$ существует $n\in\mathbb{N}$ такое, что $E_{l,S}(h)\subset E_n(h)$ и это вложение непрерывно;*

(iv) *для каждого $l\in\mathbb{N}$ существует $n\in\mathbb{N}$ такое, что $E_{l,S}(h)\subset E_n(h)$.*

$\lhd$ По следствию 3.9 работы [?] из (i) вытекает (ii). Условие (ii) влечет (i) по теореме 2 из [?]. Справедливость импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) следует из [?, теорема 3.5], а (iii) $\Rightarrow$ (ii) — из [?, теорема 1]. Очевидно, (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Остается проверить, что (iv) $\Rightarrow$ (iii). Заметим, что по теореме 3 из [?] для этого достаточно проверить, что если (iv) выполнено, то S — множество единственности для $E(h)$. Пусть $f \in E(h)$ и $f(z) = 0$ при всех $z \in S$. В соответствии с (iv) имеется $n \in \mathbb{N}$, для которого $E_{1,S}(h) \subset E_n(h)$. Рассмотрим функцию g из леммы 1. Из условия (2) следует, что $g \in E(h)$. Так как $E(h)$ — алгебра, то $f\,g^{n+1} \in E(h)$. Очевидно, что $f\,g^{n+1} \in E_{1,S}(h)$. Отсюда заключаем, что $f\,g^{n+1} \in E_n(h)$. Поэтому имеется такая постоянная $C > 0$, что при всех $r \geqslant 1$

$$M_f(r)\big(m_g(r)\big)^{n+1} \leqslant C\, e^{n\,h(r)}\,.$$

Это неравенство вместе с (3) влечет, что

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} \leqslant -1\,,$$

а это возможно только для $f \equiv 0$ на $\mathbb{C}$. Итак, S — множество единственности для $E(h)$, и доказательство завершено. $\rhd$

Основной результат

В этом параграфе будет доказан основной результат работы.

Определение. Подмножество S комплексной плоскости $\mathbb{C}$ называется *лиувиллевским множеством* для пространства E целых функций, если всякая функция из E, которая ограничена на S, является ограниченной в $\mathbb{C}$ и, следовательно, сводится к тождественной постоянной.

Как было отмечено выше, всякое достаточное для $E(h)$ множество является для этого пространства лиувиллевским. Следующее предложение показывает, что для пространства $\mathcal{P}\ \big(= E\big((\ln r)^+\big)\big)$ всех полиномов верно и обратное утверждение.

Предложение 1. *Пусть S — подмножество комплексной плоскости. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *S достаточно для $\mathcal{P}$;*

(ii) *S — лиувиллевское для $\mathcal{P}$ множество;*

(iii) *S не ограничено.*

$\lhd$ Условие (i) влечет (ii) по теореме 2.4 из [?]. Очевидно, (ii) $\Rightarrow$ (iii). Чтобы доказать справедливость импликации (iii) $\Rightarrow$ (i), заметим, что для любого полинома $p \not\equiv 0$ предел $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\ln|p(z)|}{\ln|z|}$ существует и равен степени p. Поэтому для любого неограниченного в $\mathbb{C}$ множества S

$$E_{n,S}\big((\ln r)^+\big) = E_n\big((\ln r)^+\big) = \{p \in \mathcal{P} :\ \deg\, p \leqslant n\},\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда по теореме 1 множество S достаточно для $\mathcal{P}$. $\rhd$

Теперь рассмотрим подмножества комплексной плоскости, представляющие собой объединения концентрических окружностей с центром в начале координат. Именно, для произвольной последовательности $\mathcal{R} = (R_j)_{j=1}^{\infty}$ положительных чисел обозначим через $S(\mathcal{R})$ множество $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{z \in \mathbb{C} :\ |z| = R_j\}$.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{R} = (R_j)_{j=1}^{\infty}$ — произвольная неограниченная сверху последовательность положительных чисел. Тогда $S(\mathcal{R})$ — лиувиллевское множество для $E(h)$ при любой функции h из $\mathcal{V}$.*

◁ Доказательство следует непосредственно из принципа максимума модуля аналитических функций. ▷

Предложение 3. *Для каждой функции $h \in \mathcal{V}$, удовлетворяющей условию*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln r}{h(r)} = 0\,, \tag{8}$$

имеется такая последовательность $\mathcal{R} = (R_j)_{j=1}^{\infty}$ $(R_j \to \infty$ при $j \to \infty)$, что множество $S(\mathcal{R})$ не является достаточным для $E(h)$.

◁ Возьмем последовательность $(R_j)_{j=1}^{\infty}$ настолько быстро стремящейся к бесконечности, чтобы

$$h(R_k) \geqslant \left(1 + \frac{h(R_j^j)}{\ln R_j}\right) \ln R_k \quad \text{при любом} \quad k \geqslant j+1. \tag{9}$$

Это возможно в соответствии с (8). Пусть

$$m_j := \left[\frac{h(R_j^j)}{\ln R_j}\right] + 1, \quad j \in \mathbb{N},$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим полиномы $p_j(z) = z^{m_j}$ $(j \in \mathbb{N})$.

Зафиксируем произвольное $j \in \mathbb{N}$. Для $|z| = R_k$, где $1 \leqslant k \leqslant j$, в силу выбора m_j имеем

$$|p_j(z)| \exp\big(-h(|z|)\big) \leqslant \exp m_j \ln R_j \leqslant \exp\big(h(R_j^j) + \ln R_j\big).$$

Применив (9), заключаем, что $m_j \ln R_k \leqslant h(R_k)$ при любом $k \geqslant j+1$. Тогда для $|z| = R_k$ с $k \geqslant j+1$

$$|p_j(z)| \exp\big(-h(|z|)\big) = \exp\big(m_j \ln R_k - h(R_k)\big) \leqslant 1.$$

Значит, при всех $j \in \mathbb{N}$

$$|p_j|_{1,S(\mathcal{R})} \leqslant \exp\big(h(R_j^j) + \ln R_j\big).$$

С другой стороны, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |p_j|_n = \sup_{R\geqslant 0} M_{p_j}(R) \exp\big(-nh(R)\big) &\geqslant (R_j^j)^{m_j} \exp\big(-n\,h(R_j^j)\big) \\ = \exp\big(j\,m_j \ln R_j - n\,h(R_j^j)\big) &\geqslant \exp\big((j-n)h(R_j^j)\big). \end{aligned}$$

Использовав полученные выше оценки, получаем, что при всех $j \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{|p_j|_n}{|p_j|_{1,S(\mathcal{R})}} \geqslant \exp\big((j-n-1)h(R_j^j) - \ln R_j\big).$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ правая часть последнего неравенства неограничена по j. Следовательно, условие (iii) теоремы 1 для $S = S(\mathcal{R})$ не выполнено. Поэтому S не может быть достаточным множеством для $E(h)$. Доказательство завершено. ▷

Следствие. *Для любой функции h из $\mathcal{V}$, удовлетворяющей (8), имеется лиувиллевское для пространства $E(h)$ множество, не являющееся для него достаточным.*

◁ Доказательство следует немедленно из предложений 2 и 3. ▷

Теперь мы можем привести основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть $h \in \mathcal{V}$. Следующие утверждения эквивалентны:*
(i) *каждое лиувиллевское для $E(h)$ множество достаточно для этого пространства;*
(ii) *$E(h)$ совпадает с алгеброй $\mathcal{P}$ всех полиномов.*

$\triangleleft$ Справедливость импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из только что приведенного следствия, а (ii) $\Rightarrow$ (i) — из предложения 1. $\triangleright$

Литература

1. *Ehrenpreis L.* Analytically uniform spaces and some applications // Trans. Amer. Math. Soc.—1961.—V. 101.—P. 52–74.
2. *Schneider D. M.* Sufficient sets for some spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1974.—V. 174.—P. 161–180.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Максимальные и γ-достаточные множества. Приложения к целым функциям. I // Теория функций, функц. анализ и их прилож.—1990.—№ 54.—С. 42–49.
4. *Коробейник Ю. Ф.* Максимальные и γ-достаточные множества. Приложения к целым функциям. II // Теория функций, функц. анализ и их прилож.—1991.—№ 55.—С. 23–34.
5. *Anderson J. M., Barth K. F., Brannan D. A.* Research problems in complex analysis // Bull. London Math. Soc.—1977.—V. 9.—P. 129–162.
6. *Напалков В. В.* О сравнении топологий в некоторых пространствах целых функций // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 264, № 4.—С. 827–830.
7. *Коробейник Ю. Ф.* Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1986.—Т. 50, № 3.—С. 539–565.
8. *Абанин А. В.* О некоторых признаках слабой достаточности // Мат. заметки.—1986.—Т. 40, № 4.—С. 442–454.

Статья поступила 10 мая 2005 г.

Абанин Александр Васильевич, д. ф.-м. н.
г. Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет;
Лаборатория математических исследований ИПМИ ВНЦ РАН и ЮРГУЭС
E-mail: abanin@math.rsu.ru