Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2005, Том 7, Выпуск 3

УДК **517.982 + 517.53**

ДВА ОБЩИХ УСЛОВИЯ НЕДОПУСТИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО СИНТЕЗА ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Б. Н. Хабибуллин

Семидесятипятилетию профессора
Ю. Ф. Коробейника посвящается

Пусть Ω — выпуклая область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и H — пространство голоморфных в области Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах из Ω. Строятся последовательности $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \subset \mathbb{C}$ такие, что инвариантные (относительно дифференцирования) подпространства $W_1, W_2 \subset H$ со спектрами соответственно Λ_1, Λ_2 допускают спектральный синтез, а пересечение $W_1 \cap W_2$ теряет это свойство.

§ 1. Введение. Постановка задачи

Всюду в данной работе под последовательностью чисел (точек) в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ понимается пустая, конечная или бесконечная последовательность вида $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$, где $k = 1, 2, \dots$, не имеющая предельных точек в $\mathbb{C}$. При этом для простоты и краткости формулировок всегда предполагаем, что в рассматриваемых последовательностях все точки попарно различны. Для подмножества $B \subset \mathbb{C}$ полагаем $\Lambda(B) = \sum_{\lambda_k \in B} 1$ — число точек последовательности Λ в подмножестве B.

Каждой последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ в $\mathbb{C}$ сопоставляем систему экспонент

$$\mathcal{E}_\Lambda := \left\{e^{\lambda_k z}\right\}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Всюду далее Ω — область в $\mathbb{C}$. Через $H(\Omega)$ обозначаем локально выпуклое пространство голоморфных в Ω функций над $\mathbb{C}$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Там, где это не вызывает разночтений, пространство $H(\Omega)$ обозначаем одним символом H. Замкнутое линейное подпространство W в H называем *инвариантным* (относительно дифференцирования), если вместе с каждой функцией $f \in W$ оно содержит и производную $f' \in W$. Очевидно, множество всех инвариантных подпространств на Ω замкнуто относительно пересечения любого числа таких подпространств. Подпространство нетривиально в H, если не совпадает ни с H, ни с $\{0\}$.

Инвариантное подпространство $W \subset H$ *допускает спектральный синтез* (на Ω), если замыкание в пространстве H линейной оболочки всех конечных наборов функций вида $e^{\lambda z},\ ze^{\lambda z}, \dots, z^{n_\lambda - 1}e^{\lambda z},\ n_\lambda \in \mathbb{N}$, содержащихся в W, совпадает с пространством W.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 03-01-00033, и частично фонда «Государственная поддержка ведущих научных школ», грант НШ–1528.2003.1.

Для каждой последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ строится специальное подпространство $W(\Lambda)$, получаемое замыканием линейной оболочки системы (1). Очевидно, равенство $W(\Lambda) = H$ эквивалентно полноте системы экспонент $\mathcal{E}_\Lambda$ в пространстве H. Легко видеть, что *по построению замкнутое подпространство вида $W(\Lambda)$ всегда инвариантно относительно дифференцирования и обязательно допускает спектральный синтез.*

Здесь мы не останавливаемся подробно на обсуждении обширного круга ситуаций, когда инвариантные подпространства того или иного типа допускают спектральный синтез (см. [1–13], где различные случаи подобного рода отражены как в прямой, так и в двойственной форме, а именно: через локальное описание замкнутых идеалов или подмодулей над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$).

Нас будет интересовать только следующая

Задача. Дать достаточно общие принципы построения последовательностей Λ, для которых при любом представлении Λ в виде объединения (здесь объединение понимается в обычном теоретико-множественном смысле, т. е. если $\lambda \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$, то в объединении $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ эта точка λ считается однократной) двух непустых подпоследовательностей $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ при нетривиальных $W(\Lambda_1)$ и $W(\Lambda_2)$ в H пересечение $W(\Lambda_1) \cap W(\Lambda_2)$ не допускает спектральный синтез.

Из известных до сих пор принципов такого построения отметим один способ из работы И. Ф. Красичкова-Терновского [2, § 7], а также один наш пример из статьи [13, § 6]. Предлагаемые в настоящей статье две новые конструкции геометрического характера отличны от рассматривавшихся ранее, но в основе их по-прежнему лежит двойственная схема И. Ф. Красичкова-Терновского из работ [1–3], [6, 7]. Первая конструкция опирается на понятие (слабо) достаточного множества (см., например, статьи Ю. Ф. Коробейника [14] и А. В. Абанина [15, 16]), а другая — на описание сэмплинг-последовательностей для весовых пространств целых функций (см. статью Н. Марко, Х. Массанеды и Х. Ортеги-Черды [17] и обзор Х. Бруны, Х. Массанеды и Х. Ортеги-Черды [18]).

§ 2. Формулировки основных результатов

Существенно используются сведения из теории целых функций, изложенные в монографиях Б. Я. Левина [19, 20].

2.1. Через $\mathcal{T}$ обозначаем класс 2π-периодических тригонометрически выпуклых функций. Каждой функции $h \in \mathcal{T}$ при любых α и β, $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi$, можно сопоставить функцию

$$s_h(\alpha, \beta) := \Big(h'(\beta - 0) - h'(\alpha + 0) + \int_\alpha^\beta h(\theta)\, d\theta\Big). \tag{2}$$

Пусть Ω — ограниченная выпуклая область с опорной функцией

$$h(\theta) = h_\Omega(\theta) := \sup_{z \in \Omega} \operatorname{Re} z e^{-i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

которая всегда принадлежит классу $\mathcal{T}$. Тогда величина (2) имеет простой геометрический смысл — это длина дуги границы $\partial\Omega$ области Ω, заключенная между точками касания двух опорных прямых к области Ω, ортогональных направлениям (направление α — это направленный к бесконечности луч $\{te^{i\alpha}\colon\ t \geqslant 0\}$) соответственно α и β. В таком контексте мы будем обозначать величину (2) как $s_\Omega(\alpha, \beta) := s_{h_\Omega}(\alpha, \beta)$.

Для последовательности точек $\Lambda = \{\lambda_k\}$ через $n_\Lambda(r_1, r_2; \alpha, \beta)$ обозначаем число точек из Λ, попавших в множество $\{z \in \mathbb{C}\colon\ r_1 < |z| \leqslant r_2,\ \alpha \leqslant \arg z < \beta\}$.

Минимальная угловая плотность последовательности Λ задается как

$$d_\Lambda(\alpha,\beta) := \lim_{\varepsilon\to+0} \liminf_{r\to\infty} \frac{n_\Lambda\bigl(r,(1+\varepsilon)r;\alpha,\beta\bigr)}{\varepsilon r},$$

а *индекс конденсации* —

$$\gamma_\Lambda := \lim_{\varepsilon\to+0} \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} \int_0^{\varepsilon|\lambda_k|} \frac{n(\lambda_k;t)-1}{t}\,dt,$$

где $n_\Lambda(z;t)$ означает число точек из Λ в открытом круге $D(z,t) \subset \mathbb{C}$ с центром z радиуса t; $\overline{D(z,t)}$ — замыкание этого круга.

Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ симметричную ей относительно вещественной оси $\mathbb{R}$ последовательность $\{\overline{\lambda}_k\}$ обозначаем через $\overline{\Lambda}$ и называем ее последовательностью, сопряженной к Λ.

В приведенных терминах и обозначениях мы можем сформулировать наш первый результат по рассматриваемой задаче:

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — выпуклая ограниченная область. Пусть последовательность Λ содержит некоторую подпоследовательность $\overline{\Gamma}$, сопряженную к последовательности Γ с нулевым индексом конденсации $\gamma_\Gamma = 0$, для которой*

$$2\pi d_\Gamma(\alpha,\beta) \geqslant s_\Omega(\alpha,\beta) \quad (\forall \alpha,\beta)\ \alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi.$$

Тогда при любом представлении Λ в виде объединения двух непустых подпоследовательностей $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ при нетривиальных $W(\Lambda_1)$ и $W(\Lambda_2)$ в H пересечение $W(\Lambda_1) \cap W(\Lambda_2)$ не допускает спектральный синтез на Ω.

2.2. В этом пункте мы будем накладывать некоторое условие на границу выпуклой ограниченной области Ω, опираясь на терминологию из [17, 18], адаптированную к нашей ситуации.

Для любого интервала (α,β) с центром $(\alpha+\beta)/2$ интервал (α',β') с тем же центром, но вдвое большей длины будем называть *удвоением интервала* (α,β). Граница $\partial\Omega$ выпуклой области Ω *обладает свойством удвоения*, если существует постоянная C такая, что для любого интервала (α,β) выполнено неравенство $s_\Omega(\alpha',\beta') \leqslant C s_\Omega(\alpha,\beta)$, где (α',β') — удвоение интервала (α,β).

Как известно, для любой функции $h \in \mathcal{T}$ функция $\mathcal{H}(re^{i\theta}) := h(\theta)r$, $r \geqslant 0$, — однородная субгармоническая функция с мерой Рисса

$$d\mu_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\pi} ds_h(\theta) \otimes dr \tag{3}$$

(запись дана в полярных координатах через плотности мер). В случае, когда $h = h_\Omega$ — опорная функция, то вместо нижних индексов $\mathcal{H}$ и h в (3) будем писать Ω. Если область Ω обладает свойством удвоения, то для каждой точки $z \in \mathbb{C}$ однозначно определен радиус $\rho_\Omega(z)$ такой, что

$$\mu_\Omega\bigl(z, \rho_\Omega(z)\bigr) = 1. \tag{4}$$

Последовательность Λ называют *ρ_Ω-разделенной*, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|\lambda - \lambda'| \geqslant \varepsilon \max\{\rho_\Omega(\lambda), \rho_\Omega(\lambda')\}, \quad \lambda, \lambda' \in \Lambda,\ \lambda \neq \lambda'.$$

Нижнюю равномерную плотность последовательности Λ *относительно области* Ω определяем как

$$\mathcal{D}_\Omega^-(\Lambda) := \liminf_{r\to+\infty} \inf_{z\in\mathbb{C}} \frac{\Lambda\bigl(\overline{D(z, r\rho_\Omega(z))}\bigr)}{\mu_\Omega\bigl(D(z, r\rho_\Omega(z))\bigr)}\,. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть* $\Omega\subset\mathbb{C}$ *— выпуклая ограниченная область с границей, обладающей свойством удвоения. Пусть последовательность* Λ *содержит некоторую подпоследовательность* $\overline{\Gamma}$*, сопряженную к последовательности* Γ*, являющейся* ρ_Ω*-разделенной, и при этом* $\mathcal{D}_\Omega^-(\Gamma) > \frac{1}{2\pi}$*. Тогда при любом представлении* Λ *в виде объединения двух непустых подпоследовательностей* $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2$ *при нетривиальных* $W(\Lambda_1)$ *и* $W(\Lambda_2)$ *в* H *пересечение* $W(\Lambda_1)\cap W(\Lambda_2)$ *не допускает спектральный синтез на* Ω*.*

Замечание 1. Условие удвоения для границы можно снять, так как произвольную выпуклую область Ω можно вписывать в сколь угодно близкие в естественном смысле выпуклые области Ω' с границей $\partial\Omega'$, обладающей свойством удвоения. Но при этом, несколько ослабляя теорему 2, необходимо каждый раз в условиях также заменять Ω на Ω', т. е. ρ_Ω и $\mathcal{D}_\Omega^-(\Gamma)$ на $\rho_{\Omega'}$ и $\mathcal{D}_{\Omega'}^-(\Gamma)$.

Замечание 2. Впервые функции типа ρ_Ω из (4) и плотность (5) возникли у А. Берлинга [21, с. 300] еще в конце 1950-х годов для последовательностей вещественных чисел Λ, когда в роли Ω выступал интервал. Довольно детальный анализ различных случаев функции $\rho_\Omega(z)$ из (4) проведен в работе Р. С. Юлмухаметова [22]. Общие факты о функциях типа (4) и подробная библиография, связанная с их исследованием, содержится в [17, 18]. Так, если граница $\partial\Omega$ области Ω класса C^2 и ее кривизна $h''_\Omega + h_\Omega$ отделена от нуля, то ρ_Ω всюду в п. 2.2 можно заменить на тождественную единицу [17, Введение].

§ 3. Двойственная схема И. Ф. Красичкова-Терновского

В этом параграфе дается необходимая далее сводка сведений из [1–3].

Всюду Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}$ с опорной функцией h_Ω, H^* — пространство, сильно сопряженное к $H(\Omega)$. Через P_Ω обозначаем пространство целых функций f экспоненциального типа с индикатором роста

$$h_f(\theta) := \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log|f(re^{i\theta})|}{r} < h_\Omega(\theta), \quad \theta\in\mathbb{R},$$

наделенное естественной топологией индуктивного предела (подробнее — в § 4). *Преобразование Лапласа*, действующее на элементы $S\in H^*$ по правилу

$$T:\ S\to f_S(z) := \bigl\langle S, e^{z\zeta}\bigr\rangle\,, \quad z\in\mathbb{C}\,,$$

определяет топологический линейный изоморфизм пространства H^* на пространство P_{Ω^*}, где Ω^* — область, симметричная области Ω относительно вещественной оси. Локально выпуклое пространство P_{Ω^*} далее для краткости обозначаем одним символом P.

Следуя [1, 2], для подпространства $W\subset H$ замкнутое подпространство всех функционалов из H^*, аннулирующих W, обозначаем через W^0, а подпространство в P всех преобразований Лапласа функционалов из W^0 обозначаем $T(W^0)$. В основе доказательства теорем 1 и 2 лежит

Теорема A ([2, предложение 6.2]). *Пусть инвариантные подпространства* $W_1,\dots,W_n$ *в* H *допускают спектральный синтез. Пересечение* $\bigcap_{k=1}^n W_k$ *допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда для какой-либо точки* $\lambda_0\in\mathbb{C}$*, не принадлежащей спектру* *ни одного из пространств W_k, $k = 1, \dots, n$, при любом наборе $\bar\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ комплексных чисел, связанных условием $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, замыкание в P множества*

$$T(\bar\alpha, \lambda_0) := \{F = F_1 + \dots + F_n \colon F_k \in T(W_k^0),\ F_k(\lambda_0) = \alpha_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

содержит тождественный нуль.

В этой работе из теоремы A нам потребуется только необходимость при $n = 2$ и $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$ в следующей форме (ср. [2, предложение 6.4]):

Теорема A′. *Пусть Λ_1 и Λ_2 две последовательности, для которых инвариантные подпространства $W_1 := W(\Lambda_1)$ и $W_2 := W(\Lambda_2)$ нетривиальны в H, $\lambda_0 \notin \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, а их пересечение $W_1 \cap W_2$ допускает спектральный синтез на Ω. Тогда найдутся две направленности* [23] (*сети* [24], *обобщенные последовательности*) *целых функций $f_\sigma \in T(W_1^0) \subset P$ и $g_\sigma \in T(W_2^0) \subset P$ по направленному множеству $\Sigma = \{\sigma\}$ с условием $f_\sigma(\lambda_0) = g_\sigma(\lambda_0) = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$ такие, что разность $f_\sigma - g_\sigma$ стремиться к тождественному нулю в P по направленному множеству Σ.*

Отметим, что для нетривиального инвариантного подпространства $W = W(\Lambda)$ подпространство $T(W^0) \subset P$ — это замкнутый подмодуль над кольцом $\mathbb{C}[z]$, состоящий из всех функций из P, обращающихся в нуль на последовательности Λ. Таким образом, Теорема A′ дает

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы A′. Тогда найдутся две направленности целых функций $f_\sigma \in P$ и $g_\sigma \in P$ по направленному множеству $\Sigma = \{\sigma\}$, обращающихся при каждом σ в нуль соответственно на последовательностях Λ_1 и Λ_2, с условием $f_\sigma(\lambda_0) = g_\sigma(\lambda_0) = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$ такие, что разность $f_\sigma - g_\sigma$ стремиться к тождественному нулю в P по Σ.*

§ 4. (Слабая) достаточность множеств и доказательство теоремы 1

Введем различные топологии на P (см., например, [14, 25, 26]). Пусть функции $h_n(\theta) < h_\Omega(-\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, из $\mathcal{T}$ образуют возрастающую последовательность, причем $h_n(\theta) \to h_\Omega(-\theta)$ при $n \to \infty$ для всех $\theta \in \mathbb{R}$.

Пусть S — подмножество в $\mathbb{C}$. По указанной последовательности возрастающих функций $h_n \in \mathcal{T}$ можем ввести полунормированные пространства

$$P_n(S) := \left\{ f \in P \colon \|f\|_{n,S} := \sup_{re^{i\theta} \in S} \frac{|f(re^{i\theta})|}{\exp\bigl(h_n(\theta) r\bigr)} \right\}. \tag{6}$$

В векторном пространстве $P = \bigcup_n P_n(S)$ можно рассматривать топологию τ_S (внутреннего) индуктивного предела пространств $P_n(S)$, снабженных полунормами $\|\cdot\|_{n,S}$. Напомним, что фундаментальная система окрестностей нуля в этой топологии индуктивного предела порождается абсолютно выпуклыми оболочками объединений шаров $\{f \in P \colon \|f\|_{n,S} < \varepsilon_n\}$ по всевозможным последовательностям чисел $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$ В частности, при $S = \mathbb{C}$ топология $\tau_{\mathbb{C}}$ есть ни что иное, как отмечавшаяся в начале § 3 естественная топология индуктивного предела на пространстве P. При этом множество S называется *слабо достаточным* для P, если τ_S совпадает с $\tau_{\mathbb{C}}$ на P.

Рассмотрим также класс $\mathcal{K}$ положительных функций $k(z)$ со свойствами:

1) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{k(z)}{\exp\bigl(h_n(\theta) r\bigr)} = \infty$, $z = re^{i\theta}$, для каждого n;
2) $\inf\limits_{z \in D} k(z) > 0$ для каждого компакта $D \subset \mathbb{C}$.

Теперь для $S \subset \mathbb{C}$ по классу функций $\mathcal{K}$ можно определить на P локально выпуклую топологию $\tau_{\mathcal{K},S}$ с помощью системы полунорм

$$p_{k,S}(f) := \sup_{z\in S} \frac{|f(z)|}{k(z)}\,, \quad f \in P. \tag{7}$$

Еще в [1, § 3] было установлено совпадение топологий $\tau_{\mathbb{C}} = \tau_{\mathcal{K},\mathbb{C}}$.

Подмножество S называется *достаточным* для P, если топология $\tau_{\mathcal{K},S}$ совпадает с $\tau_{\mathcal{K},\mathbb{C}} = \tau_{\mathbb{C}}$ на P. В. В. Напалковым [25] было доказано, что *множество слабо достаточное для P тогда и только тогда, когда оно достаточное для P* (весьма общие результаты в этом направлении принадлежат В. В. Напалкову [26, теорема 5] и Ю. Ф. Коробейнику [14, теорема Д]).

Доказательство теоремы 1. Если выполнены условия теоремы 1, то по критерию А. В. Абанина (см. [15, теорема 1] и [16, теорема 3.2.1]) Λ — слабо достаточное множество для P, а значит, и достаточное для P.

Допустим напротив, пересечение $W(\Lambda_1) \cap W(\Lambda_2)$ допускает спектральный синтез на Ω. Тогда по следствию 1 найдутся две направленности целых функций $f_\sigma, g_\sigma \in P$ по направленному множеству $\Sigma = \{\sigma\}$, обращающихся при каждом σ в нуль соответственно на последовательностях Λ_1 и Λ_2, с условием $f_\sigma(\lambda_0) = g_\sigma(\lambda_0) = 1$ при некотором $\lambda_0 \notin \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ для всех $\sigma \in \Sigma$ такие, что разность $f_\sigma - g_\sigma$ стремиться к тождественному нулю в P по Σ в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$. В частности, для сужений этой разности на Λ тем более имеет место стремление к тождественному нулю (на Λ) в топологии τ_Λ по Σ, а значит, в силу совпадения слабо достаточных и достаточных множеств для P, и в топологии $\tau_{\mathcal{K},\Lambda}$ по Σ. Но для сужений на Λ имеем равенства

$$\bigl|(f_\sigma + g_\sigma)(\lambda)\bigr| = \bigl|(f_\sigma - g_\sigma)(\lambda)\bigr|, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{8}$$

Действительно, в (8) если $\lambda \in \Lambda_1$, то $f_\sigma(\lambda) = 0$, а если $\lambda \in \Lambda_2$, то $g_\sigma(\lambda) = 0$. Поскольку топология $\tau_{\mathcal{K},\Lambda}$ определяется через полунормы (7), то из (8) следует $p_{k,\Lambda}(f_\sigma + g_\sigma) = p_{k,\Lambda}(f_\sigma - g_\sigma)$, откуда направленность $f_\sigma + g_\sigma$ также стремиться к тождественному нулю (что, кстати, совсем не видно из определения топологии индуктивного предела) на Λ в топологии $\tau_{\mathcal{K},\Lambda}$ по Σ. Поскольку Λ — достаточное множество для P, это означает, что направленность $f_\sigma + g_\sigma$ стремиться к тождественному нулю в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$. В частности, она стремиться к нулю в точке λ_0, хотя должна принимать в этой точке значение $f_\sigma(\lambda_0) + g_\sigma(\lambda_0) = 2$ при любом $\sigma \in \Sigma$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 5. Самплинг-последовательности и доказательство теоремы 2

Следуя обозначениям из [17], наряду с пространством P рассмотрим нормированное пространство (ср. с (6))

$$\mathcal{F}^\infty := \mathcal{F}^\infty_{\Omega^*} := \left\{ f \in H(\mathbb{C})\colon\ \|f\|_{\mathcal{F}^\infty} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(re^{i\theta})|}{\exp\bigl(h_\Omega(-\theta)r\bigr)} < \infty \right\}. \tag{9}$$

По определению топологии индуктивного предела $\tau_{\mathbb{C}}$ на P легко видеть, что топология $\tau_{\mathcal{F}^\infty}$, индуцированная с пространства $\mathcal{F}^\infty$ на P, слабее, чем $\tau_{\mathbb{C}}$. Кроме этого, по последовательности Λ на $\mathcal{F}^\infty$ введем полунормы

$$\|f\|_{\ell^\infty_\Omega(\Lambda)} := \sup_{\lambda = te^{i\varphi}\in\Lambda} \frac{|f(\lambda)|}{\exp\bigl(h_\Omega(-\varphi)t\bigr)}\,. \tag{10}$$

Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ называют *сэмплинг-последовательностью* (для $\mathcal{F}^\infty$), если существует постоянная C такая, что

$$\|f\|_{\mathcal{F}^\infty} \leqslant C\|f\|_{\ell^\infty_\Omega(\Lambda)}, \quad f \in \mathcal{F}^\infty. \tag{11}$$

Положительная борелевская мера μ на $\mathbb{C}$ *обладает свойством удвоения* (в терминологии [17, 18] «doubling measure»), если существует постоянная C такая, что $\mu\big(D(z,2t)\big) \leqslant C\mu\big(D(z,t)\big)$. Нетрудно показать, что если граница выпуклой области Ω обладает свойством удвоения, то мера $\mu_\Omega = \mu_{\mathcal{H}}$, построенная по опорной функции $h = h_\Omega$ области Ω как в (3), также обладает свойством удвоения. Поэтому общий критерий Марко — Массанеды — Ортеги-Черды [17] сэмплинг-последовательностей в нашем очень частном случае можно сформулировать как

Теорема B ([17, теорема B]). *Пусть граница выпуклой области Ω обладает свойством удвоения. Λ — сэмплинг-последовательность для $\mathcal{F}^\infty$, если и только если Λ содержит подпоследовательность $\overline{\Gamma}$, сопряженную* (*сопряжение возникает ввиду того, что в* (9) *и* (10) *при определении* (*полу*)*нормы имеем дело с $h_\Omega(-\theta)$, т. е. с опорной функцией сопряженной области Ω^**) *к последовательности Γ, являющейся ρ_Ω-разделенной, и $\mathcal{D}^-_\Omega(\Gamma) > \frac{1}{2\pi}$.*

Доказательство теоремы 2. Выполнение условий теоремы 2 по теореме B означает, что Λ — сэмплинг-последовательность для $\mathcal{F}^\infty$.

Вновь допустим, что пересечение $W(\Lambda_1) \cap W(\Lambda_2)$ допускает спектральный синтез на Ω. Тогда по Следствию 1 найдутся две направленности целых функций $f_\sigma, g_\sigma \in P$ по направленному множеству $\Sigma = \{\sigma\}$, обращающихся при каждом σ в нуль соответственно на последовательностях Λ_1 и Λ_2, с условием $f_\sigma(\lambda_0) = g_\sigma(\lambda_0) = 1$ при некотором $\lambda_0 \notin \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ для всех $\sigma \in \Sigma$ такие, что разность $f_\sigma - g_\sigma$ стремиться к тождественному нулю в P по Σ в топологии $\tau_{\mathbb{C}}$. Поскольку топология $\tau_{\mathcal{F}^\infty}$, индуцированная с пространства $\mathcal{F}^\infty$ на P, слабее, чем $\tau_{\mathbb{C}}$, разность $f_\sigma - g_\sigma$ стремиться к тождественному нулю в P по Σ и в этой индуцированной топологии $\tau_{\mathcal{F}^\infty}$. Очевидно, сужения разностей $f_\sigma - g_\sigma$ на Λ тем более стремятся к тождественному нулю (на Λ) в топологии, определяемой полунормой $\|\cdot\|_{\ell^\infty_\Omega(\Lambda)}$ из (10), и, кроме того, опять имеют место равенства (8). Отсюда $\|f_\sigma + g_\sigma\|_{\ell^\infty_\Omega(\Lambda)} = \|f_\sigma - g_\sigma\|_{\ell^\infty_\Omega(\Lambda)} \to 0$ по Σ. Следовательно, для сэмплинг-последовательности Λ из характеризующего такие последовательности соотношения (11) получаем $\|f_\sigma + g_\sigma\|_{\mathcal{F}^\infty} \to 0$ по Σ. Тем более $f_\sigma(\lambda_0) + g_\sigma(\lambda_0) \to 0$ по Σ, а это противоречит равенству $f_\sigma(\lambda_0) + g_\sigma(\lambda_0) = 2$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сб.—1972.—Т. 87 (129).—№ 4.—С. 459–489.
2. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сб.—1972.—Т. 88 (130).—№ 1.—С. 3–30.
3. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза // Мат. сб.—1972.—Т. 88 (130).—№ 3.—С. 331–352.
4. *Леонтьев А. Ф.* О суммировании ряда Дирихле с комплексными показателями и его применении // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова.—1971.—Т. CXII.—С. 300–326.
5. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент.—М.: Наука, 1980.
6. *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1979.—Т. 43.—№ 1.—С. 44–66.
7. *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1979.—Т. 43.—№ 2.—С. 309–341.
8. *Абузярова Н. Ф.* Об одном свойстве подпространств, допускающих спектральный синтез // Мат. сб.—1999.—Т. 190.—№ 4.—С. 3–22.

9. *Хабибуллин Б. Н.* Замкнутые идеалы и подмодули голоморфных функций с двумя порождающими // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Геометрическая теория функций и краевые задачи.—Казань, 2002.—Т. 13.—С. 158–163.
10. *Хабибуллин Б. Н.* Замкнутые подмодули голоморфных функций, порожденные подмодулями, допускающими локальное описание // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Геометрическая теория функций и краевые задачи.—Казань, 2002.—Т. 14.—С. 280–298.
11. *Хабибуллин Б. Н.* Замкнутые подмодули голоморфных функций с двумя порождающими // Функц. анализ и его приложения.—2004.—Т. 38, № 1.—С. 65–80.
12. *Хабибуллин Б. Н.* Замкнутые идеалы голоморфных функций с двумя порождающими // Мат. заметки.—2004.—Т. 76, вып. 4.—С. 604–609.
13. *Хабибуллин Б. Н.* Спектральный синтез для пересечения инвариантных подпространств голоморфных функций // Мат. сб.—2005.—Т. 196, № 3.—С. 119–142.
14. *Коробейник Ю. Ф.* Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1986.—Т. 50, № 3.—С. 539–565.
15. *Абанин А. В.* Распределение показателей представляющих систем обобщенных экспонент // Мат. заметки.—1991.—Т. 49, вып. 2.—С. 3–12.
16. *Абанин А. В.* Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы: Дис. ... доктора физ.-мат. наук.—Екатеринбург, 1995.—268 с.
17. *Marco N., Massaneda X., Ortega-Cerdà J.* Interpolating and sampling sequences for entire functions // Geom. and Funct. Analysis.—2003.—V. 13, Issue 4.—P. 862–914.
18. *Bruna J., Massaneda X., Ortega-Cerdà J.* Connections between signal processing and complex analysis // In: Contributions to Science.—Barselona: Institut d'Estudis Catalans. 2003.—V. 2 (3).—P. 345–357.
19. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Физматгиз, 1956.—632 с.
20. *Levin B. Ya.* Lectures on entire functions.—Transl. Math. Monographs. Amer. Math. Soc. Providence RI.—1996.—V. 150.—248 p.
21. *Beurling A.* The collected works of Arne Beurling. Vol. 2 / Edited by L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger and J. Wermer.—Boston: Birkhäser Boston Inc., 1989.—389 p.
22. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация однородных субгармонических функций // Мат. сб.—1987.—Т. 134 (176).—№ 4 (12).—С. 511–529.
23. *Келли Дж. Л.* Общая топология.—М: Наука, 1981.—431 с.
24. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ.—М: Мир, 1969.—1071 с.
25. *Напалков В. В.* О сравнении топологий в некоторых пространствах целых функций // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 264, № 4.—С. 827–830.
26. *Напалков В. В.* О строгой топологии в некоторых весовых пространствах функций // Мат. заметки.—1986.—Т. 39, вып. 4.—С. 529–538.

Статья поступила 4 мая 2005 г.

Хабибуллин Булат Нурмиевич, д. ф.-м. н.
г. Уфа, Башкирский государственный университет;
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
E-mail: khabib-bulat@mail.ru